

Chương 3. Quan hệ

3.1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp và các tính chất. Biểu diễn quan hệ hai ngôi.

3.2. Quan hệ tương đương. Lớp tương đương. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương.

3.3. Quan hệ thứ tự. Thứ tự toàn phần và bán phần. Biểu đồ Hasse. Phần tử min và max. Các phần tử tối thiểu và tối đại.

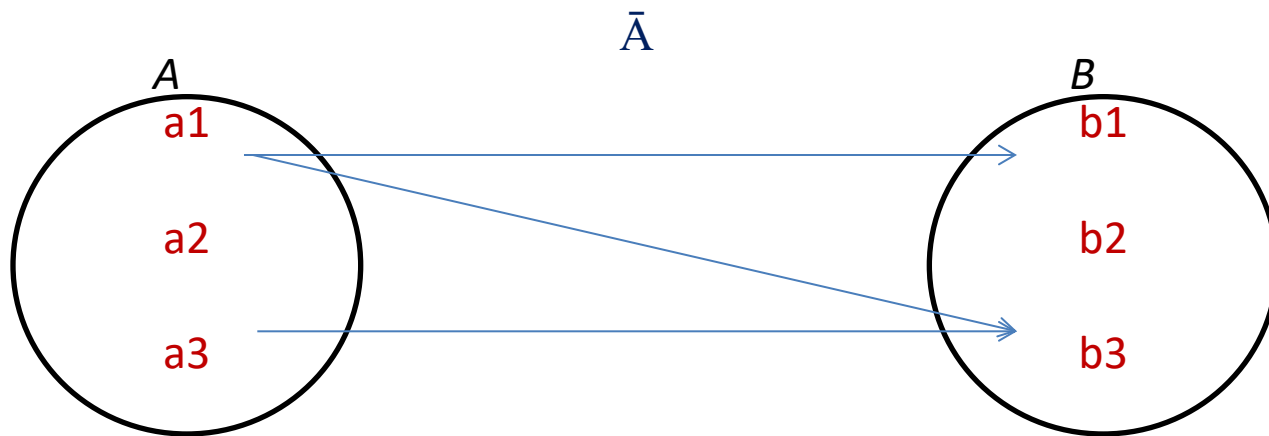
Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa: Cho hai tập A, B . Ta gọi tập R là một quan hệ hai ngôi từ A đến B nếu $R \subseteq A \times B$.

Nếu $(a, b) \in R$ thì ta nói a có quan hệ R với b và ký hiệu $a R b$; ngược lại nếu $(a, b) \notin R$ thì ta ký hiệu $a \bar{R} b$.

Khi $A = B$, ta gọi R là một quan hệ hai ngôi trên A .

Ví dụ:



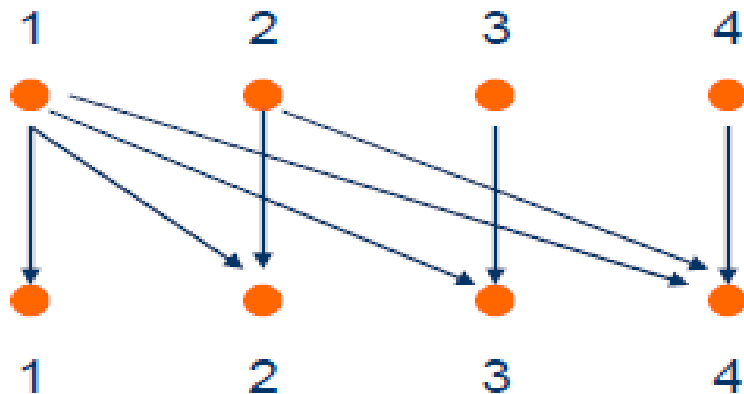
$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R là một quan hệ (hai ngôi) trên A và $R = \{(a, b) \in A \mid \underline{a \text{ là ước của } b}\}$.

Khi đó $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$



- VD: Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. R là quan hệ 2 ngôi trên A và $R = \{(a, b) \text{ thuộc } A \times A \mid a.b \text{ là số chẵn}\}$.

Tổng số phần tử của $A \times A$: $20^2 = 400$. Để ab lẻ thì a, b đều lẻ
 $\rightarrow a, b$ có 10 cách chọn nên có $10^2 = 100$ cách $\rightarrow |R| = 300$.

