

CHƯƠNG 6:**TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ LÝ THUYẾT BỀN****I. Các định nghĩa.****1. Trạng thái ứng suất.**

Vật thể khi chịu tác dụng của ngoại lực thì bên trong sẽ phát sinh ứng suất. Ta thấy trong trường hợp tổng quát, ứng suất tại những điểm khác nhau có giá trị khác nhau. Ngay cả khi khảo sát tại một điểm thì ứng suất trên các mặt cắt π (trên hình 6.1) khác nhau đi qua điểm đó cũng sẽ khác nhau.

Tập hợp tất cả những ứng suất trên mọi mặt cắt ngang đi qua điểm khảo sát được gọi là trạng thái ứng suất tại điểm đó.

Như vậy, để xác định trạng thái ứng suất tại một điểm nào đó thì ta phải xác định ứng suất trên tất cả các mặt cắt có thể đi qua điểm đó. Muốn thế thì ta phải xác định được ứng suất trên mặt nghiêng bất kỳ.

Những ứng suất của một trạng thái ứng suất tại một điểm có mối liên hệ với nhau. Để nghiên cứu những ứng suất đó, ta tưởng tượng tách tại điểm khảo sát một phần tử hình hộp lập phương có kích thước vô cùng bé. Ứng suất tác dụng trên các mặt của hình hộp được phân thành các thành phần song song với các cạnh của hình hộp đó.

Gắn một hệ trục tọa độ sao cho các trục song song với các cạnh của hình hộp lập phương. Trên các mặt của phần tử sẽ có chín thành phần ứng suất gồm ba ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ và sáu ứng suất tiếp $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (hình 6.2). Các thành phần ứng suất này đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại một điểm, chúng lập thành một đại lượng được gọi là tenxơ ứng suất ký hiệu T_σ , viết dưới dạng ma trận như sau:

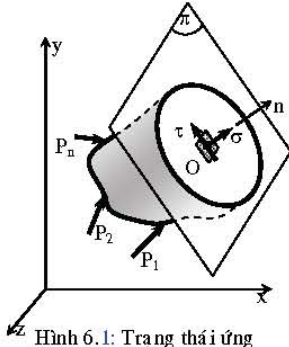
$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp (5.14) cho ta các quan hệ:

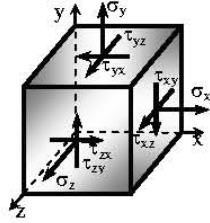
$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|; |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|; |\tau_{zx}| = |\tau_{xz}| \quad (6.1).$$

Do đó trong chín thành phần ứng suất trên các mặt của phần tử thì chỉ có sáu thành phần ứng suất là độc lập tuyến tính.

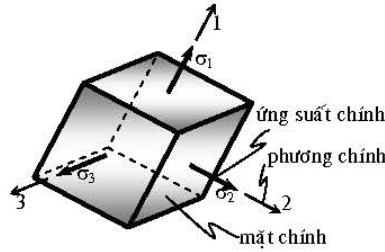
Các ứng suất pháp được ký hiệu kèm theo một chỉ số để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt; các ứng suất tiếp ký hiệu kèm theo hai chỉ số, chỉ số chỉ số thứ nhất dùng để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt còn chỉ số thứ hai để chỉ phương của ứng suất đó.



Hình 6.1: Trạng thái ứng suất tại một điểm.



Hình 6.2: Trạng thái ứng suất tổng quát.



Hình 6.3: Phân tố chính.

2. Mặt chính, phương chính, ứng suất chính, phân tố chính.

Trong lý thuyết đàn hồi, người ta chứng minh được rằng tại một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực, bao giờ cũng tìm được ba mặt tương hỗ vuông góc với nhau mà trên ba mặt đó các thành phần ứng suất tiếp bằng không. Những mặt đó được gọi là mặt chính.

Phương pháp tuyến của mặt chính được gọi là phương chính.

Ứng suất pháp tác dụng trên các mặt chính được gọi là ứng suất chính và được ký hiệu là σ_1 , σ_2 , σ_3 theo quy ước $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ về giá trị đại số.

Ba phương chính lập thành một hệ trục Descartes gọi là hệ tọa độ chính và phân tố hình hộp lấy tại điểm khảo sát, có các mặt trùng với những mặt chính được gọi là phân tố chính xem hình 6.3.

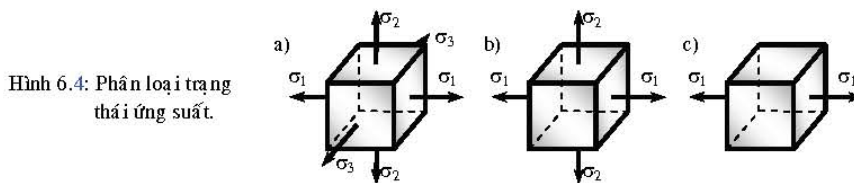
3. Phân loại trạng thái ứng suất.

Một trạng thái ứng suất được đặc trưng bởi ba ứng suất chính. Tùy theo sự tồn tại của các ứng suất chính này mà chia ra các loại của trạng thái ứng suất.

Nếu cả ba ứng suất chính đều khác không, điểm đó ở trạng thái ứng suất khối (hình 6.4a).

Nếu có một ứng suất chính bằng không, điểm đó ở trạng thái ứng suất phẳng (hình 6.4b).

Nếu có hai ứng suất chính bằng không, điểm đó ở trạng thái ứng suất đơn (hình 6.4c).



Hình 6.4: Phân loại trạng thái ứng suất.

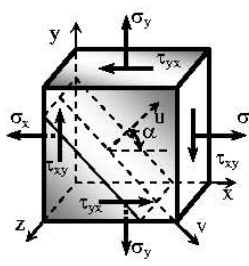
Trạng thái ứng suất đơn đã được khảo sát ở chương thanh chịu kéo-nén đúng tâm. Sau đây chúng ta chỉ nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng, còn trạng thái ứng suất khối ta chỉ trình bày những khái niệm cơ bản.

II. Trạng thái ứng suất phẳng.

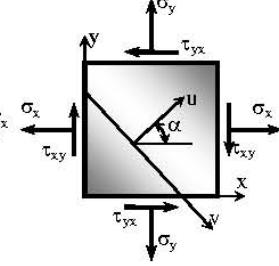
1. Trạng thái ứng suất phẳng tổng quát.

Xét một điểm nào đó thuộc vật thể có trạng thái ứng suất phẳng, nghĩa là có một ứng suất chính bằng không. Tách từ điểm đó một phân tố hình hộp lập phương có một mặt trùng với mặt chính với ứng suất chính bằng không và chọn hệ trục tọa độ xyz có trục z vuông góc với mặt chính đó, lúc này $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$. Trên những mặt còn lại (không phải là mặt chính) của phân tố sẽ có những ứng suất σ_x , σ_y , τ_{xy} và τ_{yx} . Trạng thái ứng suất như thế được gọi là trạng thái ứng suất phẳng tổng quát và được biểu diễn trên hình 6.5. Hai mặt chính còn lại vuông góc với mặt chính đã biết và song song với trục z.

Dấu của ứng suất được quy ước: ứng suất pháp dương khi hướng ra ngoài mặt cắt, ứng suất tiếp dương khi đi quanh phân tố theo chiều kim đồng hồ.



Hình 6.5: Trạng thái ứng suất phẳng.



Hình 6.6: Ứng suất trên mặt cắt nghiêng.

2. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng.

Cắt phần tử khảo sát trên hình 6.5 bằng mặt cắt nghiêng song song với trục z và xét sự cân bằng của phần phân tử như trên hình 6.6. Gọi u và v là các trục pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt cắt nghiêng đó, trục u hợp với trục x một góc α chiều dương qui ước ngược chiều kim đồng hồ tính từ trục x . Gọi ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt nghiêng là σ_u và τ_{uv} . Nếu đã biết ứng suất trên các mặt của phần tử là $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$, ta cần xác định các ứng suất trên mặt nghiêng σ_u và τ_{uv} .

Lập phương trình cân bằng hình chiếu lên các phương u và v cho ta:

$$\sum U = 0 \Leftrightarrow \sigma_u S_{(BCFE)} - \sigma_x S_{(ABED)} \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} S_{(ABED)} \cdot \sin \alpha - \sigma_y S_{(ADFC)} \cdot \sin \alpha + \tau_{yx} S_{(ADFC)} \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$\sum V = 0 \Leftrightarrow \tau_{uv} S_{(BCFE)} - \sigma_x S_{(ABED)} \cdot \sin \alpha - \tau_{xy} S_{(ABED)} \cdot \cos \alpha + \sigma_y S_{(ADFC)} \cdot \cos \alpha + \tau_{yx} S_{(ADFC)} \cdot \sin \alpha = 0.$$

Để ý: $S_{(ABED)} = S_{(BCFE)} \cdot \cos \alpha$; $S_{(ADFC)} = S_{(BCFE)} \cdot \sin \alpha$; $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$; $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$;

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ sau khi biến đổi rút gọn ta được:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (6.2).$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (6.3).$$

3. Bất biến của trạng thái ứng suất phẳng.

Xét mặt có pháp tuyến v vuông góc với phương u và hợp với phương x một góc $\alpha - 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2(\alpha - 90^\circ) - \tau_{xy} \sin 2(\alpha - 90^\circ) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (6.4).$$

Thực hiện phép cộng σ_u ở (6.2) và σ_v ở (6.4) ta được: $\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \quad (6.5).$

Vậy tại một điểm, tổng ứng suất pháp trên hai mặt vuông góc với nhau là một hằng số và gọi là bất biến của trạng thái ứng suất phẳng.

4. Cực trị của ứng suất pháp và giá trị ứng suất chính.

Từ (6.2) ta nhận thấy ứng suất pháp là một hàm của góc α , do đó ứng suất pháp đạt cực trị khi:

$$\frac{d\sigma_u}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) = 0 \quad (a).$$

Để tìm phương chính theo định nghĩa của nó ta cho:

$$\tau_{uv} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0, \text{ tìm lại được điều kiện (a).}$$

Vậy ứng suất chính là ứng suất pháp cực trị.

