

# Chương 1: Một số khái niệm căn bản

---

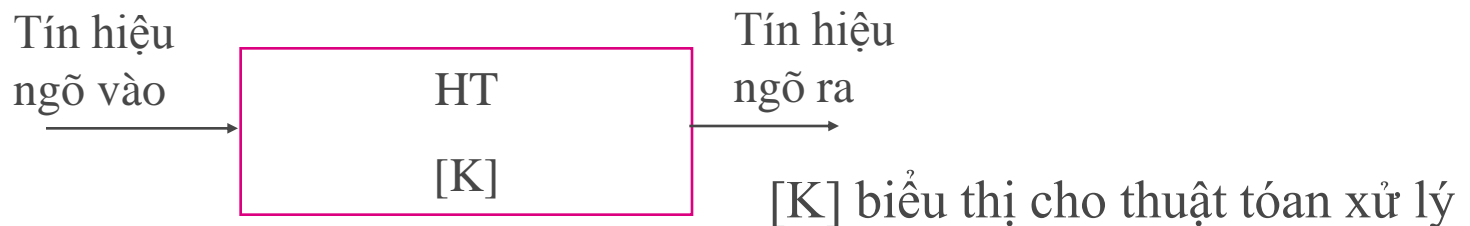
1. Tín hiệu – Tin tức – Hệ thống
2. Phân loại tín hiệu
3. Biểu diễn giải tích tín hiệu

# 1. Tín hiệu- Tin tức- Hệ thống

- Tín hiệu là biểu hiện vật lý của tin tức mà nó mang từ nguồn tin đến nơi nhận tin.

Mô hình lý thuyết: hàm theo thời gian  $x(t)$

- Tin tức là những nội dung cần truyền đi qua hình ảnh, tiếng nói, số liệu đo lường...
- Hệ thống là những thiết bị hay thuật toán, để thực hiện những tác động theo một qui tắc nào đó lên tín hiệu để tạo ra một tín hiệu khác



## 2. Phân loại

---

**2.1. Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên**

**2.2. Tín hiệu liên tục và rời rạc**

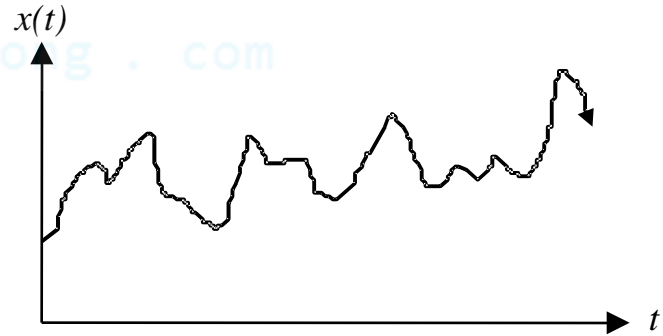
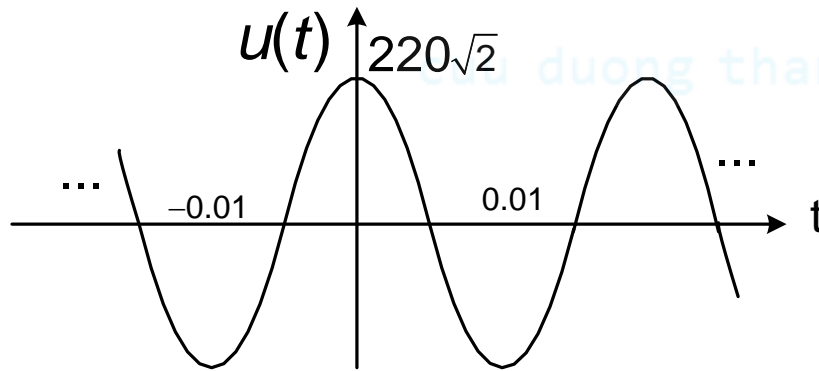
**2.3. Tín hiệu năng lượng – Tín hiệu công suất**

**2.4. Các phân loại khác**

## 2.1. Tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên

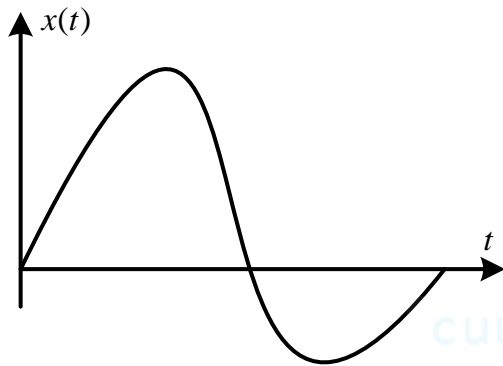
- Tín hiệu xác định là tín hiệu mà quá trình thời gian của tín hiệu được biểu diễn bằng một hàm thực hay phức.