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ.

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A .

(a) Ta nói quan hệ R có **tính phản xạ** nếu và chỉ nếu
 $a R a, \forall a \in A$.

Ví dụ: Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
không phản xạ vì $(3,3) \notin R1$

$R2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
phản xạ vì $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R2$

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ:

- Quan hệ \leq trên \mathbb{Z} phản xạ vì $a \leq a, \forall a \in \mathbb{Z}$.
- Quan hệ $>$ trên \mathbb{Z} không phản xạ vì 1 không lớn hơn 1.
- Quan hệ “ $|$ ” (“ước số”) trên \mathbb{Z}^+ là phản xạ vì mọi số nguyên dương a là ước của chính nó.
 $2|6 \rightarrow 2$ là ước của 6.

\mathbb{Z}^+ = các số nguyên dương $\{1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Z}^- = các số nguyên âm $\{-1, -2, -3, \dots\}$

\mathbb{Z} = gộp cả 2 tập trên lại và thêm cả 0.

Hỏi quan hệ chia hết có phản xạ trên \mathbb{Z} không?

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ.

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A .

(b) Ta nói quan hệ R có **tính đối xứng** nếu và chỉ nếu
$$a R b \Rightarrow b R a, \quad \forall a, b \in A.$$

(c) Ta nói quan hệ R có **tính phản xứng** nếu và chỉ nếu
$$(a R b \wedge b R a) \Rightarrow a = b, \quad \forall a, b \in A.$$

Ví dụ:

- Quan hệ $R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng.

- Quan hệ \leq trên \mathbf{Z} không đối xứng, tuy nhiên nó phản xứng vì $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$.

- Quan hệ “ $|$ ” (“ước số”) trên \mathbf{Z}^+ không đối xứng, tuy nhiên nó có tính phản xứng vì $(a | b) \wedge (b | a) \Rightarrow (a = b)$.

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A .

(d) Ta nói quan hệ R có **tính bắc cầu (truyền)** nếu và chỉ nếu

$$(a R b \wedge b R c) \Rightarrow a R c, \forall a, b, c \in A.$$

Ví dụ:

- Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (2,3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

- Quan hệ \leq và “ $|$ ” trên \mathbb{Z} có tính bắc cầu vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$$

$$(a | b) \wedge (b | c) \Rightarrow (a | c)$$

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ Định nghĩa.

Cho R là quan hệ từ $A = \{1,2,3,4\}$ đến $B = \{u,v,w\}$,
 $R = \{(1,u), (1,v), (2,w), (3,w), (4,u)\}$.

Khi đó R có thể biểu diễn như sau

	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Dòng và cột
tiêu đề có
thể bỏ qua nếu
không gây hiểu
nhầm.

Đây là ma trận cấp 4×3 biểu diễn
cho quan hệ R

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn Quan hệ

Định nghĩa. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của R là ma trận $M_R = [m_{ij}]_{m \times n}$ xác định bởi:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

Ví dụ: Cho R là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$: $a R b \Leftrightarrow a > b$. Khi đó ma trận biểu diễn của R là:

	1	2
1	0	0
2	1	0
3	1	1

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ: Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi ma trận

$$\mathbf{M}_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Khi đó R gồm các cặp: $\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$.

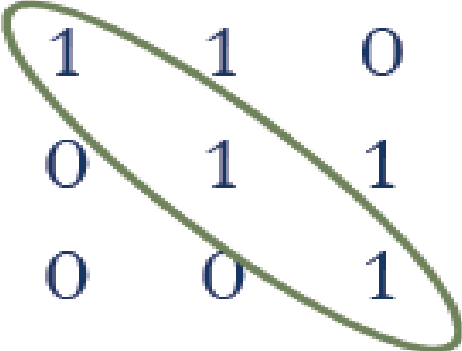
Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

Cho R là quan hệ trên tập A , khi đó M_R là *ma trận vuông*.

