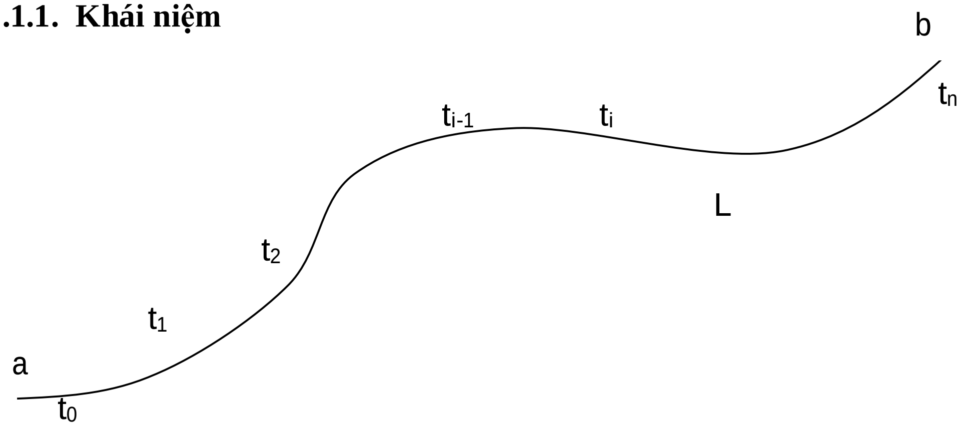
Chương 2
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

2.1. Tích phân đường loại 1

2.1.1. Khái niệm



Giả sử L là một đường cong trong không gian xác định bởi phương trình tham số $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ \ a \le t \le b$ và $f(x,y,z)$ là một hàm xác định trên L.

Chia cung L thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm chia tương ứng với các tham số $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Gọi độ dài cung thứ i là Δl_i (i=1,…,n) và lấy trên cung thứ i một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ bất kỳ và lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$.

Khi n $\to \infty$ sao cho max(Δl_i) $\to$ 0 mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia cung L và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó gọi là tích phân đường loại một của hàm $f(x,y,z)$ dọc theo cung L và ký hiệu

$$I = \int_L f(x,y,z)\,dl$$

Khi đó ta nói rằng hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên cung L.

<u>Chú ý:</u>

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung lấy tích phân, tức là $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)\,dl$.

- Nếu L là đường cong phẳng thì tích phân đường loại một của hàm $f(x,y)$ dọc theo L được ký hiệu $\int_L f(x,y)\,dl$

- Ý nghĩa thực tế của tích phân đường loại một có thể được suy ra trực tiếp từ định nghĩa như sau: Giả sử có một dây vật chất hình dạng L và có khối lượng là $f(x,y,z)$ phụ thuộc vào điểm $M(x,y,z)$ thì $I=\int_L f(x,y,z)\,dl$ chính là khối lượng của dây vật chất.

- Nếu $f(x,y,z)\equiv 1$ thì $\int_L dl$ chính là độ dài cung L.

- Nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục dọc theo cung trơn L thì tồn tại tích phân $\int_L f(x,y,z)\,dl$.

2.1.2. Tính chất

- **Tính chất 1**: Nếu hàm $f(x,y,z); g(x,y,z)$ khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$, còn a, b là các hằng số thì $\int_{\overset{\frown}{AB}} [af(x,y,z)+bg(x,y,z)]dl = a\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl + b\int_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y,z)dl$

- **Tính chất 2:** Nếu hàm $f(x,y,z)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và C là một điểm trên cung đó thì $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(x,y,z)dl + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(x,y,z)dl$

- **Tính chất 3:** Nếu $f(x,y,z)>0$ và khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl \geq 0$

- **Tính chất 4:** Nếu $f(x,y,z)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ thì $|f(x,y,z)|$ cũng khả tích trên cung ấy và $\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl\right| \leq \int_{\overset{\frown}{AB}} |f(x,y,z)|\,dl$

- **Tính chất 5:** (Định lý về giá trị trung bình)