Ví dụ:  $u(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 50 t) (V)$

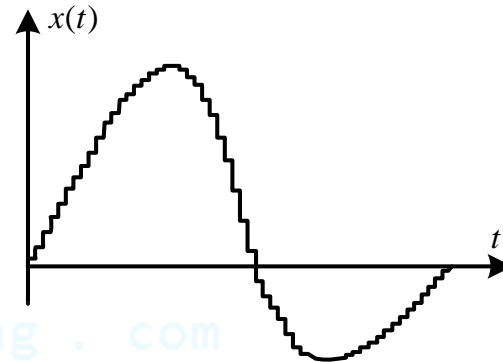


- Tín hiệu ngẫu nhiên (THNN): là tín hiệu mà quá trình thời gian của nó không đoán trước được. Ví dụ: tiếng nói, hình ảnh, âm nhạc... đều không có biểu diễn toán học. Để nghiên cứu THNN ta phải tiến hành quan sát thống kê để tìm ra qui luật phân bố của nó.

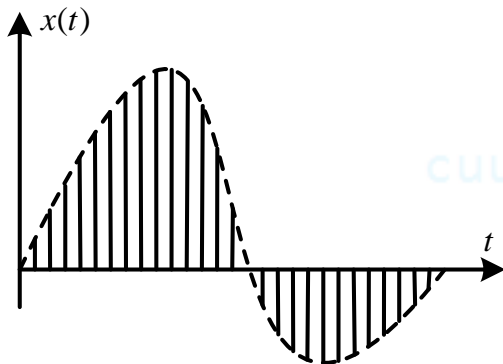
## 2.2. Tín hiệu liên tục và rời rạc



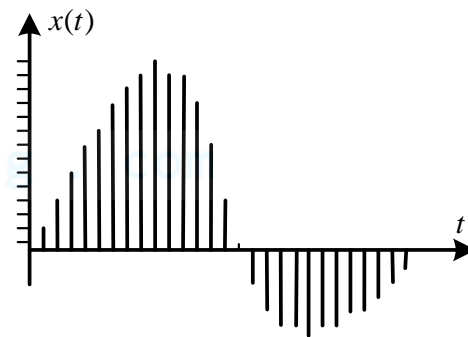
Tín hiệu tương tự (biên độ, thời gian liên tục)



Tín hiệu lượng tử (biên độ rời rạc, thời gian liên tục)



Tín hiệu rời rạc (biên độ liên tục, thời gian rời rạc)



Tín hiệu số (biên độ, thời gian rời rạc)

## 2.3. Tín hiệu năng lượng – TH công suất

---

- Tín hiệu năng lượng hữu hạn gồm các tín hiệu có thời hạn hữu hạn, các tín hiệu quá độ xác định và ngẫu nhiên.
- Tín hiệu công suất trung bình hữu hạn gồm các tín hiệu tuần hoàn, tín hiệu có thời hạn vô hạn có giá trị tiến đến hằng số khác không khi  $t$  dần ra vô cùng

## 2.4. Các phân loại khác

---

- Dựa vào bề rộng phổ của tín hiệu có thể phân loại tín hiệu như sau: tín hiệu (TH) tần số thấp, TH tần số cao, TH dải rộng, TH dải hẹp.
- Dựa vào biên độ của TH có thể phân loại thành TH có biên độ hữu hạn, TH có biên độ vô hạn.
- Dựa vào biến thời gian của TH có thể phân loại thành TH có thời hạn hữu hạn, TH có thời hạn vô hạn.
- Tín hiệu nhân quả: là tín hiệu có giá trị bằng không khi  $t < 0$ .