+) R là *phản xạ* nếu tất cả các phần tử trên *đường chéo* của M_R đều bằng 1: $m_{ii} = 1, \forall i$.

	u	v	w
u	1	1	0
v	0	1	1
w	0	0	1



Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

+) R là đối xứng nếu M_R là *đối xứng*

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad \forall i, j.$$

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	1
w	1	1	0

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

+) R là *phản xứng* nếu M_R thỏa:

$$m_{ij} = 0 \text{ hoặc } m_{ji} = 0 \text{ nếu } i \neq j$$

Ta thấy không có xảy ra $m_{ij} = m_{ji} = 1$ nếu i khác j .

	u	v	w
u	1	0	1
v	0	0	0
w	0	1	1

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho $S = \{\text{sinh viên của lớp}\}$, gọi R là một quan hệ trên S với $R = \{(a,b): a \text{ có cùng họ với } b\}$.

Hỏi

R phản xạ?

Yes

R đối xứng?

Yes

R bắc cầu?

Yes

Mọi sinh viên

có cùng họ

thuộc cùng một nhóm.

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập A được gọi là **tương đương** nếu và chỉ nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ: Quan hệ R trên tập các chuỗi ký tự xác định bởi aRb nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ: Cho R là quan hệ trên tập \mathbf{Z} sao cho

$$aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}$$

Khi đó R là quan hệ tương đương.

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương và R là quan hệ trên \mathbf{Z} :

$$aRb \Leftrightarrow (a - b) \text{ chia hết } m \text{ (đồng dư)}$$

Khi đó R là quan hệ tương đương.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho a, b, c sao cho $a - b$ và $b - c$ chia hết cho m , khi đó $a - c = a - b + b - c$ cũng chia hết cho m . Suy ra R có tính chất bắc cầu.
- Quan hệ này được gọi là **đồng dư modulo m** và chúng ta viết $a \equiv b \pmod{m}$ thay vì aRb .

Ví dụ: Cho $|$ là quan hệ trên \mathbf{Z} được xác định như sau:

$$a | b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}: b = ka$$

Quan hệ $|$ có là quan hệ tương đương?

Quan hệ tương đương

2. Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và $a \in A$. **Lớp tương đương chứa a** theo quan hệ R được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập hợp tất cả những phần tử có quan hệ R với a .

$$[a]_R = \{b \in A \mid b R a\}$$

- Mỗi phần tử $x \in [a]_R$ được gọi là một phần tử đại diện của lớp tương đương $[a]_R$.
- **Tập thương** của A theo quan hệ R , ký hiệu là A/R , được định nghĩa là tập tất cả các lớp tương đương của các phần tử thuộc A , nghĩa là

$$A/R = \{ [a]_R \mid \forall a \in A \}$$

Quan hệ tương đương

2. Lớp tương đương

Ví dụ: Tìm các lớp tương đương mod 8 chứa 0 và 1?

Giải: Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots \}$$

Tương tự

$$[1]_8 = \{a \mid a \text{ chia 8 dư } 1\} = \{ \dots, -15, -7, 1, 9, 17, \dots \}.$$

Tổng quát: một mod m thì có m lớp tương đương.

Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Nhận xét: Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Mệnh đề. Cho R là quan hệ tương đương trên tập A . Với mọi $a, b \in A$ các điều kiện sau đây tương đương với nhau

(i) $a R b$

(ii) $[a]_R = [b]_R$

(iii) $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Chú ý: Từ mệnh đề trên ta thấy rằng các lớp tương đương của các phần tử của tập A hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau. Hơn nữa, hợp của tất cả các lớp tương đương này trùng với A , cho nên tập A là hợp rời rạc của các lớp tương đương. Ta cũng nói rằng tập A được **phân hoạch** thành các lớp tương đương theo quan hệ R .

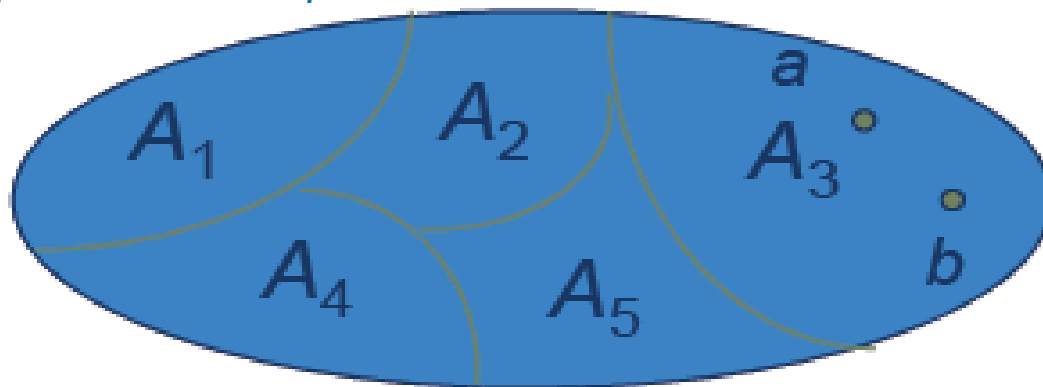
Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Chú ý: Cho $\{A_1, A_2, \dots\}$ là phân hoạch A thành các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy với mỗi $a, b \in A$, ta đặt $a R b$ nếu có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.

Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ nếu $a \in A_i$.



Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp đồng dư modulo m là $[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m$.

Chúng lập thành phân hoạch của \mathbf{Z} thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng:

$$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \dots$$

$$[1]_m = [m+1]_m = [2m+1]_m = \dots$$

.....

$$[m-1]_m = [2m-1]_m = [3m-1]_m = \dots$$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là **số nguyên modulo m** .

Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi \mathbf{Z}_m , đó chính là tập thương của \mathbf{Z} theo quan hệ đồng dư modulo m .

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/R = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$$

Bài tập: Quan hệ tương đương

Các quan hệ dưới đây có tính chất gì?

⇒ $R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$

⇒ $R_2 = \{(a, b) | a > b\}$

⇒ $R_3 = \{(a, b) | a = b \vee a = -b\}$

⇒ "get married" trên tập con người

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa

Ví dụ: Cho R là quan hệ trên tập số thực:

$$a R b \text{ nếu } a \leq b$$

Hỏi:

■ R phản xạ không?

Có

■ R đối xứng không?

Không

■ R phản xứng không?

Có

■ R bắc cầu không?

Có

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa: Quan hệ R trên tập A được gọi là **quan hệ thứ tự** nếu và chỉ nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Ta thường kí hiệu quan hệ thứ tự bởi $<$ (trội hơn)

Cặp $(A, <)$ được gọi là tập sắp thứ tự (tập được sắp) hay poset.

VD: $A = SV$ của lớp CTRR

$< \rightarrow$ điểm thi giữa kỳ

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là $(\mathbb{Z}^+, |)$ là poset

Phản xạ?

Có, $x | x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu?

Có?

$a | b$ nghĩa là $b = ka$, $b | c$ nghĩa là $c = jb$.
Khi đó $c = j(ka) = jka: a | c$

Quan hệ thứ tự

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.

Khi đó $a = jka$

Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

Ví dụ. (\mathbf{Z}, \mid) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

$3 \mid -3$, và $-3 \mid 3$,
nhưng $3 \neq -3$.

Quan hệ thứ tự

Ví dụ: $(P(S), \subseteq)$, ở đây $P(S)$ là tập hợp các con của S , là một poset?

Phản xạ?



Bắc cầu?



Phản xứng?



Quan hệ thứ tự

2. Thứ tự toàn phần và bán phần

Định nghĩa. Các phần tử a và b của poset $(S, <)$ gọi là **so sánh được** nếu $a < b$ hoặc $b < a$.

Trái lại thì ta nói a và b **không so sánh được**.

Cho $(S, <)$. Nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi $(S, <)$ là tập sắp thứ tự toàn phần.

Ta cũng nói rằng $<$ là **thứ tự toàn phần** hay **thứ tự tuyến tính** trên S .

Trái lại thì ta nói $<$ là **thứ tự bán phần**.

Quan hệ thứ tự

2. Thứ tự toàn phần và bán phần

Ví dụ:

- Quan hệ “ \leq ” trên tập số \mathbf{Z}^+ là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ ước số “ $|$ ” trên tập hợp số \mathbf{Z}^+ không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.
- Với tập A cho trước, tập $P(A)$ tất cả các tập con của A với quan hệ \subseteq là một tập được sắp, nhưng không toàn phần khi A có nhiều hơn một phần tử.

$$6|60 \rightarrow 6 < 60$$

5, 7 không có mối quan hệ \rightarrow không so sánh được

$a < b \rightarrow$ thứ tự toàn phần

Quan hệ tập con \rightarrow thứ tự bán phần: $\{1,2,3\}$ và $\{4,5\}$

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Ví dụ: Trên tập các chuỗi bit có độ dài n ta có thể định nghĩa thứ tự như sau:

$$a_1a_2\dots a_n \leq b_1b_2\dots b_n \\ \text{nếu } a_i \leq b_i, \forall i.$$

Với thứ tự này thì các chuỗi 0110 và 1000 là không so sánh được với nhau. Chúng ta không thể nói chuỗi nào lớn hơn.