Giải điều kiện trên ta tìm được phương chính:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \pm k\pi \Rightarrow \alpha_1 = \beta, \alpha_2 = \beta \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ta thấy hai mặt chính vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt chính đã biết.

Để ý: $\sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$; $\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$ thay vào (6.2) sẽ có ngay hai giá trị của

ứng suất chính, đồng thời là ứng suất cực trị:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (6.6).$$

Từ (6.6) thực hiện phép cộng giữa hai giá trị σ_{\max} và σ_{\min} ta cũng tìm lại được (6.5).

5. Cực trị của ứng tiếp.

Từ (6.3) ứng suất tiếp đạt cực trị khi:

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

(6.3) ta được:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (6.7).$$

Pháp tuyến của mặt có ứng suất tiếp cực trị hợp với phương chính một góc

$$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

III. Vòng tròn Mohr ứng suất.

1. Phương trình vòng tròn Mohr.

Khử tham số α trong 2 phương trình (6.2) và (6.3) bằng cách:

Chuyển $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ở phương trình (6.2) sang vế trái; bình phương hai vế của hai phương trình:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \right)^2.$$

$$\tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)^2.$$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được: $\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2.$

Đây là phương trình vòng tròn trong hệ trục (σ_u, τ_{uv}) với:

Tâm $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Vòng tròn này được gọi là vòng tròn

Mohr của trạng thái ứng suất phẳng.

2. Cách dựng vòng tròn Mohr.

Dựng hệ trục tọa độ vuông góc $\sigma_u - \tau_{uv}$.

Lấy hai điểm A và B trên trục hoành σ có hoành độ là σ_x, σ_y (giả sử $\sigma_x > \sigma_y$).

Dựng trung điểm của đoạn AB chính là tâm C của vòng tròn.

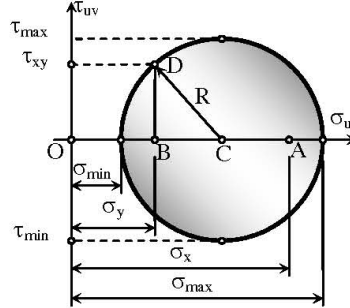
LÊ THANH PHONG

Dựng điểm $D(\sigma_y, \tau_{xy})$ gọi là điểm cực. Vòng tròn có tâm C bán kính CD là vòng tròn cần

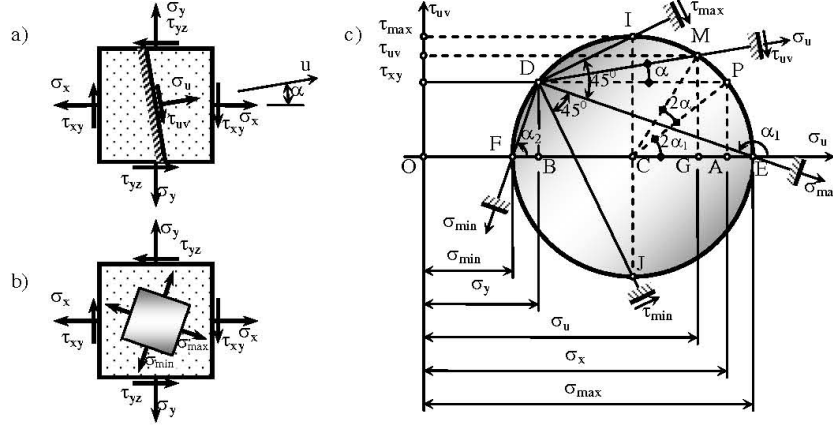
dựng. $CD^2 = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ là bán kính R của vòng tròn. Với tâm C , bán

kính R ta dựng được vòng tròn Mohr như trên hình 6.7.

Hình 6.7: Dựng vòng tròn Mohr ứng suất.



3. Tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng.



Hình 6.8: Ứng suất trên mặt cắt nghiêng.

Xét phân tố chịu các ứng suất trên các bề mặt như hình 6.8a. Ta dựng được vòng tròn Mohr ứng suất như trên hình 6.8c. Mỗi điểm trên vòng tròn Mohr ứng suất tương ứng với ứng suất trên một mặt cắt nghiêng nào đó. Từ điểm cực D kẻ đường thẳng song song với phương pháp tuyến của mặt cắt nghiêng hợp với trục hoành một góc α , cắt vòng tròn Mohr tại điểm M . Hoành độ của điểm M là trị số ứng suất pháp σ_u và tung độ là trị số của ứng suất tiếp τ_{uv} .

Ta có thể chứng minh hoành độ OG và tung độ GM có trị số σ_u và τ_{uv} (xem hình 6.8c).

$$\begin{aligned} OG = OC + CG &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CM \cos(2\alpha_1 + 2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CP \cdot \cos(2\alpha_1 + 2\alpha) = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CP \cdot \cos 2\alpha_1 \cdot \cos 2\alpha - CP \cdot \sin 2\alpha_1 \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Để ý: $CP \cdot \cos 2\alpha_1 = CA = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ và $CP \cdot \sin 2\alpha_1 = AP = \tau_{xy}$. Ta có:

$$OG = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha = \sigma_u.$$

Tương tự ta có $GM = CM \cdot \sin(2\alpha_1 + 2\alpha) = CM \cdot \sin 2\alpha_1 \cos 2\alpha + CM \cdot \cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha$.

Vì $CM = CP$.

$$\text{Nên } CM \cdot \sin 2\alpha_1 = CP \cdot \sin 2\alpha_1 = AP = \tau_{xy} \text{ và } CM \cdot \cos 2\alpha_1 = CP \cdot \cos 2\alpha_1 = CA = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.$$

$$\text{Do đó: } GM = \tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \tau_{uv}.$$

4. Phương chính, ứng suất chính, cực trị của ứng suất.

Muốn tìm phương của các ứng suất chính và ứng suất tiếp cực trị, ta kẻ các tia DA , DF , DI và DJ (hình 6.8c). Các mặt có ứng suất chính tác dụng được vẽ trên phân tố đã cho (hình 6.8b).

Ta thấy các mặt có ứng suất tiếp cực trị τ_{\max} , τ_{\min} hợp thành một góc 45° với các mặt chính.

Các phương chính α_1 và α_2 được xác định từ vòng tròn Mohr:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = -\frac{BD}{BE} = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BD}{BF} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}}.$$

Các ứng suất chính:

$$\sigma_{\max/\min} = OC \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.8).$$

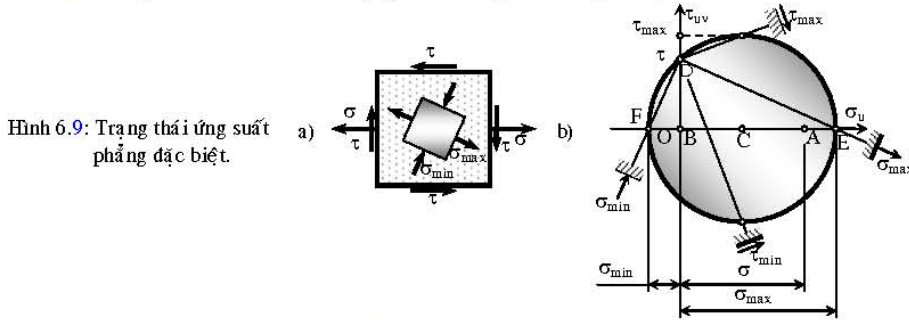
Các ứng suất tiếp cực trị:

$$|\tau|_{\max/\min} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (6.9).$$

5. Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt, trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

a-Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt.

Trên phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng, nếu có một ứng suất pháp bằng không (giả sử $\sigma_y = 0$) thì được gọi là trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt. Ta ký hiệu: $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$ như trên hình 6.9a. Vòng tròn Mohr của trạng thái ứng suất này được vẽ trên hình 6.9b.



Các ứng suất pháp cực trị tính theo (6.6):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (6.10).$$

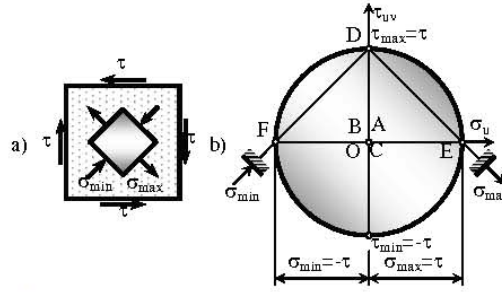
Các ứng suất tiếp cực trị tính theo (6.7):

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (6.11).$$

b-Trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Trên phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng, nếu các mặt bên của phân tố chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp thì được gọi là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Ta ký hiệu: $\tau_{xy} = \tau$ (hình 6.10a). Vòng tròn Mohr của trạng thái ứng suất này được vẽ trên hình 6.10b.

Hình 6.10: Trạng thái ứng suất trượt thuần túy.



Các ứng suất pháp cực trị tính theo (6.6):

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \tau \quad (6.12).$$

Các ứng suất tiếp cực trị tính theo (6.7):

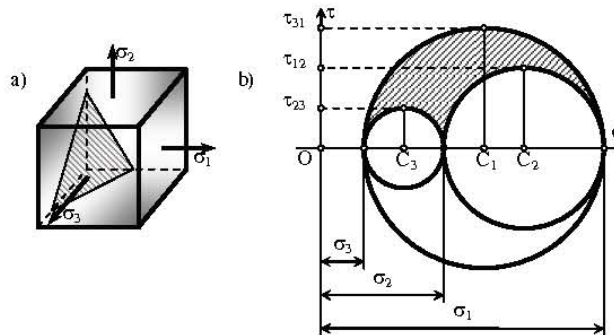
$$\tau_{\max/\min} = \pm \tau \quad (6.13).$$

Các phương chính hợp với bề mặt của phân tố các góc 45° .

IV. Khái niệm về trạng thái ứng suất khối.

Trong trường hợp tổng quát, trạng thái ứng suất tại một điểm là trạng thái ứng suất khối, nghĩa là cả ba ứng suất chính σ_1 , σ_2 và σ_3 đều khác không. Tương ứng với các cặp ứng suất (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) và (σ_3, σ_1) ta vẽ được ba vòng tròn Mohr ứng suất với tâm là C_1 , C_2 và C_3 như hình 6.11b.