  Nếu $f(x,y,z)$ liên tục trên cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có độ dài l, khi ấy tồn tại một điểm $M_1(x_1,y_1,z_1)$ trên $\overset{\frown}{AB}$ sao cho $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl = f(x_1,y_1,z_1).l$

2.1.3. Cách tính

Tích phân đường loại 1 được tính bằng cách đưa về tích phân xác định nhờ suy ra trực tiếp từ định nghĩa như sau

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \lim_{n\to\infty}\sum_i f(x_i,y_i,z_i).\Delta l_i = \lim_{n\to\infty}\sum_i f(x_i,y_i,z_i).\left|\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}\right|\Delta t_i$$

Giới hạn cuối cùng của vế phải chính là tích phân xác định

$$\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt$$

Vậy $$\boxed{\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt}$$

Đặc biệt nếu L là đường cong phẳng và hàm $f(x,y)$ xác định trên L thì công thức tính của tích phân đường loại 1 được viết như sau:

- Nếu cung L cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t\in[a,b]$ thì ta có

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

- Nếu cung L cho bởi phương trình tổng quát $y = y(x), \quad x\in[a,b]$ thì ta có

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

- Nếu cung L được cho trong hệ tọa độ cực với phương trình $r = r(\varphi), \quad \varphi\in[\alpha,\beta]$ thì ta có

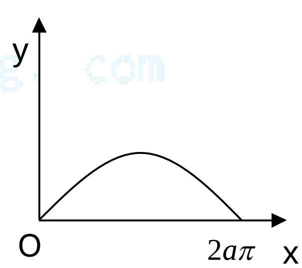
$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r'(\varphi))^2+(r(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Ví dụ 2.1 Tính $I = \int_L y^2 dl$ trong đó L là một nhịp xiclôit.

Giải

Ta có phương trình tham số của L

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

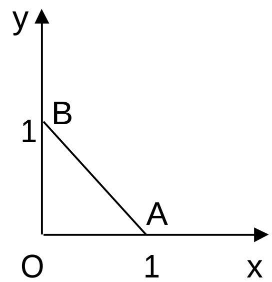


$$\Rightarrow [x'(t)]^2+[y'(t)]^2 = 4a\sin^2\frac{t}{2}$$

Vậy $I = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2.2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256}{15}a^3$

Ví dụ 2.2 Tính $I=\int\limits_L (x+y)dl$ trong đó L là chu vi tam giác OAB với các đỉnh O(0,0), A(1,0), B(0,1).

Giải



Ta có $L=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}$.

Trên $\overline{OA}: y=0, 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overline{OA}} (x+y)dl=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

Trên $\overline{OB}: x=0, 0\le y\le 1$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overline{BO}} (x+y)dl=\int\limits_{\overline{OB}} (x+y)dl=\int\limits_0^1 ydy=\frac{1}{2}$$

Trên $\overline{AB}: y=1-x, 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overline{AB}} (x+y)dl=\int\limits_0^1 [x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}dx=\sqrt{2}\int\limits_0^1 dx=\sqrt{2}$$

Vậy $I=\int\limits_L (x+y)dl=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$

Ví dụ 2.3. Tính $I=\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, với L là đường đinh ốc xác định bởi phương trình tham số $L:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \quad t\in[0,2\pi] \\ z=t \end{cases}$

Giải

Ta có $\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2=4\sin^2 t+4\cos^2 t+1=5$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{2\pi}(4+t^2)\sqrt{5}dt=\sqrt{5}\left(4\pi+\frac{\pi^3}{3}\right).$$

Ví dụ 2.4. Tính $I=\int\limits_L xydl$, với L là giao tuyến của mặt paraboloit eliptic $z=2-x^2-2y^2$ và mặt trụ paraboloit $z=x^2$ nằm trong phần góc tọa độ thứ nhất nối 2 điểm $A(0,1,0)$ và $B(1,0,1)$.