# 3. Biểu diễn giải tích tín hiệu

---

## 3.1. Biểu diễn rời rạc

### 3.1.1 Tín hiệu trực giao

### 3.1.2 Biểu diễn tín hiệu bằng chuỗi hàm trực giao

### 3.1.3 Một số ví dụ về biểu diễn rời rạc

## 3.2. Biểu diễn liên tục

### 3.2.1 Dạng tổng quát

### 3.2.2 Một số ví dụ về phép biến đổi liên tục



## 3.1. Biểu diễn rời rạc

### 3.1.1 Tín hiệu trực giao

Tích vô hướng giữa hai tín hiệu được định nghĩa

$$\left( x_1(t), x_2(t) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2^*(t) dt$$

Nếu tích vô hướng này bằng không thì ta nói hai tín hiệu trực giao

Nếu  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$

và

$$(x(t), x(t)) = 1$$



Tín hiệu chuẩn hóa

Tín hiệu trực chuẩn

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 \neq x_2 \\ 1 & x_1 = x_2 \end{cases}$$

## 3.1.2 Biểu diễn tín hiệu bằng chuỗi hàm trực giao

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n(t)$$

$\alpha_n$  Hệ số khai triển chuỗi được xác định theo phương trình

$$(x(t), \psi_n(t)) = \sum_{i,n=1}^N (\psi_i, \psi_n) \alpha_n$$

$\{\psi(t)\}$  Tập hàm được chọn, thường là tập hàm trực chuẩn, tức là:

$$(\psi_i, \psi_n) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$$

Khi đó  $\alpha_i = (x, \psi_i)$

### 3.1.3 Một số ví dụ về biểu diễn rời rạc

---

a. Chuỗi Fourier lượng giác

b. Chuỗi Fourier phức

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## a. Chuỗi Fourier lượng giác

Chuỗi Fourier lượng giác được tạo bởi tập hàm trực chuẩn là tập hàm điều hòa sau:

$$\psi_n(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}; \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right); \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right); n = 1, 2, \dots \right\} \quad T: \text{ chu kỳ tín hiệu}$$

Tín hiệu  $x(t)$  có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier

$$x(t) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + \beta_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]$$

Trong đó các hệ số khai triển  $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$  được xác định như sau:

$$\alpha_0 = (x, \psi_0) = \left( x, \frac{1}{\sqrt{T}} \right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) dt$$
$$\alpha_n = \left( x, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$
$$\beta_n = \left( x, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

# a. Chuỗi Fourier lượng giác

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos \left( n\omega_0 t + \theta_n \right) \quad (2)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$a_0, a_n, b_n, c_n$ : hệ số khai triển chuỗi Fourier.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  tần số cơ bản của tín hiệu

T: chu kỳ của tín hiệu

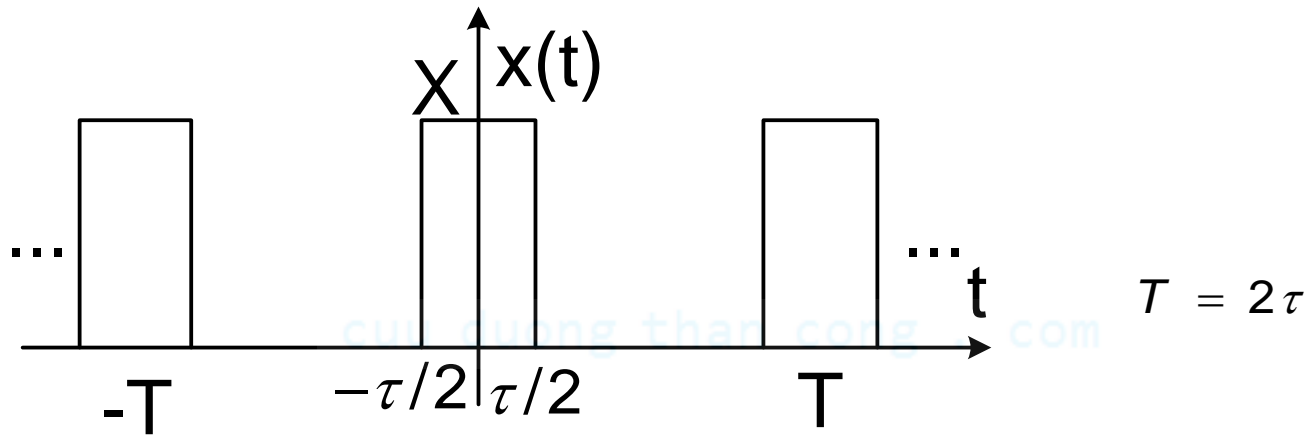
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos (n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin (n\omega_0 t) dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$

