

ĐỒ THỊ PHẪNG

Bài toán ba nhà máy

- Bài toán: Trong một thị trấn có ba biệt thự và ba nhà máy cung cấp: điện, nước và khí đốt.

Mỗi biệt thự đều muốn mắc đường cáp điện ngầm, đường ống cấp nước, đường ống cấp khí đốt riêng từ nhà mình đến ba nhà máy mà không gặp đường ống của các biệt thự khác.

Hỏi rằng có làm được những đường đi như thế hay không?

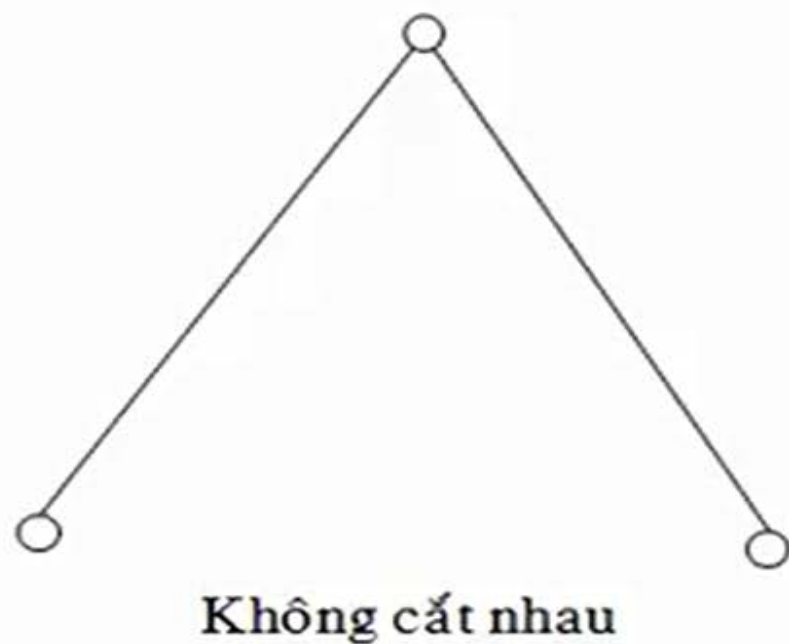
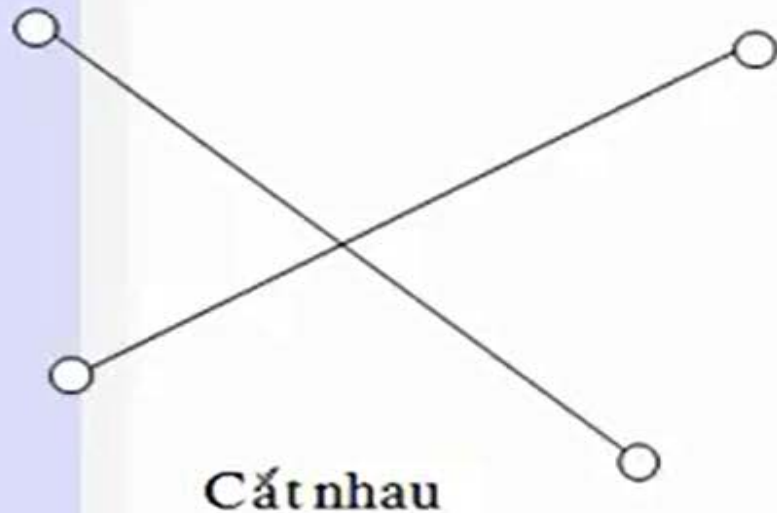
Định nghĩa

- Đồ thị phẳng

- Một đồ thị vô hướng G được gọi là phẳng nếu tồn tại một cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.
- Khi G là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ G trong mặt phẳng (sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau) được gọi là một biểu diễn phẳng của G .

