Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (1/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 00-0001-0110-2015-1615-0001 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Phần thực và phần ảo của số phức $z = \dfrac{e^2}{1-3i} + e^{-2i}$ là:

A) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ - sin2

B) Rez = $\dfrac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\dfrac{3e^2}{10}$ + sin2

C) Rez = $\dfrac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\dfrac{3e^2}{10}$ - sin2

D) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ + sin2

Câu 2 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không giải tích trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không điều hòa trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

C) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

Câu 3 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| = |z-3-i|\}$, $F = \{z : |z-3+4i| < 6\}$.

Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $1-i$ và $3+i$.
B) Tập F là hình tròn mở tâm $3-4i$ bán kính bằng 6.
C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.
D) Hai tập E và F không có điểm chung $(E \cap F = \varnothing)$.

Câu 4 Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3+iz}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.
B) đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$.
C) đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 5 *Khẳng định nào sau đây **sai**?*

A) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{n}{(2+5^n)} \cdot \dfrac{(2+5^{n+1})}{n+1} \right| = 5$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-3i| \le 5$.

Câu 6 Khẳng định nào sau đây ***sai?***

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm f(z) = $\dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-i|=6} \dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right] = 10\pi i e^{15i}$ D) $\oint\limits_{|z+5i|=6} \dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

Câu 7 Cho phương trình vi phân: y'-8y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 1.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-8Y = $\dfrac{e^{-\pi p}}{p-1} + 1$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-8)} + \dfrac{1}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{e^{-\pi p}}{7}\left(\dfrac{1}{p-8} - \dfrac{1}{p-1}\right) + \dfrac{1}{p-8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{7}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + e^{8t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 8</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{6u}\cos 3u du\right] = \dfrac{p-6}{p\left((p-6)^2+9\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin 5t dt$

<u>Câu 9</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)
B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)
C) $\mathscr{L}[5 + t^3e^{2t} + sh3t] = \dfrac{5}{p} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{3}{p^2-9}$
D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3p+5}{p^2-64}\right] = 3ch8t + 5sh8t$

Câu 10 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{3t}+5$\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{3t} +5y(t)*cos2t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{3t}] + 5\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 2t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p-3} + 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-3} + 5Y\frac{p}{p^2+4}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+4}{(p-1)(p-3)(p-4)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-3}+\dfrac{C}{p-4}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{3t}+Ce^{4t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 6y' + 13y = 10 + e^{-3t} \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = e^{3t} \\ x + y' + 2y = 6 \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0) = 0 \text{ và } y(0) = 0$$

Câu 13 (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=3} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz$.

Câu 14 (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z+6i)\,\mathrm{Im}\, z + iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

∗ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 28 tháng 5 năm 2015
Trưởng Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 00 – 0001 - 0110-2015-1615- 0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (1/6/2015)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (1/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 01-0001-0110-2015-1615-0010 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

<u>Câu 1</u> Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$ B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{6u}\cos 3u du\right] = \frac{p-6}{p\left((p-6)^2+9\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

<u>Câu 2</u> Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$ B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$

C) $\mathscr{L}[5 + t^3e^{2t} + sh3t] = \frac{5}{p} + \frac{3!}{(p-2)^4} + \frac{3}{p^2-9}$ D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3p+5}{p^2-64}\right] = 3ch8t + 5sh8t$

<u>Câu 3</u> Để giải phương trình tích phân: $y(t)= e^{3t}+5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: $y(t) = e^{3t} + 5y(t)*\cos 2t$
- Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$ và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{3t}] + 5\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 2t]$$
- Áp dụng công thức Borel ta được
$$Y = \frac{1}{p-3} + 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-3} + 5Y\frac{p}{p^2+4}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \frac{p^2+4}{(p-1)(p-3)(p-4)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: $Y= \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p-4}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : $y(t) = Ae^t + Be^{3t} + Ce^{4t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 4</u> Phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{e^2}{1-3i} + e^{-2i}$ là:

A) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ - sin2
B) Rez = $\frac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\frac{3e^2}{10}$ + sin2
C) Rez = $\frac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\frac{3e^2}{10}$ - sin2
D) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ + sin2

<u>Câu 5</u> Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không giải tích trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không điều hòa trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

C) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

Câu 6 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E=\{z:|z-1+i|=|z-3-i|\}$, $F=\{z:|z-3+4i|<6\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $1-i$ và $3+i$.

B) Tập F là hình tròn mở tâm $3-4i$ bán kính bằng 6.

C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.

D) Hai tập E và F không có điểm chung ($E\cap F=\varnothing$).