## a. Chuỗi Fourier lượng giác- Ví dụ

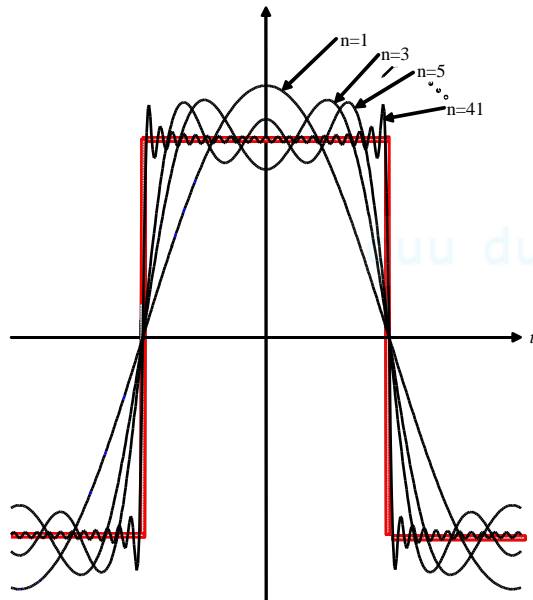
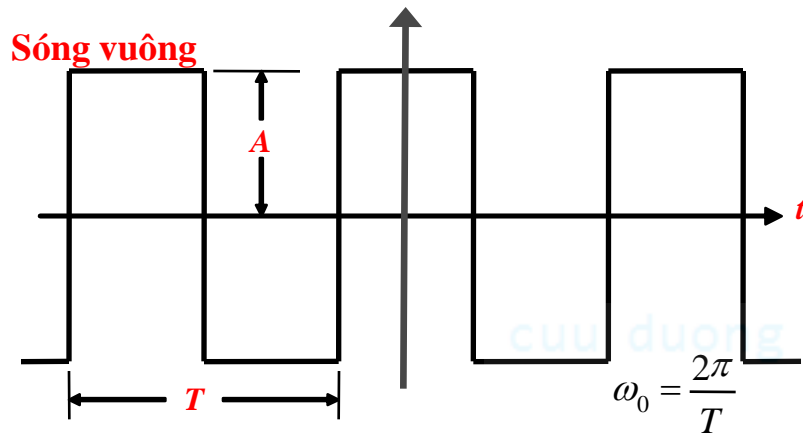


$$a_n = \frac{2X}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2X}{n\pi}, & n = 1, 5, 9 \dots \\ -\frac{2X}{n\pi}, & n = 3, 7, 11 \dots \end{cases} \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{X}{2} \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

$$a_n = \left( \frac{2X}{n\pi} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \text{ odd}$$

$$x(t) = \frac{X}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} \left( \frac{2X}{n\pi} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\omega_0 t$$

# a. Chuỗi Fourier lượng giác- Ví dụ



$$\frac{4A}{\pi} \left( \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 9\omega_0 t + \dots + \frac{1}{n} \cos n\omega_0 t \right)$$

## b. Chuỗi Fourier phức

Tập hàm điều hòa phức trực chuẩn được chọn:

$$\psi_n(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn \frac{2\pi}{T} t} ; n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \right\} \quad T: \text{chu kỳ tín hiệu}$$

Chuỗi Fourier phức tương ứng

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{T} e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad \alpha_n = \left( x, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

Hay:

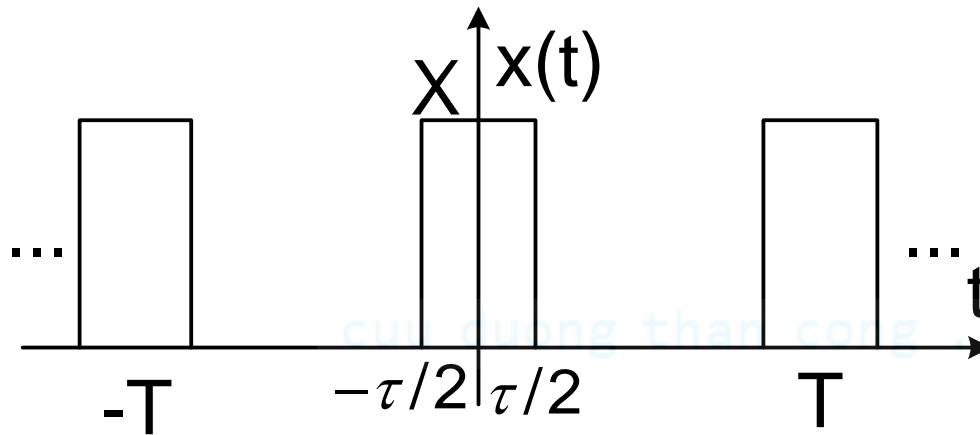
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn \omega_0 t} \quad (3) \quad X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn \omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Chuỗi (1), (2), (3) có quan hệ với nhau như sau:  $\alpha_0 = X_0 \quad C_n = 2|X_n|$

$$X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$



## a. Chuỗi Fourier phức - Ví dụ



$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} X e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{X}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