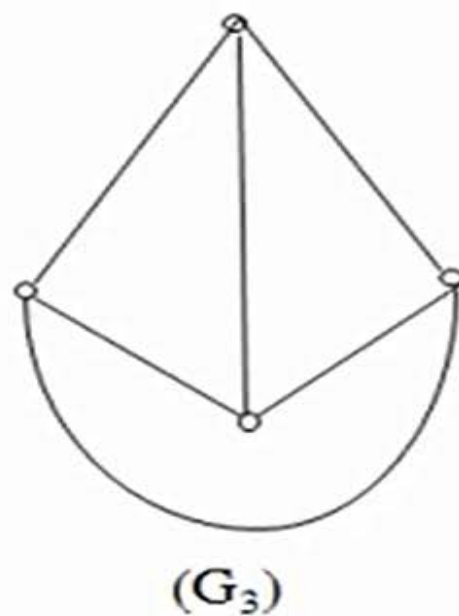
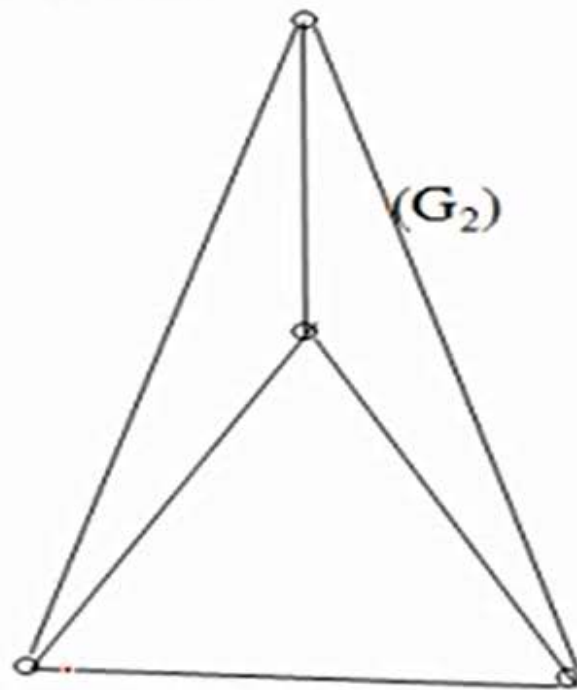
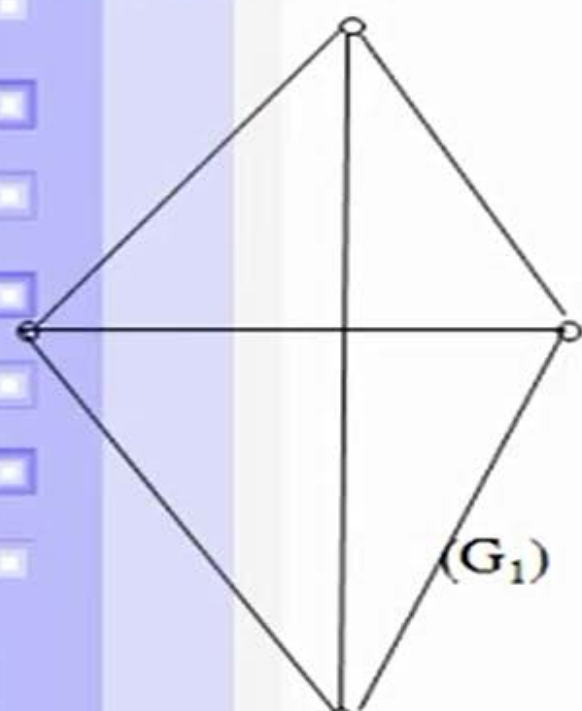
Định nghĩa

- Ghi chú: hai cạnh có chung một đỉnh được quy ước là không cắt nhau



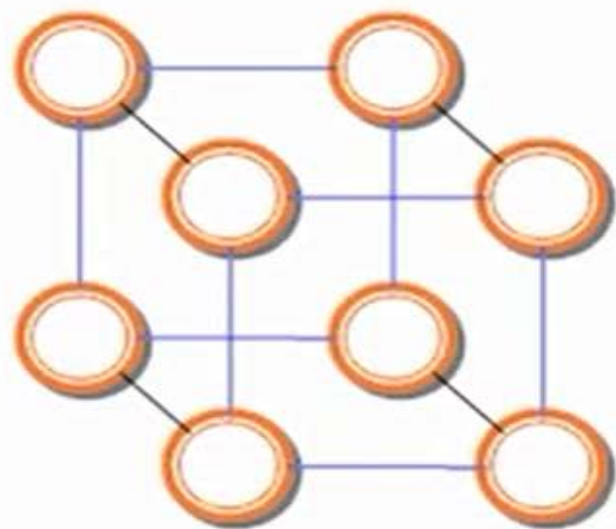
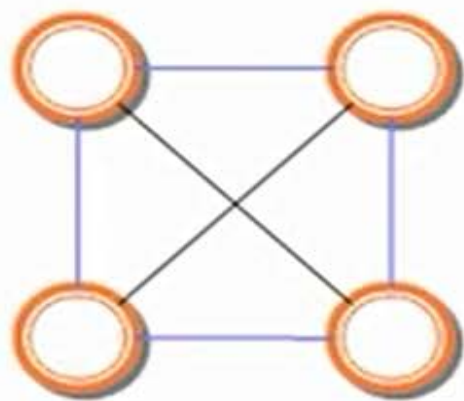
Định nghĩa