Giải

Tham số hóa đường cong $L:\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \\ z = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

Ta có $\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2 = 1 + \dfrac{t^2}{1-t^2} + 4t^2 = \dfrac{1+4t^2-4t^4}{1-t^2}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}.\sqrt{\frac{1+4t^2-4t^4}{1-t^2}}dt = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}dt = \frac{\pi+2}{8}$$

2.2. Tích phân đường loại 2

2.2.1. Định nghĩa

Giả sử L là một đường cong trong không gian xác định bởi phương trình tham số $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \le t \le b$ và $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)$ xác định trên L.

Chia cung L thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm chia $A_0, A_1, \ldots A_n$ tương ứng với các tham số $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$.

Gọi hình chiếu của vector $\overrightarrow{\Delta r_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên các trục tọa độ lần lượt là $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. Lấy trên cung thứ i một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ bất kỳ và lập tổng tích phân $I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i + R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i$.

Khi n $\to \infty$ sao cho max(Δl_i) $\to$ 0 mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia cung L và cách chọn điểm M_i thì giới hạn đó gọi là tích phân đường loại hai của các hàm $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)$ dọc theo cung L và ký hiệu $I = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

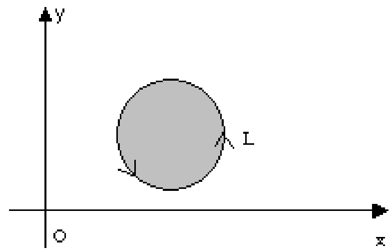
Khi đó ta nói rằng các hàm $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)$ khả tích trên cung L.

<u>Chú ý:</u>

- Nếu đổi hướng đi thì tích phân đường loại hai đổi dấu, tức là

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy + Rdz$$

- Nếu L là đường cong phẳng kín, ta quy ước chọn chiều dương trên L là chiều sao cho một người đi dọc chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình về phía tay trái. Ký hiệu tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$.



- Nếu các hàm $P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)$ liên tục trên cung L trơn từng khúc thì tích phân đường loại hai của chúng dọc theo cung L tồn tại.
- Ý nghĩa thực tiễn của tích phân đường loại hai có thể được xét như sau: Gọi hàm vector $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ là lực tác dụng lên một chất điểm chạy dọc theo cung L phụ thuộc vào vị trí của chất điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

Khi đó tích phân đường loại hai $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$ chính là công sinh ra bởi lực $\overrightarrow{F}$ và có thể được viết dưới dạng vector $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L \overrightarrow{F}d\vec{r}$

2.2.2. Tính chất

Tích phân đường loại hai có các tính chất tương tự như tích phân đường loại một.

2.2.3. Cách tính

Giả sử các hàm $P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)$ liên tục trên cung trơn L xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in[a,b] \\ z=z(t) \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\boxed{\begin{aligned}\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b \{&P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\\ &R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt\end{aligned}}$$

Đặc biệt nếu L là đường cong phẳng và các hàm $P(x,y);Q(x,y)$ xác định trên L thì công thức tính của tích phân đường loại 2 được viết như sau:

- Nếu cung L cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$ thì ta có

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

- Nếu cung L cho bởi phương trình tổng quát $y = y(x), \quad x \in [a,b]$ thì ta có

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx$$

Ví dụ 2.5 Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F} = (y - x^2)\vec{i} + xy\vec{j} - (2z - x)\vec{k}$ dọc theo cung L có phương trình là $L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

Giải Ta có công sinh ra của lực $\vec{F}$ được xác định

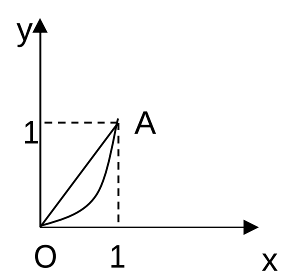
$$W = \int_L (y - x^2)dx + xydy + (-2z + x)dz = \int_0^1 \left[(t^2 - t^2) + t.t^2.2t + (-2t^3 + t)3t^2\right]dt$$

$$= \int_0^1 (2t^4 - 6t^5 + 3t^3)dt = \frac{3}{20}$$

Ví dụ 2.6 Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{OA}} x^2dx + xydy$ với O(0,0), A(1,1) được nối theo hai đường

a) Đoạn thẳng OA.