Câu 7 Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w=e^{3+iz}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.

B) đường tròn $u^2+v^2=e^6$.

C) đường tròn $u^2+v^2=e^3$.

D) đường thẳng v = 0.

Câu 8 *Khẳng định nào sau đây **sai**?*

A) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(2+5^n)}\cdot\frac{(2+5^{n+1})}{n+1}\right|=5$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-3i|\le 5$.

Câu 9 Khẳng định nào sau đây ***sai?***

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\ne A\ne\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z=3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm f(z) = $\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}$

C) $\oint_{|z-i|=6}\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2},3i\right]=10\pi i e^{15i}$

D) $\oint_{|z+5i|=6}\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2},3i\right]$

Câu 10 Cho phương trình vi phân: y’-8y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 1.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-8Y = $\frac{e^{-\pi p}}{p-1}+1$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-8)}+\frac{1}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\frac{e^{-\pi p}}{7}\left(\frac{1}{p-8}-\frac{1}{p-1}\right)+\frac{1}{p-8}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\frac{1}{7}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + e^{8t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 6y' + 13y = 10 + e^{-3t} \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

<u>Câu 12</u> (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = e^{3t} \\ x + y' + 2y = 6 \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0) = 0 \text{ và } y(0) = 0$$

<u>Câu 13</u> (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=3} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz$.

<u>Câu 14</u> (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z+6i)\,\mathrm{Im}\,z + iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

∗ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 28 tháng 5 năm 2015

Trưởng Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 01 – 0001 - 0110-2015-1615- 0010</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (1/6/2015)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (1/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 10-0011-0111-2015-1615-0011 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$

B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$

C) $\mathscr{L}[5 + t^3e^{2t} + sh3t] = \dfrac{5}{p} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{3}{p^2-9}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3p+5}{p^2-64}\right] = 3ch8t + 5sh8t$

Câu 2 Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{5z}}{(z-3i)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z-i|=6} \frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right] = 10\pi i e^{15i}$

D) $\displaystyle\oint_{|z+5i|=6} \frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

Câu 3 Phần thực và phần ảo của số phức $z = \dfrac{e^2}{1-3i} + e^{-2i}$ là:

A) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ - sin2

B) Rez = $\dfrac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\dfrac{3e^2}{10}$ + sin2

C) Rez = $\dfrac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\dfrac{3e^2}{10}$ - sin2

D) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ + sin2

Câu 4 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không giải tích trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không điều hòa trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

C) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

Câu 5 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| = |z-3-i|\}$, $F = \{z : |z-3+4i| < 6\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $1-i$ và $3+i$.

B) Tập F là hình tròn mở tâm $3-4i$ bán kính bằng 6.

C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.

D) Hai tập E và F không có điểm chung ($E \cap F = \varnothing$).

Câu 6 Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3+iz}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = 0. B) đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$.

C) đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$. D) đường thẳng v = 0.

Câu 7 *Khẳng định nào sau đây **sai**?*

A) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(2+5^n)}\cdot\frac{(2+5^{n+1})}{n+1}\right|=5$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-3i|\le 5$.

Câu 8 Cho phương trình vi phân: y'-8y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 1.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-8Y = $\frac{e^{-\pi p}}{p-1}$ +1 (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-8)}$ + $\frac{1}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\frac{e^{-\pi p}}{7}\left(\frac{1}{p-8}-\frac{1}{p-1}\right)+\frac{1}{p-8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\frac{1}{7}\left(e^{8(t-\pi)}-e^{t-\pi}\right)u(t-\pi)+e^{8t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{6u}\cos 3u du\right]=\frac{p-6}{p\left((p-6)^2+9\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}\sin 5t & khi\quad 0<t<\pi\\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

Câu 10 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{3t}+5 $\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{3t} +5y(t)*cos2t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{3t}] + 5\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 2t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p-3} + 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-3} + 5Y\frac{p}{p^2+4}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\frac{p^2+4}{(p-1)(p-3)(p-4)}$

- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p-4}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{t}+Be^{3t}+Ce^{4t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 6y' +13 y = 10 + e^{-3t} với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y=e^{3t} \\ x+y'+2y=6 \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

Câu 13 (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$.

Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-2i|=3}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz$.