- Ví dụ
- Đồ thị (G_1) là đồ thị phẳng và các đồ thị (G_2) , (G_3) là các biểu diễn phẳng của (G_1) .



Một số ví dụ

- Các đồ thị sau có phải là đồ thị phẳng?

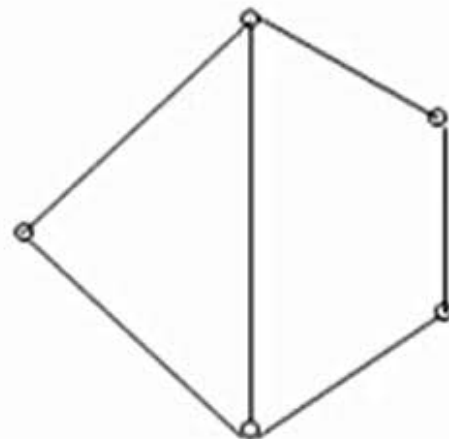
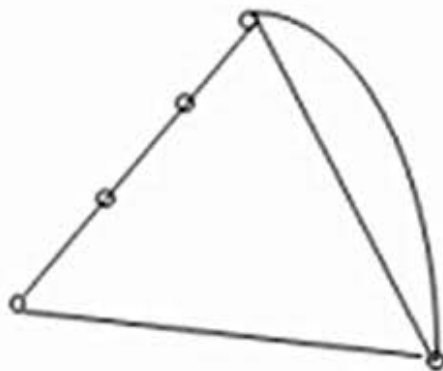
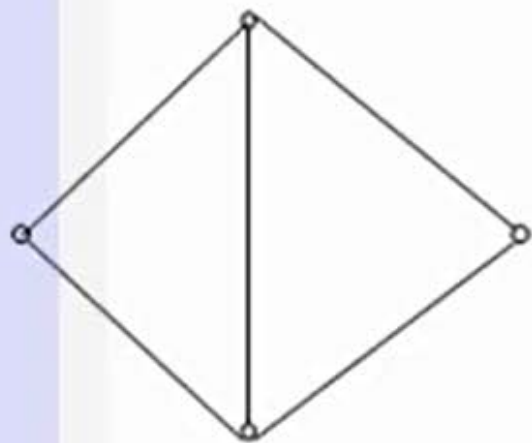


Định nghĩa

- (b) Phép biến đổi đồng phôi
- Thêm vào 1 đỉnh nằm trên 1 cạnh hay gộp 2 cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành 1 cạnh.
- (c) Đồ thị đồng phôi
- Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi.
- Định lý: Nếu G là một đồ thị phẳng thì ta có thể tìm một đồ thị G_1 đồng phôi với G sao cho có thể vẽ G_1 bằng cách chỉ dùng các đoạn thẳng.