## 3.2. Biểu diễn liên tục TH

### 3.2.1 Dạng tổng quát

Biến đổi thuận

$$X(s) = \int_{\tau} x(t) \varphi(t, s) dt$$

Biến đổi ngược

$$x(t) = \int_{\Omega} X(s) \psi(s, t) ds$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$\varphi(t, s)$  được gọi là nhân liên hợp

$\psi(s, t)$  được gọi là nhân biến đổi

## 3.2.2 Một số ví dụ về phép biến đổi liên tục

Biến đổi Laplace

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad x(t) = L^{-1}[X(s)] = \begin{cases} \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\alpha}^{c+j\alpha} X(s) e^{st} ds & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Biến đổi Fourier

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

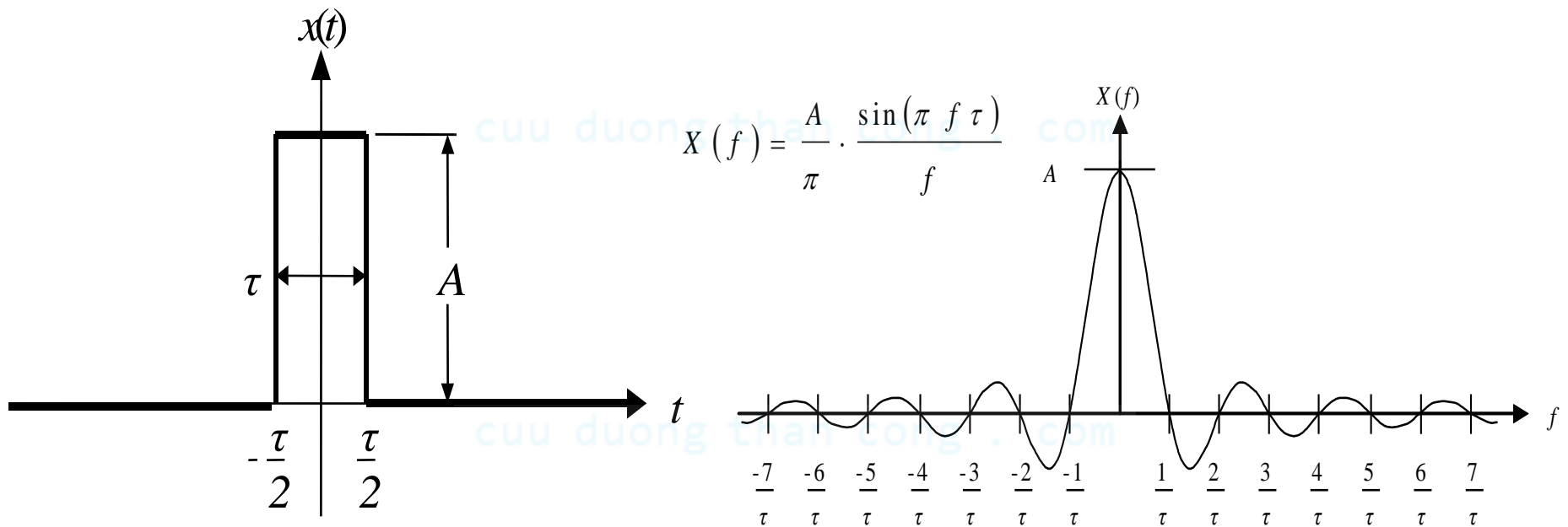
Biến đổi Hilbert

$$x(t) \leftrightarrow \hat{x}(t)$$

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