Câu 14 (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z)=(z+6i)\operatorname{Im}z+iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 28 tháng 5 năm 2015
Trưởng Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 10 – 0011 - 0111-2015-1615- 0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (1/6/2015)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (1/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 11-0001-0100-2015-1615-0100 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

<u>Câu 1</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$ B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{6u}\cos 3u du\right] = \frac{p-6}{p\left((p-6)^2+9\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin 5t dt$

<u>Câu 2</u> Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{3t}+5 $\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{3t} +5y(t)*cos2t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
  $\mathscr{L}$[y(t)] = $\mathscr{L}$[e^{3t}] +5 $\mathscr{L}$[y(t)*cos2t]
- Áp dụng công thức Borel ta được
  $$Y = \frac{1}{p-3} + 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-3} + 5Y\frac{p}{p^2+4}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\frac{p^2+4}{(p-1)(p-3)(p-4)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p-4}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^t + Be^{3t} + Ce^{4t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 3</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)

C) $\mathscr{L}[5+t^3e^{2t}+sh3t] = \frac{5}{p}+\frac{3!}{(p-2)^4}+\frac{3}{p^2-9}$ D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3p+5}{p^2-64}\right] = 3ch8t + 5sh8t$

<u>Câu 4</u> Phần thực và phần ảo của số phức z = $\frac{e^2}{1-3i}+e^{-2i}$ là:

A) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ - sin2
B) Rez = $\frac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\frac{3e^2}{10}$ + sin2
C) Rez = $\frac{e^2}{10}$ + cos2, Imz = $\frac{3e^2}{10}$ - sin2
D) Rez = e^2 + cos2, Imz = $3e^2$ + sin2

<u>Câu 5</u> Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không giải tích trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không điều hòa trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

C) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

Câu 6 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| = |z-3-i|\}$, $F = \{z : |z-3+4i| < 6\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?
A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $1-i$ và $3+i$.
B) Tập F là hình tròn mở tâm $3-4i$ bán kính bằng 6.
C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.
D) Hai tập E và F không có điểm chung $(E \cap F = \varnothing)$.

Câu 7 Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3+iz}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.
B) đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$.
C) đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 8 *Khẳng định nào sau đây **sai**?*
A) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.
B) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.
C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(2+5^n)} \cdot \frac{(2+5^{n+1})}{n+1}\right| = 5$
D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-3i)^n}{2+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-3i| \le 5$.

Câu 9 Khẳng định nào sau đây ***sai?***
A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).
B) $z = 3i$ là cực điểm cấp 2 của hàm f(z) = $\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}$
C) $\oint_{|z-i|=6} \frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right] = 10\pi i e^{15i}$
D) $\oint_{|z+5i|=6} \frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{5z}}{(z-3i)^2}, 3i\right]$

Câu 10 Cho phương trình vi phân: y'-8y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 1.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-8Y = $\frac{e^{-\pi p}}{p-1} + 1$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-8)} + \frac{1}{p-8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\frac{e^{-\pi p}}{7}\left(\frac{1}{p-8} - \frac{1}{p-1}\right) + \frac{1}{p-8}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \frac{1}{7}\left(e^{8(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + e^{8t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 6y' + 13y = 10 + e^{-3t}$$ với điều kiện $y(0) = 0$ và $y'(0) = 0$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = e^{3t} \\ x + y' + 2y = 6 \end{cases}$$ với điều kiện $x(0) = 0$ và $y(0) = 0$

Câu 13 (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=3} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz$.

Câu 14 (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z+6i)\,\mathrm{Im}\,z + iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

∗ **Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 28 tháng 5 năm 2015

Trưởng Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 11 - 0001- 0100 -2015-1615- 0100</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (1/6/2015)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3
Câu 11, câu 12	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4
Câu 13, câu 14	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi: **1**/6/2015)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 00 – 0001 - 0110-2015-1615- 0001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	C	A	D	B	D	D	A	D	D	B

Mã đề: 01 – 0001 - 0110-2015-1615- 0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	D	B	C	A	D	B	D	D	A

Mã đề: 10 – 0011 - 0111-2015-1615- 0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	D	C	A	D	B	D	A	D	B