b) Theo đường Parabol $y = x^2$



Giải

a) Theo đoạn thẳng OA có phương trình $y = x, 0 \le x \le 1$, ta có

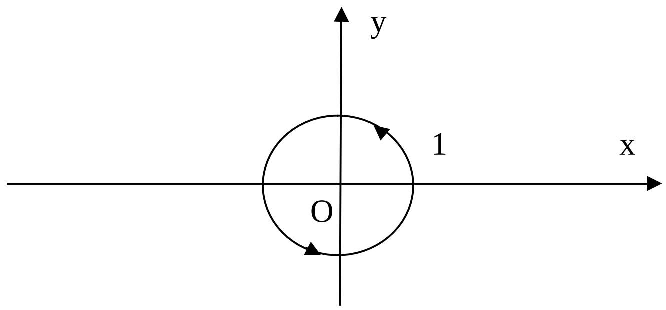
$$I = \int_{\overset{\frown}{OA}} x^2dx + xydy = \int_0^1 (x^2 + x^2)dx = \frac{2}{3}$$

b) Theo parabol có phương trình $y = x^2, 0 \le x \le 1$, ta có

$$I = \int_{\overset{\frown}{OA}} x^2dx + xydy = \int_0^1 \left(x^2 + x^3.2x\right)dx = \frac{11}{15}$$

Ví dụ 2.7 Tính tích phân $I = \oint\limits_L y^2dx - x^2dy$, với L là đường tròn đơn vị.

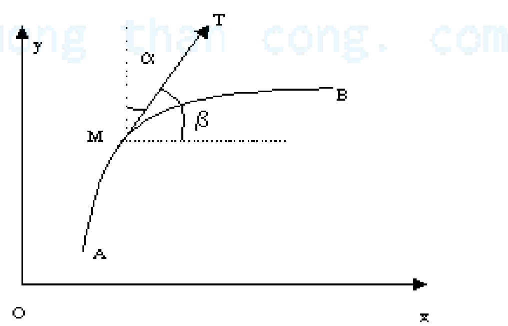
Giải



Phương trình tham số của $L:\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$, ta có

$$I = \oint\limits_L y^2dx - x^2dy = \int\limits_0^{2\pi} [\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t \cos t]dt = 0$$

2.2.4. Liên hệ giữa hai loại tích phân đường



Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa vectơ tiếp tuyến với cung L (hướng theo chiều lấy tích phân của cung L) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Ta có công thức liên hệ giữa hai loại tích phân đường như sau:

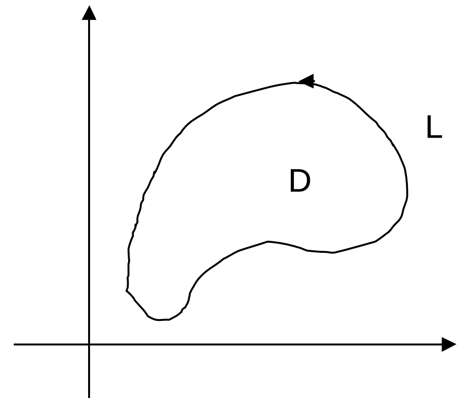
$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl$$

2.2.5. Công thức Green

Định lý: Nếu các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền kín D được bao bởi biên là đường cong trơn L thì ta có công thức Green

$$\boxed{\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

trong đó tích phân dọc theo L lấy theo hướng dương.



Chú ý:

Công thức Green còn dùng để tính diện tích của miền phẳng, kín như sau:

$$\boxed{S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx}$$

Ví dụ 2.8: Tính tích phân $I = \oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ với L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, lấy theo hướng dương.