Hình 6.11: Trạng thái ứng suất khối.

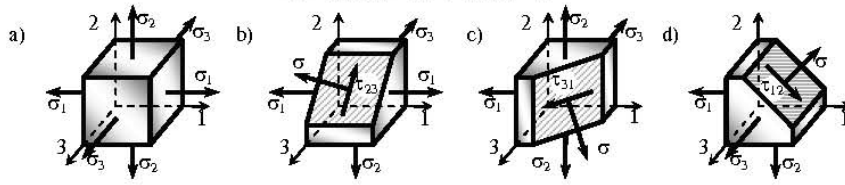


Xét mặt cắt nghiêng nào đó cắt qua phân tố (mặt gạch chéo trên hình 6.11a), trên mặt này sẽ có ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh được rằng ứng suất trên mặt cắt nghiêng đó tương ứng với một điểm nằm trong miền gạch chéo giới hạn bởi ba vòng tròn ứng suất trên hình 6.11b. Nếu ký hiệu các ứng suất tiếp cực trị là τ_{31} , τ_{12} và τ_{23} thì từ hình 6.11b ta có:

$$\tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (6.14).$$

Những điểm nằm trên chu vi của các vòng tròn tương ứng với ứng suất trên các mặt song song với ứng suất còn lại, các ứng suất tiếp cực trị này tác dụng trên các mặt nghiêng góc 45° với hai phương chính tương ứng và song song với phương chính còn lại (hình 6.12). Chẳng hạn τ_{31} tác dụng trên mặt nghiêng góc 45° với σ_1 , σ_3 và song song với σ_2 (hình 6.12c).

LÊ THANH PHONG

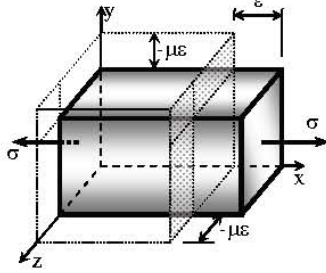


Hình 6.12: Ứng suất trên các mặt song song với phương chính.

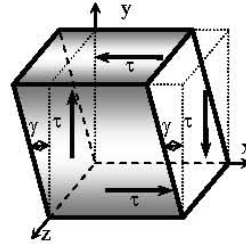
V. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Định luật Hooke.

1. Trạng thái ứng suất đơn.

Đối với trạng thái ứng suất đơn thì phần tử chính chỉ có biến dạng dài (hình 6.13):



Hình 6.13: Biến dạng dọc và biến dạng ngang của phần tử chịu ứng suất đơn.



Hình 6.14: Biến dạng góc của phần tử ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Biến dạng dài theo phương của ứng suất: chẳng hạn phương x trên hình 6.13.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (6.15).$$

Biến dạng dài theo phương vuông góc với phương của ứng suất: phương y, z trên hình 6.13.

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (6.16).$$

2. Trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Ở trạng thái này trên phần tử không có biến dạng dài mà chỉ có biến dạng góc (trượt) trong mặt phẳng tác dụng của ứng suất tiếp: (ví dụ mặt phẳng xy trên hình 6.14). Giữa ứng suất tiếp τ và biến dạng góc γ có quan hệ bậc nhất gọi là định luật Hooke về biến dạng trượt.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (6.17).$$

Với: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$

3. Trạng thái ứng suất tổng quát.

Ở trạng thái ứng suất này trên phần tử có cả biến dạng dài của các cạnh và biến dạng góc của các góc vuông.

Ta thừa nhận: ứng suất pháp chỉ gây ra biến dạng dài, còn ứng suất tiếp chỉ gây ra biến dạng góc trong mặt phẳng tác dụng của ứng suất tiếp.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng: biến dạng do nhiều ứng suất gây ra bằng tổng các biến dạng do từng ứng suất riêng lẻ gây ra.

- Biến dạng dài:

Biến dạng dài theo phương x là một hàm của các ứng suất pháp ký hiệu ε_x : (hình 6.13).

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \varepsilon_x(\sigma_x) + \varepsilon_x(\sigma_y) + \varepsilon_x(\sigma_z).$$

$\varepsilon_x(\sigma_x)$ - Biến dạng dài theo phương x do σ_x gây ra, tính theo (6.15): $\varepsilon_x(\sigma_x) = \frac{\sigma_x}{E}.$

$\varepsilon_x(\sigma_y)$ - Biến dạng dài theo phương x do σ_y gây ra, tính theo (6.16): $\varepsilon_x(\sigma_y) = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$.

$\varepsilon_x(\sigma_z)$ - Biến dạng dài theo phương x do σ_z gây ra, tính theo (6.16): $\varepsilon_x(\sigma_z) = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$.

Tương tự cho các phương còn lại, ta lập được biểu thức của định luật Hooke tổng quát cho biến dạng dài:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}\quad (6.18).$$

Đối với phân tố có các ứng suất chính ta có biểu thức tương tự, khi thay x, y, z bằng 1, 2, 3.

- Biến dạng góc:

Trong từng mặt phẳng, biến dạng góc do ứng suất tiếp tương ứng gây ra: (hình 6.14).

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (6.19).$$

- Biến dạng thể tích tỷ đối: là lượng thay đổi của một đơn vị thể tích, ký hiệu θ .

Gọi thể tích ban đầu của phân tố là dV : $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

Trước và sau biến dạng các cạnh của phân tố thay đổi những lượng:

$dx \rightarrow (dx + \varepsilon_x dx)$; $dy \rightarrow (dy + \varepsilon_y dy)$; $dz \rightarrow (dz + \varepsilon_z dz)$. Do đó nếu gọi thể tích lúc sau của phân tố là dV_l thì: $dV_l = (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz) = dx \cdot dy \cdot dz (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$.

Biến dạng thể tích tương đối θ sẽ là:

$$\theta = \frac{dV_l - dV}{dV} = \frac{dx dy dz (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - dx dy dz}{dx dy dz} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1.$$

Sau khi khai triển và bỏ qua các vô cùng bé bậc cao nhận được:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (6.20).$$

Thay các giá trị biến dạng ở (6.18) vào dẫn đến:

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.21).$$

Định luật Hooke khối: biến dạng thể tích tương đối tỷ lệ với tổng các ứng suất pháp.

Các biểu thức (6.18), (6.19), (6.21) được gọi là định luật Hooke tổng quát.

4. Trạng thái ứng suất phẳng.

Biểu thức biến dạng qua ứng suất:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (6.22).$$

Biểu thức ứng suất qua biến dạng:

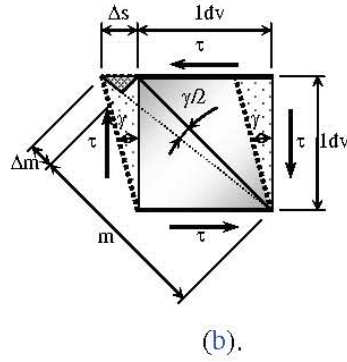
$$\sigma_x = E(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = E(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (6.23).$$

5. Quan hệ giữa các hằng số đàn hồi E, μ , và G.

Xét phân tố phẳng chịu biến dạng trượt thuần túy. Trước và sau biến dạng góc vuông thay đổi một lượng γ , đường chéo của phân tố $m = \sqrt{2}dv$ có biến dạng dài tuyệt đối Δm như trên

hình 6.15. Vì biến dạng bé nên ta có thể viết $\Delta m = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta s$.

Hình 6.15: Quan hệ giữa các hằng số đàn hồi.



Ta có: $\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta s}{2 dv} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta s}{l dv} = \frac{1}{2} \gamma$

Vì phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy nên $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, mặt khác phương chính 1 trùng với đường chéo của phân tố do đó biến dạng dài theo phương này là:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{E}(\tau + \mu\tau) = \frac{1+\mu}{E}\tau = \frac{1+\mu}{E}G\gamma \quad (c).$$

So sánh (b) và (c) ta rút ra quan hệ:

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1+\mu}{E}G\gamma \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (6.24).$$

Như vậy ba hằng số đàn hồi E , G và μ đặc trưng cho tính đàn hồi của vật liệu đẳng hướng có mối liên hệ với nhau. Môđun đàn hồi trượt G xác định theo (6.24) hoàn toàn phù hợp với kết quả thí nghiệm.

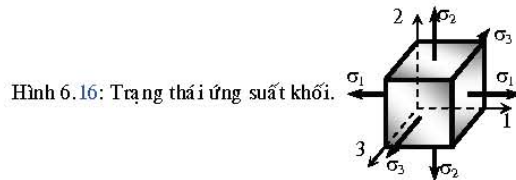
VI. Biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi.

1. Thế năng biến dạng đàn hồi riêng.

Khi phân tố biến dạng, trong mỗi đơn vị thể tích tích lũy một thế năng biến dạng đàn hồi u được gọi là thế năng biến dạng đàn hồi riêng.

Ở trạng thái ứng suất đơn thế năng biến dạng đàn hồi riêng được tính: $u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$.

Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất khối trên hình 6.16 có các ứng suất là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tương ứng với các biến dạng dài $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.



Theo nguyên lý cộng tác dụng, thế năng biến dạng đàn hồi riêng được tính:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) \quad (6.25).$$

Các giá trị $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ được tính theo (6.18):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

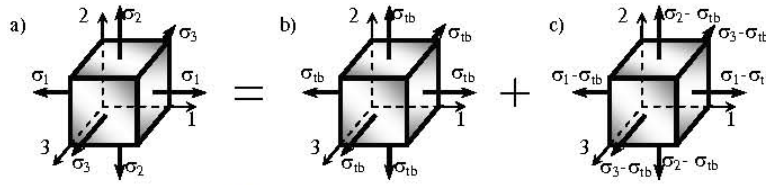
Thế năng biến dạng đàn hồi riêng tính theo ứng suất:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (6.26).$$

2. Thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng.

LÊ THANH PHONG

Với một phân tố ở trạng thái ứng suất khối trên hình 6.17a ta có thể tách ra thành hai phân tố: một phân tố chỉ chịu các ứng suất chính trung bình theo các phương σ_{tb} và một phân tố chịu các ứng suất chính bằng hiệu của các ứng suất chính ban đầu và ứng suất trung bình.