Mã đề: 11 - 0001- 0100 -2015-1615- 0100

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	B	D	C	A	D	B	D	D	A

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	*Điểm*
Câu 11		***1,5đ***
	Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $p^2Y - py(0) - y'(0) + 6(pY - y(0)) + 13Y = \mathscr{L}[10 + e^{-3t}]$ $\Leftrightarrow Y(p^2 + 6p + 13) = \frac{10}{p} + \frac{1}{p+3}$	***0.5đ***
	$\Leftrightarrow Y = \frac{11p+30}{p(p+3)[(p+3)^2+4]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p+3)+2D}{(p+3)^2+4}$	***0.5đ***
	Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+3} + C\frac{p+3}{(p+3)^2+4} + D\frac{2}{(p+3)^2+2}]$ $\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-3t} + Ce^{-3t}\cos 2t + De^{-3t}\sin 2t$ Tìm A, B, C, D dựa vào đẳng thức: $\frac{11p+30}{p(p+3)[(p+3)^2+4]} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p+3)+2D}{(p+3)^2+4}$ $A = \frac{11\times 0+30}{(0+3)[(0+3)^2+4]} = \frac{10}{13}$, $B = \frac{11\times(-3)+30}{(-3)[(-3+3)^2+4]} = \frac{1}{4}$ Từ (*) cho $p=1$ được: $\frac{41}{4\times 20} = A + \frac{B}{4} + \frac{4C+2D}{20}$ Từ (*) cho $p=-2$ được: $\frac{-4}{5} = \frac{A}{-2} + B + \frac{C+2D}{5}$.	***0.5đ***

Suy ra $C = -\dfrac{53}{52}$, $D = -\dfrac{15}{13}$

Câu 12 **1.5đ**

Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] + 3\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{3t}] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] + 2\mathscr{L}[y] = 6\mathscr{L}[1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX + 3Y = \dfrac{1}{p-3} \\ X + (p+2)Y = \dfrac{6}{p} \end{cases}$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{p^2 - 16p + 54}{p(p-1)(p-3)(p+3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-1} + \dfrac{C}{p-3} + \dfrac{D}{p+3} \\ Y = \dfrac{6p - 19}{(p-1)(p-3)(p+3)} = \dfrac{E}{p-1} + \dfrac{F}{p-3} + \dfrac{G}{p+3} \end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được: **0.5đ**

$$\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p} + B\dfrac{1}{p-1} + C\dfrac{1}{p-3} + D\dfrac{1}{p+3}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[E\dfrac{1}{p-1} + F\dfrac{1}{p-3} + G\dfrac{1}{p+3}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = Ae^{t} + Be^{t} + Ce^{3t} + De^{-3t} \\ y = Ee^{t} + Fe^{3t} + Ge^{-3t} \end{cases}$$

- Tìm A, B, C, D dựa vào **0.5đ**

$$\frac{p^2 - 16p + 54}{p(p-1)(p-3)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p+3}$$

$$A = \frac{0^2 - 16\times 0 + 54}{(0-1)(0-3)(0+3)} = 6,\ B = \frac{1^2 - 16\times 1 + 54}{1(1-3)(1+3)} = -\frac{39}{8},\ C = \frac{3^2 - 16\times 3 + 54}{3(3-1)(3+3)} = \frac{5}{12}$$

$$D = \frac{(-3)^2 - 16\times(-3) + 54}{-3(-3-1)(-3-3)} = -\frac{37}{24}$$

- Tìm E, F, G dựa vào

$$\frac{6p - 19}{(p-1)(p-3)(p+3)} = \frac{E}{p-1} + \frac{F}{p-3} + \frac{G}{p+3}$$

$$E = \frac{6\times 1 - 19}{(1-3)(1+3)} = \frac{13}{8},\ F = \frac{6\times 3 - 19}{(3-1)(3+3)} = \frac{-1}{12},\ G = \frac{6\times(-3) - 19}{(-3-1)(-3-3)} = -\frac{37}{24}$$

Câu 13 **1 điểm**

Khai triển Laurent **0.5đ**

$$f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} = (z-i)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)^n}{n!} = (z-i)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$$

Tính tích phân **0.5đ**

$$I = \oint_{|z-2i|=3} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}, i] = 2\pi i \frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}$$

Câu 14 **1 điểm**

Tập xác định hàm số là $\mathbb{C}$

	$f(z)=(z+6i)\operatorname{Im} z+iz \ =(x+iy+6i)y+i(x+iy)=\underbrace{(xy-y)}_{u}+i\underbrace{(x+y^2+6y)}_{v}$ Các đạo hàm riêng $u'_x=y, u'_y=x-1,\ \ v'_x=1, v'_y=2y+6$ đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên u, v khả vi trên $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ (1). Điều kiện (C-R): $\begin{cases} u'_x=v'_y \\ u'_y=-v'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2y+6 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$ (2). Hàm số có đạo hàm khi và chỉ khi hàm số khả vi (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra tập tất cả các điểm hàm số có đạo hàm là $\{-6i\}$. $f'(-6i)=u'_x(0,-6)+iv'_x(0,-6)=\ -6+i=-6+i$ *** HẾT***	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3
Câu 11, câu 12	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4
Câu 13, câu 14	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3