Giải

Ta có $P = xy + x + y \Rightarrow P'_y = x + 1$

$$Q = xy + x - y \Rightarrow Q'_x = y + 1$$

Áp dụng công thức Green ta có

$$I = \oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint_D (y - x)dxdy$$

trong đó D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\varphi \end{cases}$; |J| = abr; D→ D': $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (br\sin\varphi - ar\cos\varphi)abrdr = ab\int_0^{2\pi} (b\sin\varphi - a\cos\varphi)d\varphi \int_0^1 r^2 dr$$

$$= ab(-b\cos\varphi - a\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} . \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = 0$$

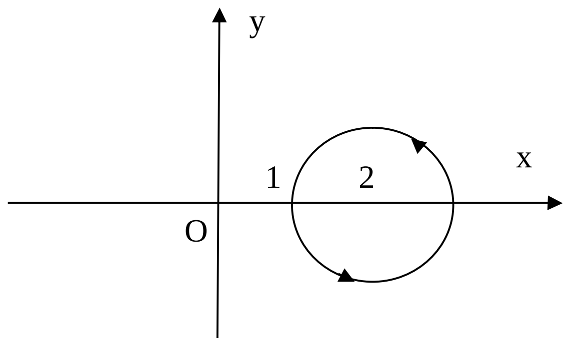
Ví dụ 2.9: Tính tích phân $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ theo chiều dương trong các trường hợp sau

a. $L: \ (x-2)^2 + y^2 = 1$

b. L là hình vuông có 4 đỉnh là $(1,1); \quad (-1,1); \quad (1,-1); \quad (-1,-1)$

Giải

a. $L: \ (x-2)^2 + y^2 = 1$

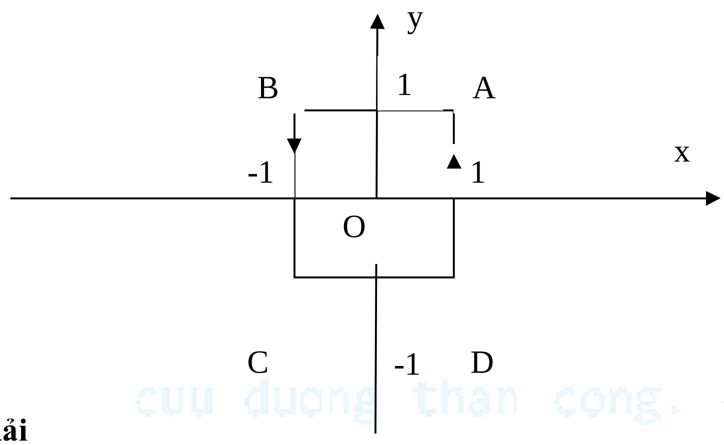


Ta có $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $\quad Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

Áp dụng công thức Green ta có

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \oint_L \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

b. L là hình vuông có 4 đỉnh là $(1,1); \quad (-1,1); \quad (1,-1); \quad (-1,-1)$



Giải

Vì các hàm $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\quad Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ gián đoạn tại gốc tọa độ nên chúng ta không áp dụng được công thức Green

Ta có $AB: y=1, \ x: 1 \to -1 \Rightarrow \displaystyle\oint_{AB} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = -\int_1^{-1} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

$$BC: x=-1,\ y:1\to -1 \Rightarrow \oint_{BC}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_1^{-1}\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\pi}{2}$$

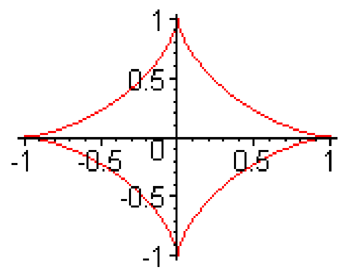
$$CD: y=-1,\ x:-1\to 1 \Rightarrow \oint_{CD}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$$

$$DA: x=1,\ y:-1\to 1 \Rightarrow \oint_{DA}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\pi}{2}$$

Vậy $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi$

Ví dụ 2.10 Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường axtrôit.

$$L:\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$



Giải

Ta có $\begin{cases} dx=-3a\cos^2 t\sin t dt \\ dy=3a\sin^2 t\cos t dt \end{cases}$

Áp dụng công thức tính diện tích ta có

$$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\left(3a\cos t\sin^2 t\right)-a\sin^3 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)\right]dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt=\frac{3\pi a^2}{8}$$

2.3. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng tích phân đường loại hai $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy$ không những phụ thuộc và hai điểm A, B mà còn phụ thuộc vào đường cong $\overset{\frown}{AB}$. Khi nào thì tích phân đó chỉ phụ thuộc vào các điểm đầu và cuối mà không phụ thuộc vào đường nối chúng?