Hình 6.17: Phân tích trạng thái ứng suất khối thành hai trạng thái ứng suất riêng lẻ.

Đối với phân tố chịu các ứng suất kéo hoặc nén đều theo các phương có ứng suất chính là giá trị trung bình của các ứng suất chính ở trạng thái ứng suất ban đầu (hình 6.17b):

$$\sigma_{tb} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Ở trạng thái này, tỷ lệ về kích thước của các cạnh phân tố không thay đổi do đó không có biến dạng về hình dáng mà chỉ có biến dạng về thể tích. Thay trị số của ứng suất chính trung bình này vào (6.26) ta nhận được biểu thức thể năng biến dạng đàn hồi về thể tích cho trạng thái này:

$$u_H = \frac{1}{2E}[\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb})] = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 \quad (6.27).$$

Đối với phân tố còn lại, phân tố chịu các ứng suất chính có giá trị:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_{tb}; \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_{tb}; \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_{tb} \quad (\text{hình 6.17c}).$$

Ta thấy: $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$ do đó, theo (6.23) trạng thái ứng suất này chỉ có biến dạng về hình dáng mà không có biến dạng về thể tích.

Thế năng biến dạng đàn hồi ở trạng thái ứng suất khối trên hình 6.17a tính theo (6.26) là tổng của thế năng biến dạng đàn hồi thể tích trên hình 6.17b tính theo (6.27) và thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng trên hình 6.17c:

$$u = u_H + u_{hd} \Rightarrow u_{hd} = u - u_H.$$

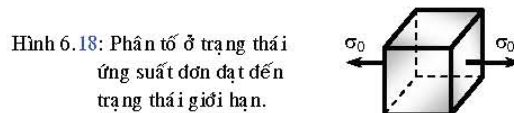
Thay (6.26) và (6.27) vào, biến đổi ta được:

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \quad (6.28).$$

VII. Điều kiện bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp.

1. Độ bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất đơn.

Trạng thái ứng suất đơn sẽ đạt đến trạng thái giới hạn khi ứng suất pháp có giá trị bằng ứng suất nguy hiểm σ_0 (hình 6.18). Do đó, để đánh giá độ bền của trạng thái ứng suất đơn ta chỉ việc so sánh ứng suất pháp với ứng suất nguy hiểm σ_0 , kể thêm hệ số an toàn n .



Hình 6.18: Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn đạt đến trạng thái giới hạn.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}.$$

Trị số ứng suất nguy hiểm σ_0 dễ dàng tìm được từ thí nghiệm kéo hoặc nén đúng tâm, lấy bằng σ_b đối với vật liệu giòn và bằng σ_{ch} hoặc σ_H đối với vật liệu dẻo.

2. Độ bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối.

LÊ THANH PHONG

Trong trường hợp tổng quát, nếu muốn kiểm tra bền cho một điểm thuộc trạng thái ứng suất phức tạp thì ta cũng cần phải có những kết quả thí nghiệm phá hoại những mẫu thử ở trạng thái ứng suất tương tự, nghĩa là tỷ số giữa các ứng suất chính $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ của mẫu thử khi phá hoại và của trạng thái ứng suất tại điểm kiểm tra phải bằng nhau. Việc thí nghiệm này sẽ không khả thi vì hai lý do:

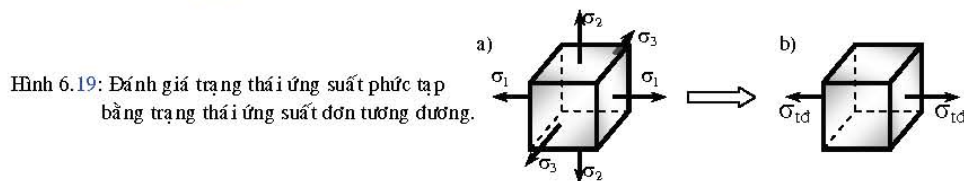
Số lượng thí nghiệm phải nhiều vô cùng thì mới đáp ứng được các tỷ số giữa những ứng suất chính của các trạng thái ứng suất gặp trong thực tế.

Thiết bị dùng để thí nghiệm về trạng thái ứng suất phức tạp không đáp ứng được thực tế và ít phổ biến rộng rãi như thí nghiệm kéo nén theo một chiều.

Để tránh các khó khăn về thực nghiệm đó người ta đưa ra những giả thuyết về nguyên nhân cơ bản gây ra sự phá hoại của vật liệu, các giả thuyết đó được gọi là các thuyết bền.

Có nhiều yếu tố ảnh hưởng đến độ bền của vật liệu như: ứng suất pháp, ứng suất tiếp, biến dạng dài, thế năng biến dạng đàn hồi... và mỗi yếu tố đó đều có thể được chọn làm tiêu chuẩn đánh giá cho độ bền của vật liệu.

Theo một thuyết bền nào đó, vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp trên hình 6.19a sẽ bị phá hoại khi yếu tố mà thuyết bền đó chọn làm nguyên nhân phá hoại đạt tới một giới hạn nào đó về giá trị. Giới hạn đó được xác định dựa vào thí nghiệm phá hoại đối với trạng thái ứng suất đơn trên hình 6.19b.



Có nhiều lý thuyết bền, phạm vi ứng dụng của chúng phụ thuộc vào khả năng phù hợp với thực nghiệm và khả năng áp dụng vào thực tiễn. Ở đây sẽ giới thiệu một số lý thuyết bền xét đến nhân tố là trạng thái ứng suất và vật liệu nghiên cứu làm việc trong miền đàn hồi.

3. Thuyết bền ứng suất pháp (thuyết bền thứ nhất).

Nguyên nhân gây ra sự phá hoại của vật liệu là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới một giới hạn ứng suất nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Trạng thái ứng suất phức tạp có ba ứng suất chính xếp theo thứ tự: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Do đó theo thuyết bền thứ nhất này, ta có điều kiện bền:

$$(\sigma_1, \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Hay viết riêng biệt:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_k; |\sigma_3| \leq [\sigma]_n \quad (6.29).$$

Thuyết bền này ra đời sớm nhất trong các thuyết bền, nhưng trong nhiều trường hợp nó không phù hợp với thực tế. Chẳng hạn, mẫu thử chịu nén đều theo ba phương, trong thực tế vật liệu hầu như không bị phá hoại dù chịu áp lực rất lớn. Thuyết bền này chỉ đúng trong trường hợp phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

4. Thuyết bền biến dạng dài (thuyết bền thứ hai).

Nguyên nhân gây ra sự phá hoại của vật liệu là do trị số lớn nhất của biến dạng dài tương đối của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới một giới hạn nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Gọi ε_1 là trị số lớn nhất của biến dạng dài tương đối của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp, ta có điều kiện bền:

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon_{\text{đơn}}].$$

Theo định luật Hooke về biến dạng dài:

$$\text{Với trạng thái ứng suất khối: } \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

$$\text{Với trạng thái ứng suất đơn: } [\varepsilon_{\text{đơn}}] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Do đó, điều kiện bền theo thuyết bền thứ hai này là:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (6.30).$$

Thuyết bền này cho kết quả tương đối phù hợp với vật liệu dòn.

5. Thuyết bền ứng suất tiếp (thuyết bền thứ ba).

Nguyên nhân gây ra sự phá hoại của vật liệu là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới một giới hạn ứng suất nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Ta có điều kiện bền:

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau_{\text{đơn}}].$$

$$\text{Theo (6.9) hoặc (6.14): } \tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \text{ Theo (5.13): } [\tau_{\text{đơn}}] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Do đó, điều kiện bền theo thuyết bền thứ ba là:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (6.31).$$

Thuyết bền này mặc dù chưa kể đến ảnh hưởng của ứng suất chính thứ hai σ_2 nhưng cho kết quả phù hợp với thực nghiệm hơn hai thuyết bền trên, đặc biệt là vật liệu dẻo. Đối với vật liệu dòn hoặc vật liệu có độ bền kéo và nén khác nhau, thuyết bền này cho kết quả không phù hợp. Trong tính toán cơ khí, thuyết bền này được sử dụng khá phổ biến.

6. Thuyết bền thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng (thuyết bền thứ tư).

Nguyên nhân gây ra sự phá hoại của vật liệu là do trị số lớn nhất của thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới một giới hạn nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Ta có điều kiện bền:

$$u_{\text{hd, phức tạp}} \leq [u_{\text{hd, đơn}}].$$

$$\text{Theo (6.28): } u_{\text{hd, phức tạp}} = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1].$$

$$\text{Đối với trạng thái ứng suất đơn: } u_{\text{hd, đơn}} = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma^2].$$

Do đó, ta có điều kiện bền theo thuyết bền thứ tư:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma] \quad (6.32).$$

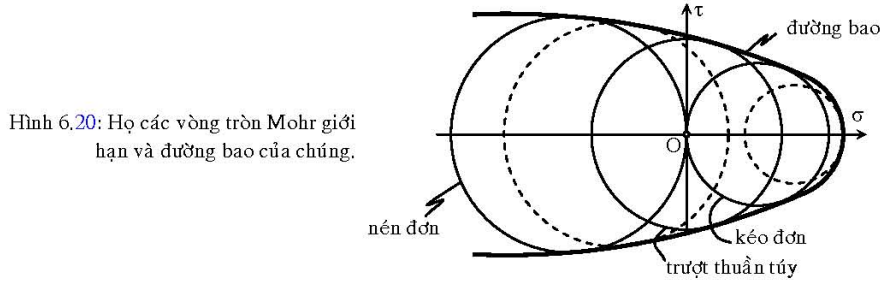
Thuyết này cho kết quả khá phù hợp với vật liệu dẻo. So với thuyết bền ứng suất tiếp cực đại, nó còn kể đến ứng suất chính thứ hai σ_2 . Thuyết bền thứ tư này được sử dụng khá phổ biến trong xây dựng và cơ khí. Tuy vậy, nó vẫn không thích hợp với vật liệu dòn.