Định nghĩa

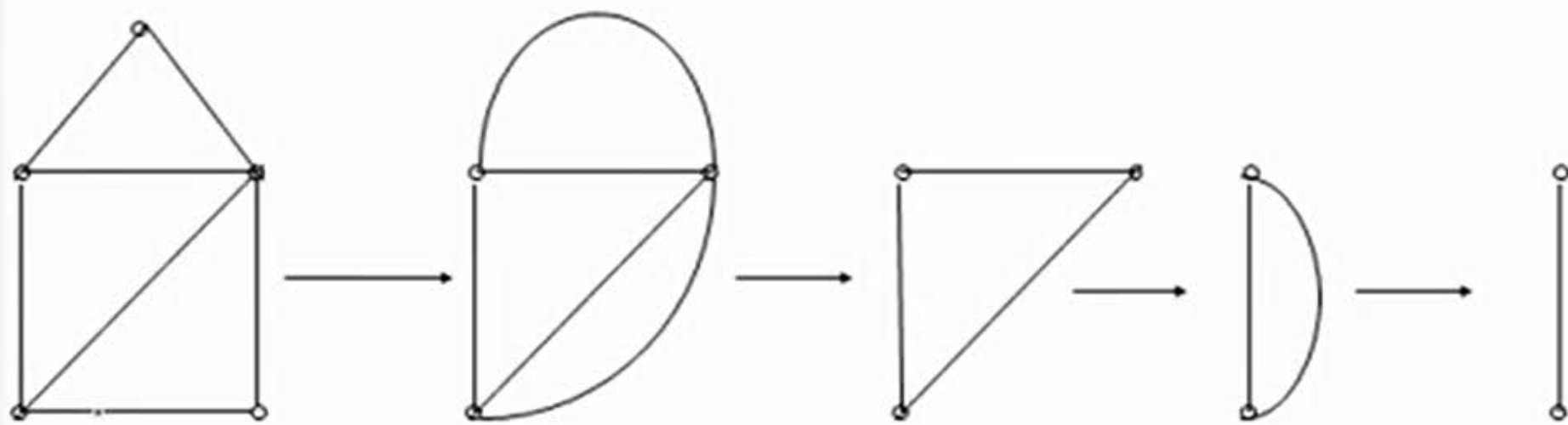
- Các đồ thị sau đây đồng phôi



Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

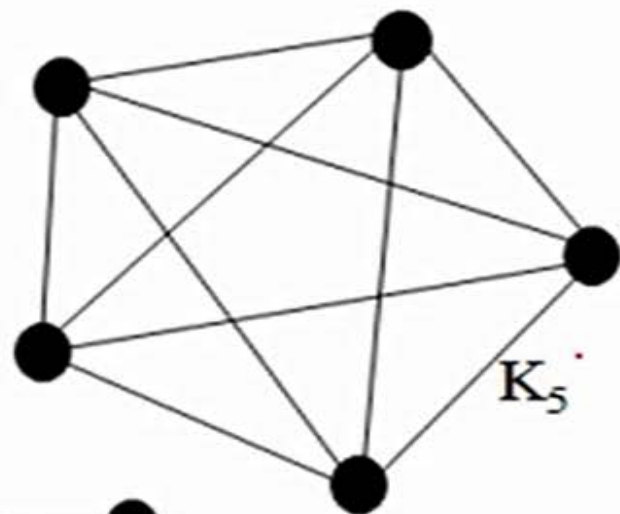
- Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:
- Bỏ đi các khuyên
- Bỏ bớt các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh).
- Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

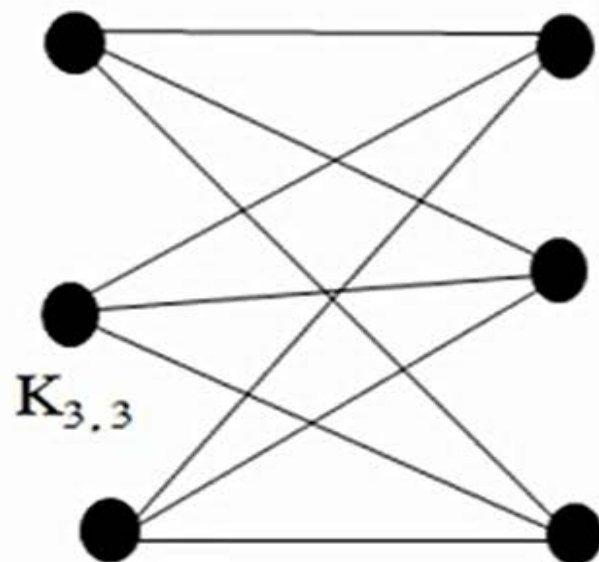


Định lý Kuratowski

- Định lý 1: Đồ thị đủ K_5 không phẳng.



- Định lý 2: Đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$ không phẳng.



