ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi**: 27**/12/2014)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0000

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời	**D**	**B**	**C**	**B**	**A**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-001

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời	**A**	**B**	**C**	**D**	**B**	**D**	**C**	**A**	**D**	**B**

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0010

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời	**A**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**B**	**D**	**C**	**B**

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0011

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời	**B**	**B**	**A**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**D**	**C**

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	***Điểm***
Câu 11	***1,5đ***	
	Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $p^2Y - py(0) - y'(0) - 6(pY - y(0)) + 25Y = \mathscr{L}[e^{-3t} - e^{2t}]$ $\Leftrightarrow Y(p^2 - 6p + 25) = \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p-2}$	***0.5đ***
	$\Leftrightarrow Y = \frac{-5}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16}$	***0.5đ***
	Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p-2} + B\frac{1}{p+3} + C\frac{p-3}{(p-3)^2+16} + D\frac{4}{(p-3)^2+16}]$ $\Leftrightarrow y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} + Ce^{3t}\cos 4t + De^{3t}\sin 4t + 3e^{3t}\sin 4t$ Tìm A, B, C, D dựa vào đẳng thức: $\frac{-5}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16}$ $A = \frac{-5}{(2+3)[(2-3)^2+16]} = \frac{-1}{17}$, $B = \frac{-5}{(-3-2)[(-3-3)^2+16]} = \frac{1}{52}$ Từ (*) cho $p = 0$ được: $\frac{5}{6\times 25} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{3} + \frac{-3C+4D}{25}$ Từ (*) cho $p = 3$ được: $\frac{-5}{96} = A + \frac{B}{6} + \frac{D}{4}$.	***0.5đ***

Suy ra $C=\dfrac{35}{884}$, $D=\dfrac{25}{1768}$

Câu 12 **1.5đ**

Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases}\mathscr{L}[x']+3\mathscr{L}[y]=2\mathscr{L}[\sin t]\\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']+2\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[e^t]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}pX+3Y=\dfrac{2}{p^2+1}\\ X+(p+2)Y=\dfrac{1}{p-1}\end{cases}$$

0.5đ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=\dfrac{-p^2+2p-7}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\dfrac{C}{p+3}+\dfrac{Dp+E}{p^2+1}\\ Y=\dfrac{p^3-p+2}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\dfrac{C'}{p+3}+\dfrac{D'p+E'}{p^2+1}\end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được: **0.5đ**

$$\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[X]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p-1}+B\dfrac{1}{(p-1)^2}+C\dfrac{1}{p+3}+D\dfrac{p}{p^2+1}+E\dfrac{1}{p^2+1}]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[A'\dfrac{1}{p-1}+B'\dfrac{1}{(p-1)^2}+C'\dfrac{1}{p+3}+D'\dfrac{p}{p^2+1}+E'\dfrac{1}{p^2+1}]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=Ae^t+Bte^t+Ce^{-3t}+D\cos t+E\sin t\\ y=A'e^t+B'te^t+C'e^{-3t}+D'\cos t+E'\sin t\end{cases}$$

0.5đ

♦ Tìm A,B,C,D,E dựa vào

$$\frac{-p^2+2p-7}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{Dp+E}{p^2+1}$$

$$B=\frac{-1^2+2\times1-7}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{-3}{4},\quad C=\frac{-(-3)^2+2\times3-7}{(-3-1)^2(9+1)}=-\frac{1}{16}$$

$$\begin{cases}Cho\ p=0\ :\ \dfrac{-7}{3}=-A+B+\dfrac{C}{3}+E\\ Cho\ p=2\ :\ \dfrac{-7}{25}=A+B+\dfrac{C}{5}+\dfrac{2D+E}{5}\\ Cho\ p=-2\ :\ \dfrac{-1}{3}=\dfrac{-3A+B}{9}+C+\dfrac{E-2D}{5}\end{cases}$$

Thay $B=\dfrac{-3}{4}$, $C=-\dfrac{1}{16}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A=\dfrac{69}{80}$, $D=\dfrac{-3}{5}$, $E=\dfrac{-7}{10}$

♦ Tương tự, chúng ta tìm A',B',C',D',E' dựa vào

$$\frac{p^3-p+2}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\frac{C'}{p+3}+\frac{D'p+E'}{p^2+1}$$

$$B'=\frac{1^3-1+2}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{1}{4},\quad C'=\frac{(-3)^3-(-3)+2}{(-3-1)((-3)^2+1)}=\frac{11}{20}$$

$$\begin{cases} Cho\ p=0 \ : \ \dfrac{2}{3} = -A'+B'+\dfrac{C'}{3}+E' \\ Cho\ p=2 \ : \ \dfrac{8}{25} = A'+B'+\dfrac{C'}{5}+\dfrac{2D'+E'}{5} \\ Cho\ p=-2 \ : \ \dfrac{-4}{45} = \dfrac{-3A'+B'}{9}+C'+\dfrac{E'-2D'}{5} \end{cases}$$

Thay $B' = \frac{1}{4}$, $C' = \frac{11}{20}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A' =$, $D' =$, $E' =$

Câu 13 **1đ**

a) $\mathscr{L}[f(t)] = e^{-p\pi}\ \dfrac{p}{p^2+1} + 5\left(\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}\right)' + \dfrac{1}{p}.\ \mathscr{L}[e^{-2t}\cos 5t]$ **0.5đ**

$= e^{-p\pi}\ \dfrac{p}{p^2+1} + 10\dfrac{1-3p^2}{(p^2+1)^3} + \dfrac{1}{p}.\dfrac{p+2}{(p+2)^2+25}$ **0.5đ**

b) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t) = e^{5t} + 2y(t)*\cos t$$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p-5} + 2\mathscr{L}[y(t)]\ \mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-5} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$ **0.5đ**

Giải phương trình với Y là ẩn ta được

$$Y = \frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{p-5} + B\frac{1}{p-1} + C\frac{1}{(p-1)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ae^{5t} + Be^{t} + Cte^{t}$$

Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức

$$\frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$$

$A = \frac{13}{8}$, $C = \frac{-1}{2}$, $B = \frac{-5}{8}$ **0.5đ**