7. Thuyết bền Mohr (thuyết bền thứ năm).

Thuyết bền Mohr được xây dựng dựa trên cơ sở kết quả thực nghiệm. Xem mục IV, một trạng thái ứng suất khối có thể biểu thị bằng ba vòng tròn Mohr trong hệ trục $\sigma - \tau$. Gọi những vòng tròn tương ứng với lúc vật liệu ở trạng thái nguy hiểm là vòng tròn giới hạn. Với những kết quả thí nghiệm theo các tỷ số giữa các ứng suất chính $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ khác nhau, ta vẽ được nhiều vòng tròn giới hạn trong hệ trục $\sigma - \tau$. Do ứng suất chính σ_2 ảnh hưởng ít

LÊ THANH PHONG

đến điều kiện bền nên trong ba vòng tròn giới hạn của một trạng thái ứng suất, người ta quan tâm đến vòng tròn lớn gọi là vòng tròn chính được xác định bởi các ứng suất chính σ_1 và σ_3 .



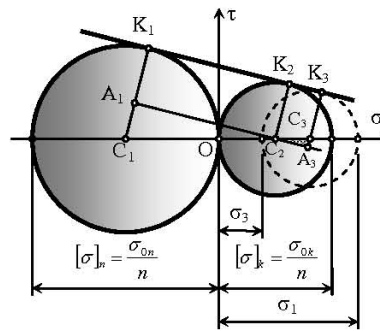
Hình 6.20: Họ các vòng tròn Mohr giới hạn và đường bao của chúng.

Tiến hành nhiều thí nghiệm cho các trạng thái ứng suất khác nhau và tìm được trạng thái giới hạn tương ứng của chúng. Biểu diễn các vòng tròn chính này trong mặt phẳng tọa độ $\sigma - \tau$ ta nhận được một họ các vòng tròn Mohr giới hạn như trên hình 6.20. Đường bao của họ các vòng tròn Mohr này sẽ chia mặt phẳng thành hai miền giới hạn nguy hiểm và không nguy hiểm của vật liệu. Giao điểm của trục hoành và đường bao tương ứng với trạng thái có ba ứng suất chính kéo bằng nhau về trị số.

Nếu một trạng thái ứng suất nào đó có vòng tròn Mohr chính lớn nhất nằm trong đường bao giới hạn thì vật liệu ở trạng thái không nguy hiểm. Nếu vòng tròn Mohr chính tiếp xúc với đường bao giới hạn thì vật liệu ở trạng thái giới hạn nguy hiểm. Nếu vòng tròn Mohr chính cắt đường bao thì vật liệu ở trạng thái bị phá hoại.

Vậy điều kiện bền của một trạng thái ứng suất chính là điều kiện hình học để vòng tròn Mohr chính của trạng thái ứng suất này nằm trong đường bao. Thực tế, việc thí nghiệm để vẽ đường bao thường khó khăn, phức tạp. Để đơn giản hóa, người ta căn cứ vào hai vòng tròn giới hạn kéo và nén theo một phương và vẽ đường cong giới hạn là đường thẳng tiếp tuyến chung của hai vòng tròn đó.

Hình 6.21: Đường bao đơn giản.



Gọi các ứng suất nguy hiểm khi kéo và nén là σ_{0k} và σ_{0n} . Hình 6.21 là đường cong giới hạn đơn giản ở trạng thái cho phép, các vòng tròn giới hạn vẽ từ các ứng suất cho phép. Xét trạng thái ứng suất có các ứng suất chính σ_1 và σ_3 chỉ được phép tiếp xúc với đường cong giới hạn. Từ điều kiện này, ta có thể suy ra điều kiện bền bằng cách xét hai tam giác đồng dạng $C_2A_1C_1$ và $C_2A_3C_3$, ta có:

$$\frac{C_2C_3}{C_2C_1} = \frac{C_3A_3}{C_1A_1}.$$

Trong đó:

$$C_2C_3 = OC_3 - OC_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}[\sigma]_k = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3 - [\sigma]_k);$$

$$C_2C_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n + [\sigma]_k);$$

LÊ THANH PHONG

$$C_3 A_3 = K_3 A_3 - K_3 C_3 = K_2 C_2 - K_3 C_3 = \frac{1}{2} [\sigma]_k - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} ([\sigma]_k - \sigma_1 + \sigma_3);$$

$$C_1 A_1 = K_1 C_1 - K_1 A_1 = K_1 C_1 - K_2 C_2 = \frac{1}{2} [\sigma]_n - \frac{1}{2} [\sigma]_k = \frac{1}{2} ([\sigma]_n - [\sigma]_k).$$

Thay thế các giá trị này vào tỷ lệ thức trên, nhận được điều kiện giới hạn:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3 - [\sigma]_k}{[\sigma]_n + [\sigma]_k} = \frac{[\sigma]_k - \sigma_1 + \sigma_3}{[\sigma]_n - [\sigma]_k}.$$

Sau khi biến đổi, rút gọn ta có: $\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \cdot \sigma_3 = [\sigma]_k.$

$$\text{Hay: } \sigma_1 - \frac{\sigma_{0k}}{\sigma_{0n}} \cdot \sigma_3 = [\sigma]_k.$$

Do đó điều kiện bền được viết là:

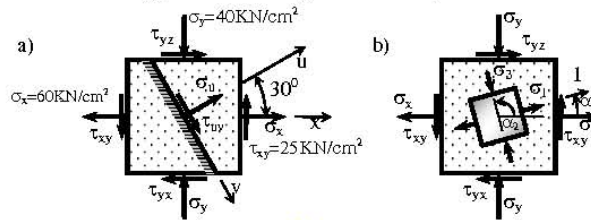
$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{0k}}{\sigma_{0n}} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (6.33).$$

Với vật liệu dẻo thì $\sigma_{0k} = \sigma_{0n}$, lúc này thuyết bền Mohr trùng với thuyết bền ứng suất tiếp cực trị.

Thuyết bền Mohr cho kết quả phù hợp với vật liệu giòn ($\sigma_{0n} > \sigma_{0k}$). Thuyết này có ưu điểm là không đưa vào giả thuyết nào mà căn cứ trực tiếp vào trạng thái giới hạn của vật liệu. Thuyết bền này vẫn bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 và do việc thay đường cong bằng đường thẳng nên cho kết quả chính xác chỉ khi vòng tròn của trạng thái ứng suất khảo sát nằm trong khoảng giữa hai vòng tròn giới hạn kéo và nén.

Ví dụ 6.1.

Cho phần tử ở trạng thái ứng suất phẳng với các ứng suất như hình 6.22. Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến u hợp với phương ngang một góc 30° (hình 6.22a). Xác định phương và trị số của các ứng suất chính (hình 6.22b).



Hình 6.22: Cho ví dụ 6.1.

Giải.

Theo qui ước chiều của ứng suất trên mặt cắt ta có:

$$\sigma_x = +60 \text{ KN/cm}^2; \sigma_y = -40 \text{ KN/cm}^2; \tau_{xy} = -25 \text{ KN/cm}^2; \alpha = +30^\circ.$$

Ứng suất trên mặt có pháp tuyến u:

$$\sigma_u = \frac{60 - 40}{2} + \frac{60 - (-40)}{2} \cos 60^\circ - (-25) \sin 60^\circ = 56,65 \text{ KN/cm}^2.$$

$$\tau_{uv} = \frac{60 - (-40)}{2} \sin 60^\circ + (-25) \cos 60^\circ = 30,8 \text{ KN/cm}^2.$$

Các ứng suất σ_u và τ_{uv} đều dương nên có chiều như giả định ban đầu (hình 6.22a).

Các ứng suất chính:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{60 - 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[60 - (-40)]^2 + 4(-25)^2} = 10 \text{ KN/cm}^2 \pm 55,9 \text{ KN/cm}^2.$$

Theo quy ước thứ tự của các ứng suất chính suy ra:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 65,9 \text{ KN/cm}^2; \sigma_3 = \sigma_{\min} = -45,9 \text{ KN/cm}^2.$$

Các phương chính:

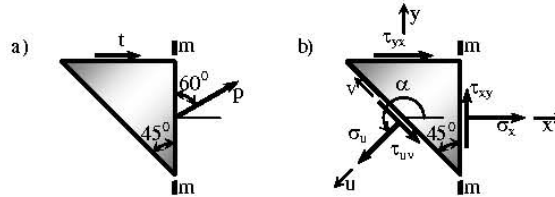
$$\tan 2\alpha = -\frac{2(-25)}{60 - (-40)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = 26^\circ 40'.$$

$$\text{Do đó: } \alpha_1 = 13^\circ 20'; \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ = 103^\circ 20'.$$

Chiều dương của các phương chính như chỉ ra trên hình 6.22b.

Ví dụ 6.2.

Ứng suất toàn phần trên mặt cắt $m-m$ đi qua một điểm của vật thể trong trạng thái ứng suất phẳng $p = 3000 \text{ N/cm}^2$ có phương tạo thành một góc 60° với mặt cắt. Trên mặt vuông với mặt cắt này chỉ có ứng suất tiếp (hình 6.23a). Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt tạo thành góc 45° so với mặt cắt $m-m$. Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.



Hình 6.23: Cho ví dụ 6.2.

Giải.

Phân ứng suất toàn phần p thành 2 thành phần σ_x và τ_{xy} (hình 6.23b):

$$\sigma_x = p \sin 60^\circ = 2598 \text{ N/cm}^2;$$

$$\tau_{xy} = p \cos 60^\circ = 1500 \text{ N/cm}^2.$$

Theo công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Thay $\sigma_x = 2598 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 1500 \text{ N/cm}^2$; $\alpha = 225^\circ$ vào ta được:

$$\sigma_u = \frac{2598 + 0}{2} + \frac{2598 - 0}{2} \cos 510^\circ - (1500) \sin 510^\circ = 2799 \text{ N/cm}^2;$$

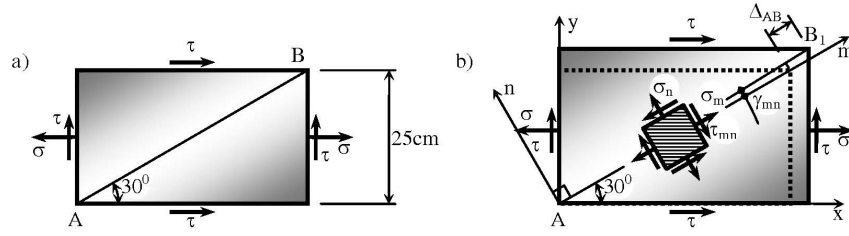
$$\tau_{uv} = \frac{2598 - 0}{2} \sin 510^\circ + (1500) \cos 510^\circ = 1299 \text{ N/cm}^2;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2598 + 0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2598 + 0)^2 + 4(-1500)^2} = 3283 \text{ N/cm}^2.$$

Ví dụ 6.3.