Trong tin học chúng ta thường sử dụng thứ tự toàn phần trên các chuỗi bit. **Đó là thứ tự từ điển.**

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Cho (A, \leq) và (B, \leq') là hai tập sắp thứ tự toàn phần. Ta định nghĩa thứ tự $<$ trên $A \times B$ như sau :

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \text{ nếu} \\ a_1 < a_2 \text{ hay } (a_1 = a_2 \text{ và } b_1 <' b_2)$$

Dễ dàng thấy rằng đây là thứ tự toàn phần trên $A \times B$. Ta gọi nó là **thứ tự từ điển** .

Chú ý rằng nếu A và B được sắp tốt bởi \leq và \leq' , tương ứng thì $A \times B$ cũng được sắp tốt bởi thứ tự $<$

Chúng ta cũng có thể mở rộng định nghĩa trên cho tích Descartess của hữu hạn tập sắp thứ tự toàn phần.

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Cho Σ là một tập hữu hạn (ta gọi là bảng chữ cái).
Tập hợp các chuỗi trên Σ , ký hiệu là Σ^* , trong đó

$\lambda \in \Sigma^*$, với λ là chuỗi rỗng.

Nếu $x \in \Sigma$, và $w \in \Sigma^*$, thì $wx \in \Sigma^*$, trong đó wx là kết nối w với x .

Ví dụ. Chẳng hạn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Thế thì
 $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \dots\}$

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Giả sử \leq là thứ tự toàn phần trên Σ , khi đó ta có thể định nghĩa thứ tự toàn phần trên Σ^* như sau.

Cho $s = a_1 a_2 \dots a_m$ và $t = b_1 b_2 \dots b_n$ là hai chuỗi trên Σ^*
Khi đó $s < t$ nếu

Hoặc $a_i = b_i$ đối với $1 \leq i \leq m$, tức là

$$t = a_1 a_2 \dots a_m b_{m+1} b_{m+2} \dots b_n$$

Hoặc tồn tại $k < m$ sao cho

$$a_i = b_i \text{ với } 1 \leq i \leq k \text{ và}$$

$$a_{k+1} < b_{k+1}, \text{ nghĩa là}$$

$$s = a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_m$$

$$t = a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} b_{k+2} \dots b_n$$

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Chúng ta có thể kiểm tra $<$ là thứ tự toàn phần trên Σ^* Ta gọi nó là **thứ tự từ điển trên Σ^***

Ví dụ. Nếu Σ là bảng chữ cái tiếng Anh với thứ tự: $a < b < \dots < z$, thì thứ tự nói trên là thứ tự thông thường giữa các từ trong Từ điển.

$\text{discreet} < \text{discrete}$

discreet
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
discrete $e < t$

$\text{Discreet} < \text{discreetness}$

discreet
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
discreetness

Quan hệ thứ tự

*Thứ tự từ điển

Ví dụ: Nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ với $0 < 1$, thì là thứ tự toàn phần trên tập tất cả các chuỗi bit Σ^* .

Ta có

$$0110 < 10$$

$$0110 < 01100$$

Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Mỗi poset có thể biểu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ *Hasse*

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa. Phần tử b trong poset $(S, <)$ được gọi là *phần tử trội* của phần tử a trong S nếu $a < b$

Chúng ta cũng nói rằng a là *được trội bởi* b . Phần tử b được gọi là *trội trực tiếp của* a nếu b là trội của a , và không tồn tại trội c sao cho