Định lý Kuratowski

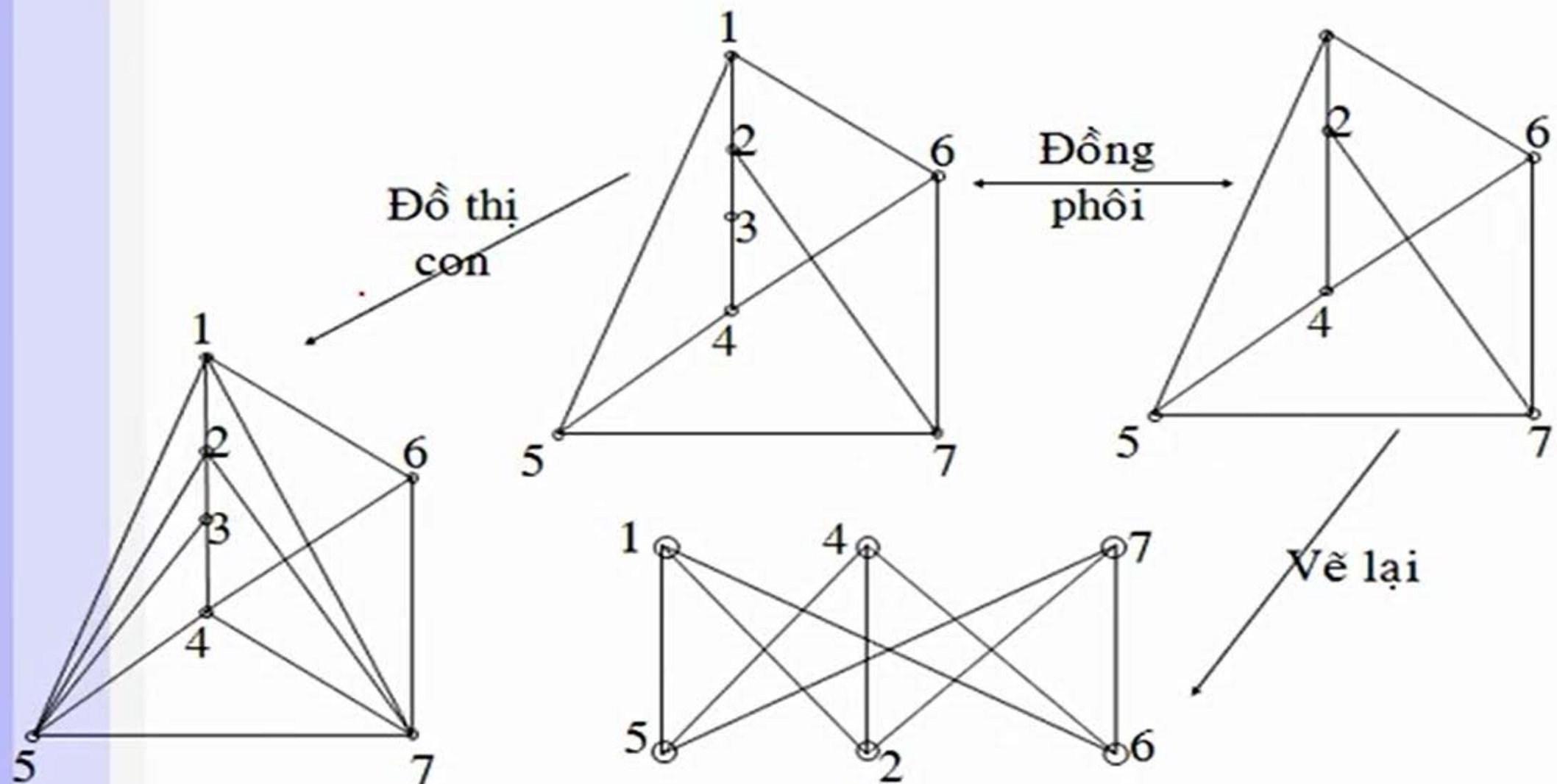
- Nhận xét: hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau
- Nếu xóa đi 1 đỉnh hay 1 cạnh của 2 đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
- Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
- Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.

Định lý Kuratowski

■ Định lý 3.

- Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có tính phẳng là G không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hay $K_{3,3}$.

Định lý Kuratowski



Công thức Euler

- Định lý: Cho G là đồ thị phẳng, liên thông gồm n đỉnh, e cạnh. Giả sử G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler):

$$f = e - n + 2$$

$$(n - e + f = 2)$$

- Hệ quả: Nếu G là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh (với $e > 2$). Giả sử G chia mặt phẳng ra thành f vùng. Ta có:

$$e \geq (3/2)f$$

$$e \leq 3n - 6$$

Công thức Euler

- Ví dụ, áp dụng hệ quả này để chứng minh tính không phẳng của K_5 . K_5 là đồ thị đơn và liên thông có $v=5$ và $e=10$, ta có $e=10 > 9=3v-6$ do đó K_5 không phẳng (chú ý rằng đảo lại nếu một đồ thị thỏa mãn $e \leq 3v - 6$ thì chưa chắc là đồ thị phẳng, $K_{3,3}$ là một ví dụ).