Trên một phần tử lấy từ vật thể chịu lực có tác dụng ứng suất $\sigma = 30 \text{ KN/cm}^2$ và $\tau = 15 \text{ KN/cm}^2$. Xác định biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo AB và biến dạng góc của góc nghiêng (hình 6.24a). Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$; $\mu = 0,28$.

LÊ THANH PHONG



Hình 6.24: Cho ví dụ 6.3.

Giải.

Xét phân tố có pháp tuyến bề mặt theo phương m và n như hình 6.24b.

Ta có: $\sigma_x = 30 \text{ KN/cm}^2$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = -15 \text{ KN/cm}^2$; $\alpha_m = 30^\circ$; $\alpha_n = 120^\circ$.

Ứng suất trên phân tố:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_m - \tau_{xy} \sin 2\alpha_m;$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_n - \tau_{xy} \sin 2\alpha_n;$$

$$\tau_{mn} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_m + \tau_{xy} \cos 2\alpha_m.$$

Thay số:

$$\sigma_m = \frac{30+0}{2} + \frac{30-0}{2} \cos 60^\circ - (-15) \sin 60^\circ = 35,49 \text{ KN/cm}^2;$$

$$\sigma_n = \frac{30+0}{2} + \frac{30-0}{2} \cos 240^\circ - (-15) \sin 240^\circ = -5,49 \text{ KN/cm}^2;$$

$$\tau_{mn} = \frac{30-0}{2} \sin 60^\circ + (-15) \cos 60^\circ = 5,49 \text{ KN/cm}^2.$$

Theo định luật Hooke về biến dạng dài:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} (\sigma_m - \mu \sigma_n) = \frac{1}{2 \cdot 10^4} [35,49 - 0,28(-5,49)] = 1,85 \cdot 10^{-3}.$$

Do đó biến dạng dài tuyệt đối của cạnh AB: $\Delta_{AB} = \varepsilon_m \cdot AB = 1,85 \cdot 10^{-3} \cdot 25 / \cos 30^\circ = 0,093 \text{ cm}.$

Biến dạng góc của góc nghiêng: $\gamma_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{G} = \frac{\tau_{mn}}{E/2(1+\mu)} = \frac{5,49 \cdot 2(1+0,28)}{2 \cdot 10^4} = 7,027 \cdot 10^{-4} \text{ Rad}.$

Ví dụ 6.4.

Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực người ta đo được các biến dạng tỷ đối theo các phương Ox , Oy , Ou là: $\varepsilon_x = 3,28 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_y = 5,96 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_u = 7,61 \cdot 10^{-4}$. Xác định trị số ứng suất chính và phương chính tại điểm đó (hình 6.25a).

Biết: $E = 1 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$; $\mu = 0,34$.

Giải.

Áp dụng định luật Hooke cho trạng thái ứng suất phẳng ta có:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} (\sigma_i - \mu \sigma_{i+90^\circ}). \text{ Với: } i = x, y, u.$$

Suy ra: $E \varepsilon_i = \sigma_i + \mu \sigma_i - \mu \sigma_i - \mu \sigma_{i+90^\circ} = \sigma_i (1 + \mu) - \mu (\sigma_i + \sigma_{i+90^\circ}).$

Do đó:

$$\sigma_i = \frac{1}{1+\mu} [E \varepsilon_i + \mu (\sigma_i + \sigma_{i+90^\circ})] \quad (d).$$

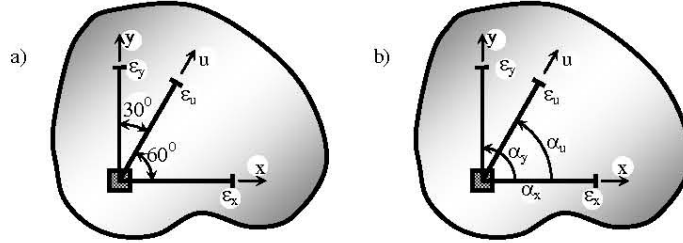
Mặt khác, theo công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng:

LÊ THANH PHONG

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_i - \tau_{xy} \sin 2\alpha_i \quad (\text{e}).$$

Đặt: $K = \sigma_i + \sigma_{i+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y$; (bất biến của trạng thái ứng suất phẳng).

$$L = \sigma_x - \sigma_y.$$



Hình 6.25: Cho ví dụ 6.4.

So sánh (d) và (e), thay K, L vào ta được:

$$\frac{1}{1+\mu}(E\varepsilon_i + \mu K) = \frac{K}{2} + \frac{L}{2} \cos 2\alpha_i - \tau_{xy} \sin 2\alpha_i \quad (\text{f}).$$

Lần lượt thay i bằng x, y, u vào (f):

$$\frac{1}{1+\mu}(E\varepsilon_x + \mu K) = \frac{K}{2} + \frac{L}{2} \cos 2.0^\circ - \tau_{xy} \sin 2.0^\circ \quad (\text{g}).$$

$$\frac{1}{1+\mu}(E\varepsilon_y + \mu K) = \frac{K}{2} + \frac{L}{2} \cos 2.90^\circ - \tau_{xy} \sin 2.90^\circ \quad (\text{h}).$$

$$\frac{1}{1+\mu}(E\varepsilon_u + \mu K) = \frac{K}{2} + \frac{L}{2} \cos 2.60^\circ - \tau_{xy} \sin 2.60^\circ \quad (\text{k}).$$

Cộng (g) và (h) vế theo vế, sau khi biến đổi ta được:

$$K = \frac{E(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{1-\mu} = \frac{1.10^4(3,28.10^{-4} + 5,96.10^{-4})}{1-0,34} = 14 \text{ KN/cm}^2.$$

Thay K vào (g) và biến đổi, ta được:

$$L = \frac{E(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{1+\mu} = \frac{1.10^4(3,28.10^{-4} - 5,96.10^{-4})}{1+0,34} = -2 \text{ KN/cm}^2.$$

Thay K, L vào (k) biến đổi ta được:

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}E(3\varepsilon_x + \varepsilon_y - 4\varepsilon_u)}{6(1+\mu)} = \frac{\sqrt{3}.1.10^4(3.3,28.10^{-4} + 5,96.10^{-4} - 4.7,61.10^{-4})}{6(1+0,34)} = -2 \text{ KN/cm}^2.$$

Các ứng suất chính:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{14}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4.(-2)^2} = 9,23 \text{ KN/cm}^2.$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{K}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{14}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4.(-2)^2} = 4,77 \text{ KN/cm}^2.$$

Phương chính:

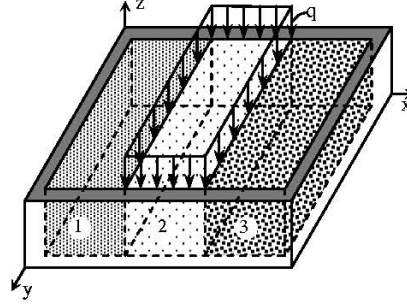
$$\text{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{L} = -2 \Rightarrow 2\alpha = -63^\circ 44'; \alpha = -31^\circ 72'.$$

Ví dụ 6.5.

Cho ba khối hình hộp vật liệu khác nhau có mô đun đàn hồi E_1, E_2, E_3 ; hệ số poisson μ_1, μ_2, μ_3 , được đặt khít vào nhau trong một khối tuyệt đối cứng và chịu lực như hình 6.26. Xác định ứng suất pháp tác dụng lên các mặt của ba khối.

LÊ THANH PHONG

Hình 6.26: Cho ví dụ 6.5.



Giải.

Phương trình biểu diễn ứng suất theo phương z:

$$\sigma_z^{(1)} = 0 \quad (\text{l}).$$

$$\sigma_z^{(2)} = -q \quad (\text{m}).$$

$$\sigma_z^{(3)} = 0 \quad (\text{n}).$$

Phương trình biểu diễn biến dạng theo phương y:

$$\varepsilon_y^{(1)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E_1} [\sigma_y^{(1)} - \mu_1 (\sigma_z^{(1)} + \sigma_x^{(1)})] = 0 \quad (\text{o}).$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E_2} [\sigma_y^{(2)} - \mu_2 (\sigma_z^{(2)} + \sigma_x^{(2)})] = 0 \quad (\text{p}).$$

$$\varepsilon_y^{(3)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E_3} [\sigma_y^{(3)} - \mu_3 (\sigma_z^{(3)} + \sigma_x^{(3)})] = 0 \quad (\text{q}).$$

Phương trình quan hệ ứng suất theo phương x:

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} \quad (\text{r}).$$

$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(2)} \quad (\text{s}).$$

Phương trình biểu diễn quan hệ biến dạng theo phương x:

$$\varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} + \varepsilon_x^{(3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{E_1} [\sigma_x^{(1)} - \mu_1 (\sigma_z^{(1)} + \sigma_y^{(1)})] + \frac{1}{E_2} [\sigma_x^{(2)} - \mu_2 (\sigma_z^{(2)} + \sigma_y^{(2)})] + \frac{1}{E_3} [\sigma_x^{(3)} - \mu_3 (\sigma_z^{(3)} + \sigma_y^{(3)})] = 0 \quad (\text{t}).$$