$$a < c < b, a \neq c \neq b$$

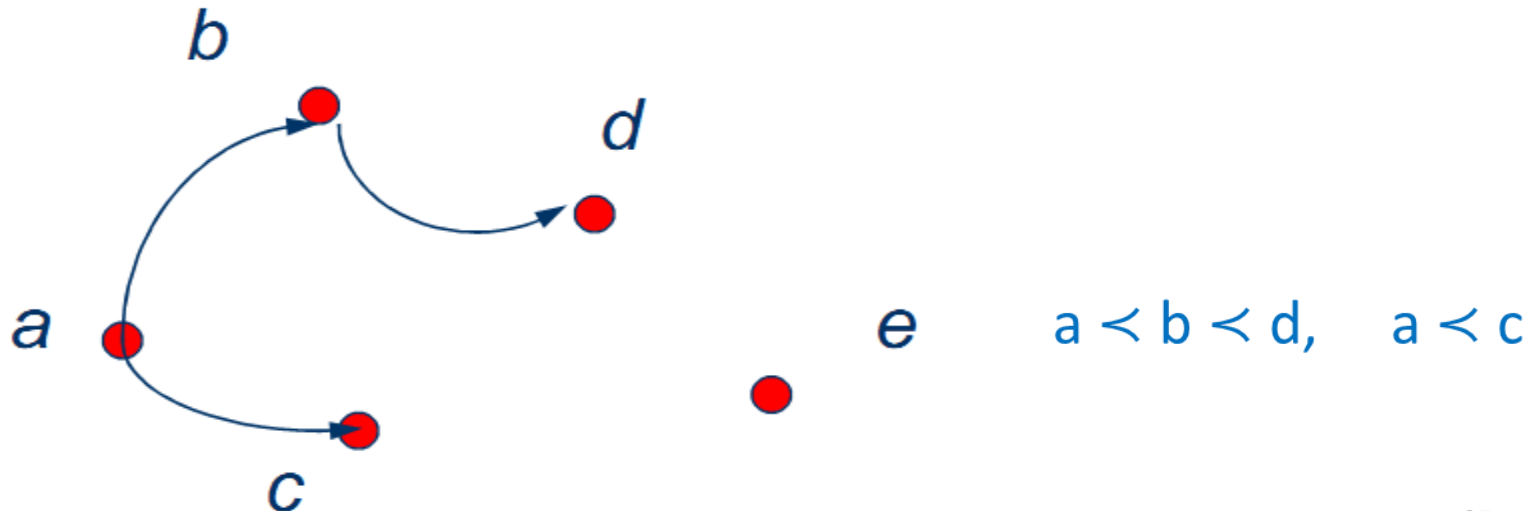
Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Ta định nghĩa *Biểu đồ Hasse* của poset $(S, <)$ là đồ thị:

Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.

Nếu b là trội trực tiếp của a thì vẽ một cung đi từ a đến b .



Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Ví dụ. Biểu đồ Hasse của poset $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ có thể vẽ như sau

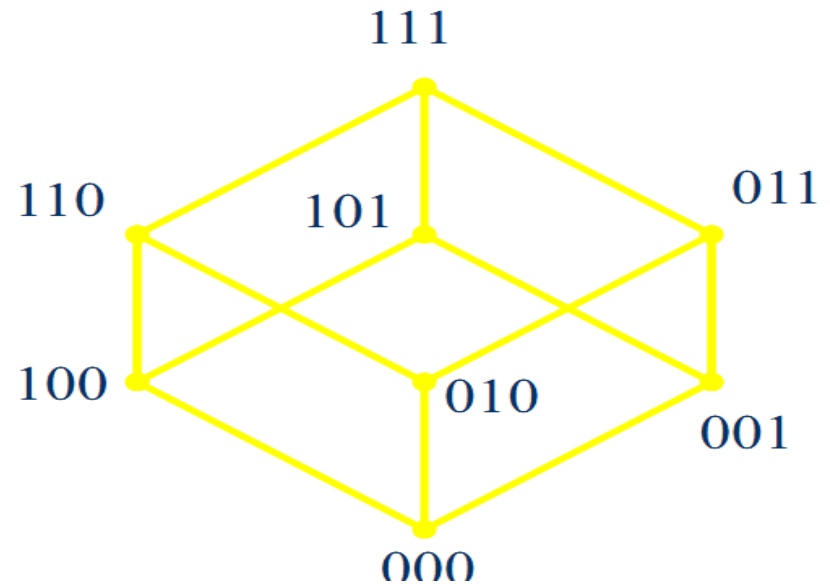
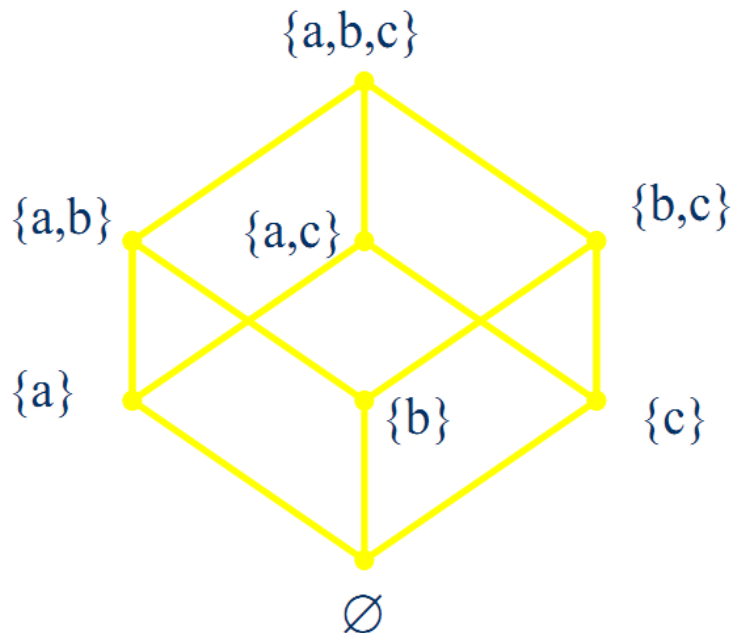