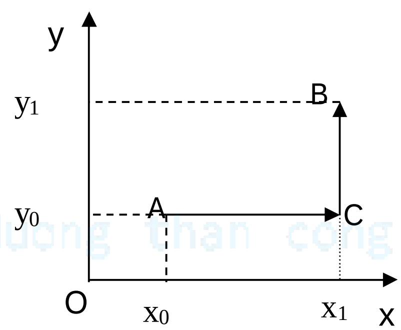
Định lý: Giả sử hai hàm P(x,y), Q(x,y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó bốn mệnh đề sau tương đương

1. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall$ (x,y) $\in$ D.

2. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, trong đó L là đường cong kín bất kỳ nằm trong D
3. $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào dạng của đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B ($\overset{\frown}{AB}$ là đường bất kỳ nằm trong D)
4. Biểu thức Pdx+Qdy là vi phân toàn phần của một hàm u(x,y) nào đó trong miền D, tức là du = Pdx+Qdy

Giả sử các hàm P(x,y), Q(x,y) thỏa mãn định lý, khi đó tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào dạng đường cong mà chỉ phụ thuộc vào 2 đầu A, B. Ta có cách tính tích như sau:

Cách 1:.



Giả sử A(x_0, y_0), B(x_1, y_1). Ta thường viết tích phân dưới dạng $I = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$

Chọn C(x_1, y_0), ta thấy rằng AC: $y = y_0 \Rightarrow dy = 0$, $x \in [x_0, x_1]$

CB: $x = x_1 \Rightarrow dx = 0$, $y \in [y_0, y_1]$

Từ đó suy ra

$$\boxed{\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy}$$

Cách 2: Tìm hàm u(x,y) $\in$ D sao cho du = Pdx+Qdy . Khi đó

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)}$$

Ví dụ 2.11 Tính tích phân $I = \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ theo đường không cắt trục Oy.

Giải

Ta có

$$P = \frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$
$$Q = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Suy ra tích phân I không phụ thuộc đường đi.

Cách 1: Ta có

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_2^1 \frac{1}{x^2} dx - \int_1^2 dy = -\frac{3}{2}$$

Cách 2: Ta có

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad I = \left(-\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}$$

Trong không gian Oxyz ta có định lý tương tự

Định lý: Giả sử các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên V trong không gian Oxyz. Khi đó các mệnh đề sau tương đương

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\forall$ (x,y,z) $\in$ V.
2. $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$, trong đó L là đường cong kín bất kỳ nằm trong V.
3. $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào dạng của đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B ($\overset{\frown}{AB}$ là đường bất kỳ nằm trong V).
4. Biểu thức Pdx+Qdy+Rdz là vi phân toàn phần của một hàm u(x,y,z) nào đó trong miền V, tức là $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

Ví dụ 2.12. Tính tích phân $I = \int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} zydx + xzdy + xydz$

Giải

Ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y$

Suy ra tích phân I không phụ thuộc đường đi

Cách 1: Ta có

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} zydx + xzdy + xydz = \int_1^6 6dx + \int_2^1 18dy + \int_3^1 6dz = 30 - 18 - 12 = 0$$

Cách 2: Ta có

$$zydx + zxdy + xydz = d(xyz). \Rightarrow I = (xyz)\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 6 - 6 = 0\,.$$

Ví dụ 2.13 Tính tích phân $I = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + \left(x^2 - z^2\right)dy - 2yzdz$

Giải

Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$

Suy ra tích phân I không phụ thuộc đường đi

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + \left(x^2 - z^2\right)dy - 2yzdz$$

$$= \int_0^1 0dx + \int_0^2 dy - 2\int_0^3 2zdz = 2 - 2z^2\Big|_0^3 = -16$$