Từ (r) và (s) ta đặt: $\sigma_x = \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(3)}$, thay các giá trị này và (l), (m), (n) vào (o), (p), (q)

và (t) nhận được hệ phương trình sau:

$$\sigma_y^{(1)} - \mu_1 \sigma_x = 0 \Rightarrow \sigma_y^{(1)} = \mu_1 \sigma_x \quad (\text{o}').$$

$$\sigma_y^{(2)} + \mu_2 q - \mu_2 \sigma_x = 0 \Rightarrow \sigma_y^{(2)} = \mu_2 \sigma_x - \mu_2 q \quad (\text{p}').$$

$$\sigma_y^{(3)} - \mu_3 \sigma_x = 0 \Rightarrow \sigma_y^{(3)} = \mu_3 \sigma_x \quad (\text{q}').$$

$$\frac{1}{E_1} [\sigma_x - \mu_1 \sigma_y^{(1)}] + \frac{1}{E_2} [\sigma_x + \mu_2 q - \mu_2 \sigma_y^{(2)}] + \frac{1}{E_3} [\sigma_x - \mu_3 \sigma_y^{(3)}] = 0 \quad (\text{t}').$$

Thay (o'), (p'), (q') vào (t'):

$$\frac{1}{E_1} [\sigma_x - \mu_1^2 \sigma_x] + \frac{1}{E_2} [\sigma_x + \mu_2 q - \mu_2 (\mu_2 \sigma_x - \mu_2 q)] + \frac{1}{E_3} [\sigma_x - \mu_3^2 \sigma_x] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x (1 - \mu_1^2)}{E_1} + \frac{\sigma_x (1 - \mu_2^2)}{E_2} + \frac{q \mu_2 (1 + \mu_2)}{E_2} + \frac{\sigma_x (1 - \mu_3^2)}{E_3} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x \left[\frac{(1 - \mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \mu_2^2)}{E_2} + \frac{(1 - \mu_3^2)}{E_3} \right] = - \frac{q \mu_2 (1 + \mu_2)}{E_2}$$

LÊ THANH PHONG

$$\Rightarrow \sigma_x \left[\frac{E_2 E_3 (1 - \mu_1^2) + E_3 E_1 (1 - \mu_2^2) + E_1 E_2 (1 - \mu_3^2)}{E_1 E_2 E_3} \right] = - \frac{q \mu_2 (1 + \mu_2)}{E_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{(3)} = \sigma_x = - \frac{E_1 E_3 q \mu_2 (1 + \mu_2)}{E_2 E_3 (1 - \mu_1^2) + E_3 E_1 (1 - \mu_2^2) + E_1 E_2 (1 - \mu_3^2)}.$$

Thay vào (σ') , (p') , (q') :

$$\sigma_y^{(1)} = \mu_1 \sigma_x = - \frac{E_1 E_3 q \mu_1 \mu_2 (1 + \mu_2)}{E_2 E_3 (1 - \mu_1^2) + E_3 E_1 (1 - \mu_2^2) + E_1 E_2 (1 - \mu_3^2)}.$$

$$\sigma_y^{(2)} = \mu_2 \sigma_x - \mu_2 q = - \frac{E_1 E_3 q \mu_2^2 (1 + \mu_2)}{E_2 E_3 (1 - \mu_1^2) + E_3 E_1 (1 - \mu_2^2) + E_1 E_2 (1 - \mu_3^2)} - \mu_2 q.$$

$$\sigma_y^{(3)} = \mu_3 \sigma_x = - \frac{E_1 E_3 q \mu_2 \mu_3 (1 + \mu_2)}{E_2 E_3 (1 - \mu_1^2) + E_3 E_1 (1 - \mu_2^2) + E_1 E_2 (1 - \mu_3^2)}.$$

Và các ứng suất theo phương z:

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \sigma_z^{(2)} = -q; \sigma_z^{(3)} = 0.$$

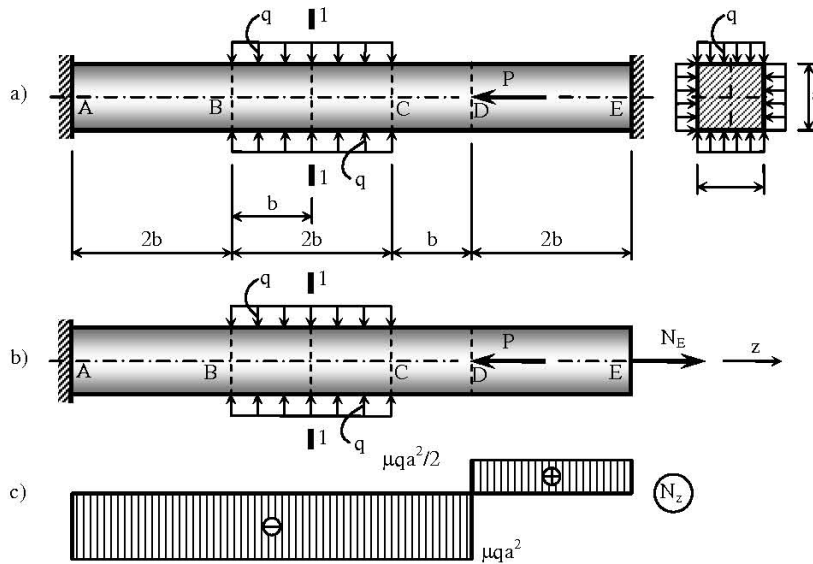
Ví dụ 6.6.

Một thanh thép mặt cắt ngang hình vuông cạnh a , ngàm hai đầu và có kích thước như trên hình 6.27a. Trên đoạn chiều dài $2b$ chịu áp lực phân bố đều q . Tại vị trí D trên trục thanh cách ngàm phải một đoạn $2b$ tác dụng lực tập trung P .

Xác định giá trị của lực P để mặt cắt ngang tại C không có chuyển vị dọc trục.

Xác định ứng suất pháp dọc trục lớn nhất và tính chuyển vị dọc trục của mặt cắt ngang 1-1 cách ngàm trái một đoạn $3b$.

Cho biết: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,3$; $b = 20\text{cm}$; $a = 2\text{cm}$; $q = 15000 \text{ N/cm}^2$.



Hình 6.27: Cho ví dụ 6.6.

Giải.

Giải phóng liên kết tại ngàm E thêm vào phản lực liên kết N_E như trên hình 6.27b.

Ký hiệu: Δ_k : chuyển vị tại mặt cắt k .

$\Delta_k^{(m)}$: chuyển vị tại mặt cắt k do nguyên nhân m gây ra.

Phương trình tương thích biến dạng tại E :

LÊ THANH PHONG

$$\Delta l_E = \Delta l_E^{(q)} + \Delta l_E^{(P)} + \Delta l_E^{(N_E)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] 2b - \frac{P \cdot 5b}{EF} + \frac{N_E \cdot 7b}{EF} = 0.$$

Các ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ do lực phân bố q gây ra: $\sigma_x = \sigma_y = -q; \sigma_z = 0$. $F = a^2$ ta được:

$$N_E = -\left(\frac{4}{7}\mu q a^2 - \frac{5}{7}P\right) \quad (\text{u}).$$

Để tại C không có chuyển vị dọc trục ta có phương trình tương thích biến dạng tại C :

$$\Delta l_C = \Delta l_C^{(q)} + \Delta l_C^{(P)} + \Delta l_C^{(N_E)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} 2\mu q - \frac{P \cdot 4b}{Ea^2} + \frac{N_E \cdot 4b}{Ea^2} = 0 \quad (\text{v}).$$

Giải (u) và (v):

$$P = \frac{3}{2}\mu q a^2; N_E = \frac{1}{2}\mu q a^2.$$

Vậy, khi $P = \frac{3}{2}\mu q a^2$ thì tại mặt cắt ngang C không có chuyển vị.

Biểu đồ nội lực trong thanh như trên hình 6.27c:

$$\sigma_{z,\max} = -\frac{\mu q a^2}{a^2} = -\mu q = 0,3 \cdot 15000 = 4500 \text{ N/cm}^2.$$

$$\Delta l_{1-1} = \Delta l_{1-1}^{(q)} + \Delta l_{1-1}^{(P)} + \Delta l_{1-1}^{(N_E)} = \frac{2\mu q \cdot b}{E} - \frac{P \cdot 3b}{Ea^2} + \frac{N_E \cdot 3b}{Ea^2}.$$

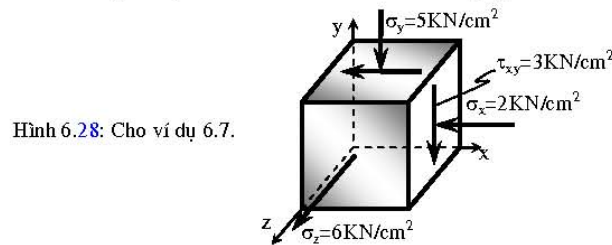
$$\text{Thay } P \text{ và } N_E \text{ vào: } \Delta l_{1-1} = \frac{2\mu q \cdot b}{E} - \frac{3}{2} \frac{\mu q a^2 \cdot 3b}{Ea^2} + \frac{1}{2} \frac{\mu q a^2 \cdot 3b}{Ea^2} = -\frac{\mu q b}{E}.$$

Thay: μ, q, b, E vào ta được:

$$\Delta l_{1-1} = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm. Mặt cắt 1-1 dịch chuyển sang trái.}$$

Ví dụ 6.7.

Phân tố chịu ứng suất trên các mặt như hình 6.28. Hãy kiểm tra bền cho phân tố theo các lý thuyết bền thứ ba, thứ tư và lý thuyết bền Mohr. Cho biết: $[\sigma] = 13 \text{ KN/cm}^2; \sigma_{ok} / \sigma_{on} = 0,7$.



Hình 6.28: Cho ví dụ 6.7.

Giải.