Chú ý . Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Ví dụ: Biểu đồ Hasse của $P(\{a,b,c\})$ và biểu đồ Hasse của các chuỗi bit độ dài 3 với thứ tự từ điển.



Giống nhau không!!!

Quan hệ thứ tự

4. Phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Định nghĩa: Một phần tử a trong tập sắp thứ tự $(S, <)$ được gọi là:

Phần tử nhỏ nhất nếu $\forall x \in S$ ta có $a < x$.

Phần tử lớn nhất nếu $\forall x \in S$ ta có $x < a$.

Nhận xét: Phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của một tập hợp (nếu có) là duy nhất. Ta kí hiệu phần tử của tập hợp S là $\min(S)$, và kí hiệu phần tử lớn nhất của S là $\max(S)$.

Ví dụ: Trong tập có thứ tự (S, \leq) , $S = \{m \in \mathbf{Z} \mid m^2 < 100\}$ có $\min(S) = -9$, $\max(S) = 9$.

Trong tập có thứ tự (A, \leq) , $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 100\}$ không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.

Cho tập B , ta biết $(P(B), \subset)$ là tập có thứ tự. Với thứ tự này thì $\min(P(B)) = \emptyset$, $\max(P(B)) = B$.

Quan hệ thứ tự

4. Phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Định nghĩa: (Thứ tự tốt)

Một tập hợp có thứ tự được gọi là có thứ tự tốt (hay được sắp tốt) nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ:

- Tập hợp có thứ tự (\mathbf{N}, \leq) là một tập hợp được sắp tốt.
- Tập hợp có thứ tự (\mathbf{Z}, \leq) không phải là một tập hợp được sắp tốt vì \mathbf{Z} không có phần tử nhỏ nhất.

Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối thiểu và phần tử tối đại.

Định nghĩa: Một phần tử a trong tập sắp thứ tự $(S, <)$ được gọi là:

Phần tử tối thiểu nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $x < a$.

Phần tử tối đại nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $a < x$.

Nhận xét:

- Phần tử tối thiểu (tối đại) của một tập có thứ tự không nhất thiết là duy nhất.

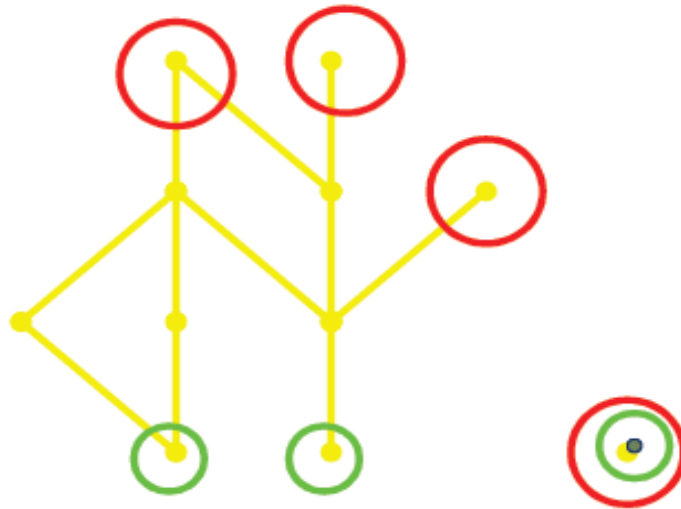
Ví dụ: Xét tập $S = \{1, 2, 3\}$ với quan hệ R cho bởi $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2)\}$. Dễ dàng kiểm chứng rằng (S,R) là tập có thứ tự. Với thứ tự R này, S có hai phần tử tối thiểu là 1 và 3.

- Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập có thứ tự, nếu có, là phần tử tối đại (tối thiểu) duy nhất của tập hợp đó.

Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Ví dụ: Xét poset có biểu đồ Hasse dưới đây:



Mỗi đỉnh màu đỏ là **tối đại**.

Mỗi đỉnh màu xanh là **tối tiểu**.

Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.

Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.

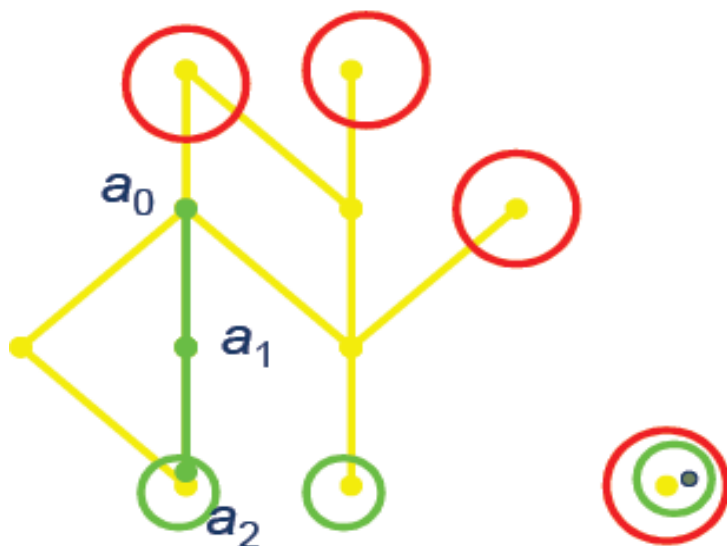
Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Chú ý: Trong một poset S hữu hạn, phần tử tối tiểu và phần tử tối đại luôn luôn tồn tại. A_1 ,

Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$. Nếu a_0 không là phần tử tối tiểu thì $\exists a_1 \in S: a_1 < a_0$. Tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu.

Phần tử tối đại cũng tìm được bằng phương pháp tương tự.

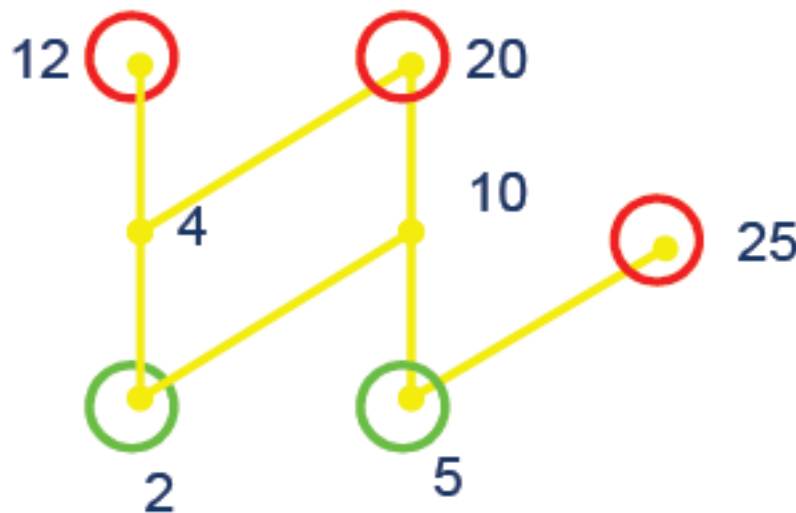


Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$?

Giải: Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu. Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.



Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Ví dụ: Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset các chuỗi bit độ dài 3?

Giải: Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 111 là phần tử tối đại duy nhất và 000 là phần tử tối tiểu duy nhất.

111 là phần tử lớn nhất và
000 là phần tử nhỏ nhất
theo nghĩa:

$$000 < abc < 111$$

Với mọi chuỗi abc