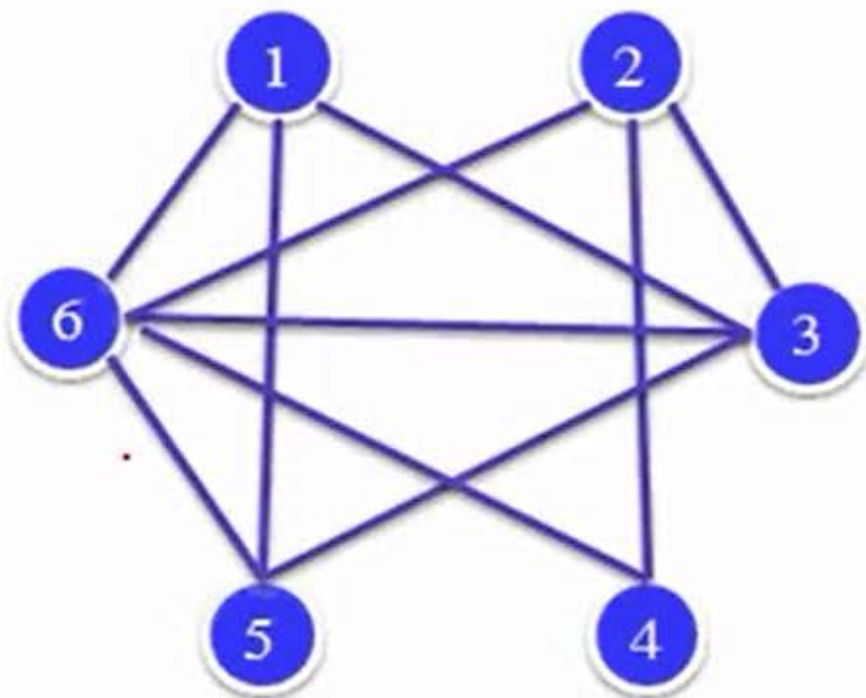
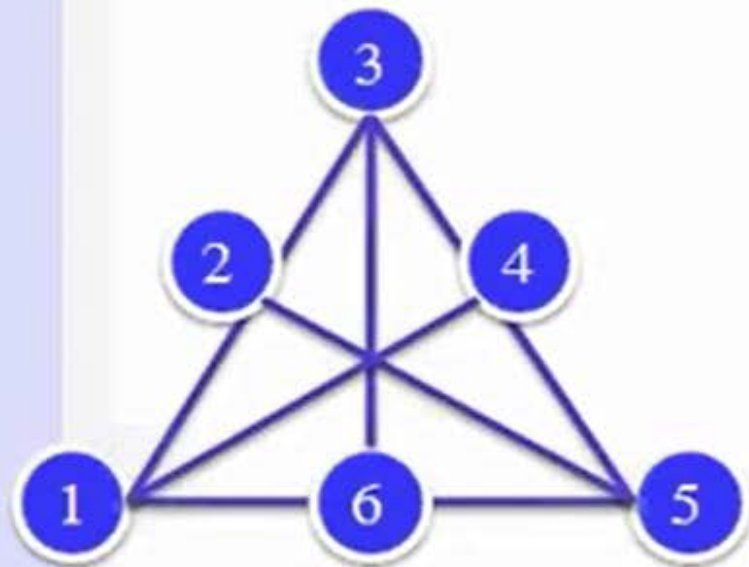
Công thức Euler tổng quát

- Cho G là đồ thị phẳng, gồm n đỉnh, e cạnh, p thành phần liên thông. Giả sử G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler tổng quát):

$$n - e + f = p + 1$$

Bài tập

1. Xác định các đồ thị sau đây có phẳng hay không? Nếu phẳng, hãy vẽ lại để các cạnh không cắt nhau.



Bài tập

2. Giả sử đồ thị liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?
3. Đồ thị nào trong số các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất: bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra đồ thị phẳng?
a) K_5 ; b) K_6 ; c) $K_{3,3}$ d) $K_{3,4}$