Có một ứng suất chính theo phương z là $\sigma_z = 6 \text{ KN/cm}^2$. Hai ứng suất chính còn lại nằm trong mặt phẳng vuông góc với phương z được tính:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{-5-6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-5+6)^2 + 4 \cdot 3^2} = \begin{cases} 1,11 \text{ KN/cm}^2, \\ -8,11 \text{ KN/cm}^2. \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \sigma_1 = 6 \text{ KN/cm}^2; \sigma_2 = 1,11 \text{ KN/cm}^2; \sigma_3 = -8,11 \text{ KN/cm}^2.$$

Theo thuyết bền thứ ba:

$$\sigma_{td}^{tb3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 6 + 8,11 = 14,11 \text{ KN/cm}^2.$$

Theo thuyết bền thứ tư:

$$\sigma_{td}^{tb4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

$$= \sqrt{6^2 + 1,11^2 + (-8,11)^2 - 6,111 - 1,11(-8,11) - (-8,11)6} = 12,41 \text{ KN/cm}^2.$$

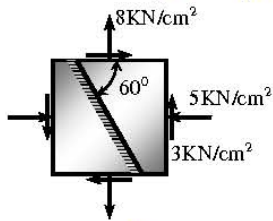
Theo thuyết bền thứ năm:

$$\sigma_{td}^{tb5} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ok}}{\sigma_{on}} \cdot \sigma_3 = 6 - 0,7(-8,11) = 11,68 \text{ KN/cm}^2.$$

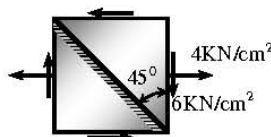
Vậy: khi kiểm tra bằng lý thuyết bền thứ tư và thứ năm thì phân tố đủ bền, còn khi kiểm tra bằng lý thuyết bền thứ ba thì phân tố không đảm bảo độ bền.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

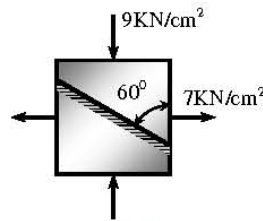
6.1 ÷ 6.6. Xác định giá trị của ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt cắt nghiêng của các phân tố cho trên hình 6.29 ÷ 6.34.



Hình 6.29.



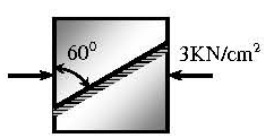
Hình 6.30.



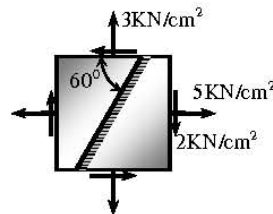
Hình 6.31.



Hình 6.32.

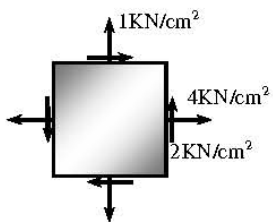


Hình 6.33.

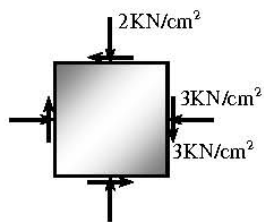


Hình 6.34.

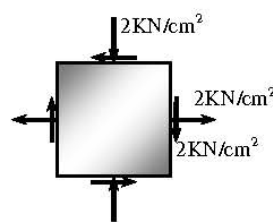
6.7 ÷ 6.9. Xác định ứng suất chính và phương chính của các phân tố cho trên hình 6.35 ÷ 6.37. Vẽ ra các mặt chính cho mỗi phân tố.



Hình 6.35.

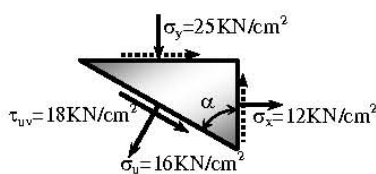


Hình 6.36.

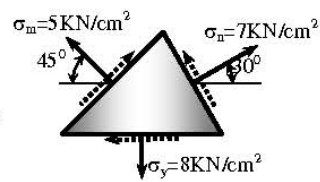


Hình 6.37.

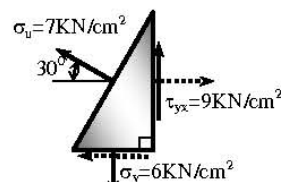
6.10 ÷ 6.12. Tại một điểm trong vật thể ở trạng thái ứng suất phẳng có ứng suất tác dụng trên các mặt như trên hình 6.38 ÷ 6.40. Tính những ứng suất chính và phương chính tại điểm đó.



Hình 6.38.



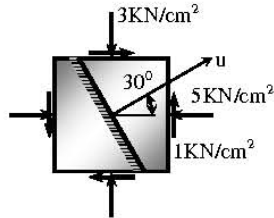
Hình 6.39.



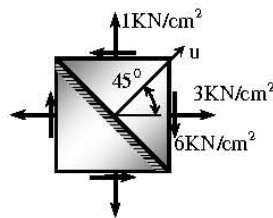
Hình 6.40.

LÊ THANH PHONG

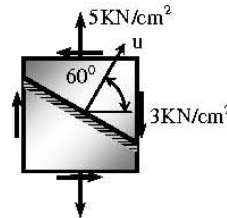
6.13 ÷ 6.15. Phần tử ở trạng thái ứng suất phẳng, có ứng suất tác dụng như trên hình 6.41 ÷ 6.43. Tính biến dạng theo các phương ε_x , ε_y , ε_u . Cho: $E = 2,2 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



Hình 6.41.



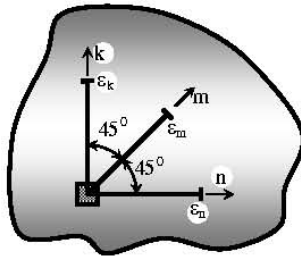
Hình 6.42.



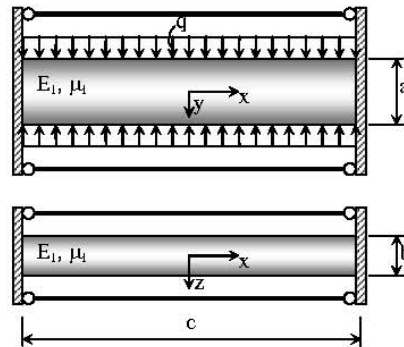
Hình 6.43.

6.16. Xác định trị số của ứng suất chính và phương chính tại một điểm ở trạng thái ứng suất phẳng, nếu biết biến dạng theo ba phương như trên hình 6.44.

Cho: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,3$; $\varepsilon_k = 0,0004$; $\varepsilon_m = 0,0003$; $\varepsilon_n = -0,00014$.



Hình 6.44.



Hình 6.45.

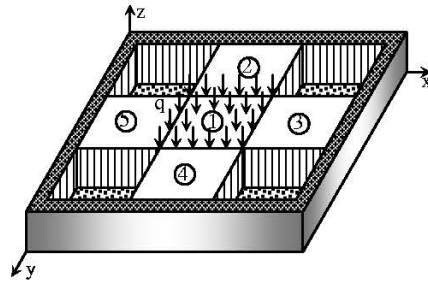
6.17. Một khối hộp chữ nhật kích thước $a \times b \times c$ đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng. Hai tấm này được liên kết với nhau bằng bốn thanh giằng giống nhau như trên hình 6.45. Vật liệu khối hộp chữ nhật có mô đun đàn hồi E_1 hệ số Poisson μ_1 . Khối hộp chữ nhật chịu áp lực phân bố đều q trên hai mặt bên. Xác định nội lực trong các thanh, các ứng suất σ_x , σ_y , σ_z xuất hiện trong khối hộp chữ nhật trong hai trường hợp:

Các thanh là đàn hồi có độ cứng kéo nén $E_2 F_2$.

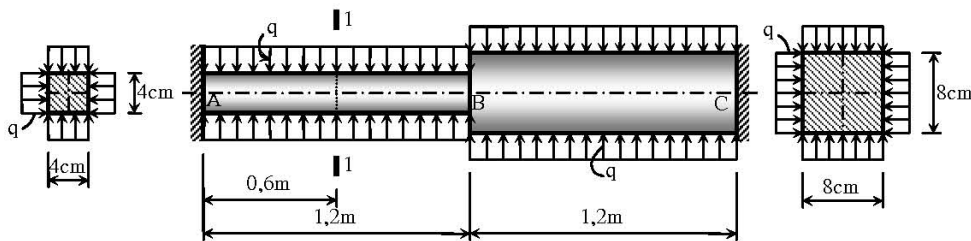
Các thanh là tuyệt đối cứng.

6.18. Năm khối hình hộp lập phương giống nhau, từ cùng một loại vật liệu có mô đun đàn hồi E , hệ số Poisson μ được đặt trong một hộp tuyệt đối cứng như hình 6.46. Tại mặt trên của khối chính giữa tác dụng áp lực nén thẳng đứng q . Các khối tựa hoàn toàn vào nhau không ma sát. Xác định ứng suất phát sinh trên các mặt bên và sự thay đổi chiều cao của năm khối trên.

Hình 6.46.



6.19. Một thanh thép mặt cắt ngang hình vuông gồm hai đoạn. Đoạn AB cạnh là 2cm , đoạn BC có cạnh là 4cm . Thanh bị ngàm ở hai đầu và chịu áp lực phân bố đều q như trên hình 6.47. Cho biết: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$; $\mu = 0,3$. Xác định giá trị cho phép $[q]$ từ điều kiện sao cho ứng suất pháp dọc trục lớn nhất của thanh không vượt quá 10 KN/cm^2 . Tính chuyển vị của mặt cắt ngang 1-1 cách ngàm A một đoạn $0,6\text{m}$ với trị số $[q]$ tìm được ở trên.



Hình 6.47.

6.20. Tìm ứng suất tương đương theo lý thuyết bền thứ ba, thứ tư và lý thuyết bền Mohr đối với phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng như bảng dưới. Biết: $\sigma_{0k} / \sigma_{0n} = 0,82$.

Phân tố	σ_x $\left(\frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \right)$	σ_y $\left(\frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \right)$	τ_{xy} $\left(\frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} \right)$
a	15	11	7,5
b	0	-9	3,6
c	-5	-12	3
d	2,5	0	4

6.21 ÷ 6.23. Tại một điểm của vật thể chịu lực có trạng thái ứng suất phẳng như hình 6.48 ÷ 6.50. Kiểm tra độ bền theo lý thuyết thứ ba, thứ tư và lý thuyết bền Mohr. Cho biết: $[\sigma] = 14 \text{ KN/cm}^2$; $\sigma_{0k} / \sigma_{0n} = 0,65$