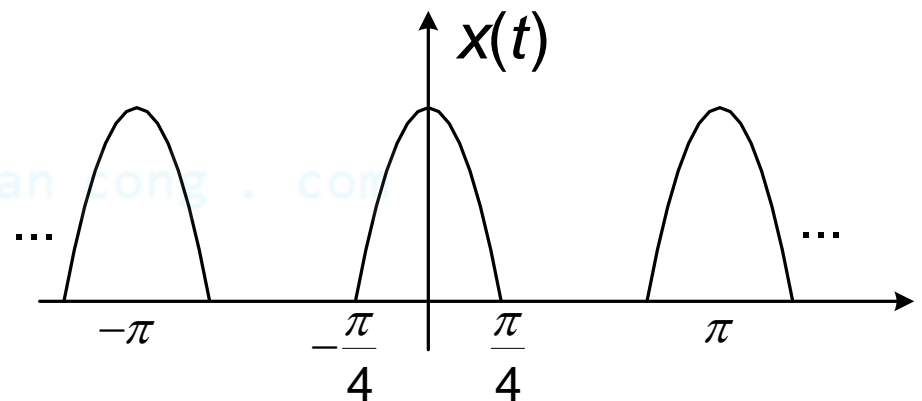
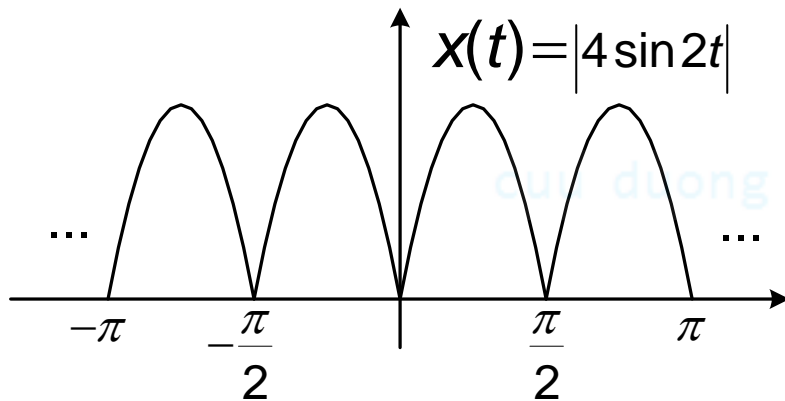
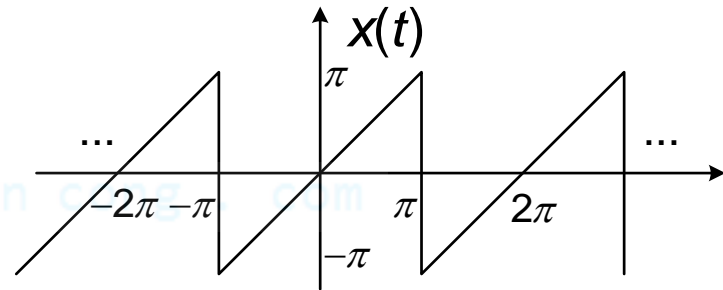
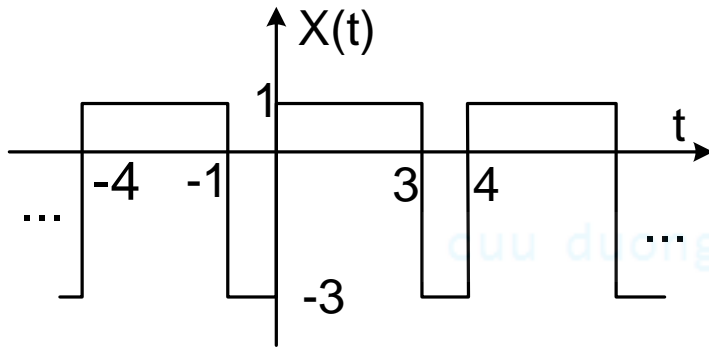
$$x(t) = H^{-1}[\hat{x}(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

# • Biến đổi Fourier-Ví dụ



# Bài tập

1. Tìm chuỗi Fourier lượng giác và chuỗi Fourier phức các tín hiệu sau



# Bài tập

2. Tìm  $X(\omega)$  của các tín hiệu sau:

a.  $x(t) = e^{-2|t|}$

b.  $x(t) = \begin{cases} t + 1 & -1 < t < 0 \\ -t + 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$

c.  $x(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$

3. Tìm  $x(t)$  biết các  $X(\omega)$  như sau:

a.  $X(\omega) = e^{-|\omega|}$

b.  $X(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |\omega| \leq 2 \\ 0 & |\omega| > 2 \end{cases}$