IV. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA QHTT

Định lý 1: Tập hợp tất cả các phương án của một bài toán QHTT là tập lồi, hay là miền nghiệm cho phép

Định lý 2: Hàm mục tiêu của bài toán QHTT sẽ đạt min hoặc max tại một điểm cực biên của tập D mà nhiều điểm cực biên thì nó sẽ đạt max hoặc min tại những điểm là tổ hợp lồi của các điểm đó.

Định lý 3: Nếu véc tơ A_1, A_2,… A_k là độc lập tuyến tính và thỏa mãn $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = b$ trong đó $x_j > 0$, $j = 1:k$ thì điểm $x = (x_1, x_2, \dots x_k, 0, 0\dots,0)$ là điểm cực biên của tập lồi đa diện D.

Định lý 4: Nếu $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ là điểm cực biên của tập lồi đa diện D thì các véc tơ A_j trong biểu diễn $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = b$ ứng với các thành phần $x_j > 0$ thành lập hệ độc lập tuyến tính. Vì ma trận A có m dòng nên suy ra rằng điểm cực biên không quá m thành phần dương.

Định lý này có thể phát biểu khác như sau: Phương án của QHTT chứa một số biến dương bằng số các ràng buộc dạng đẳng thức độc lập được thỏa mãn còn các biến còn lại bằng không.

Định lý 5: Để $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ là phương án cực biên của QHTT dưới dạng chính tắc thì điều kiện cần và đủ là các vectơ cột của A_j của ma trận A các thành phần x_j là độc lập tuyến tính

V. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QHTT

5.1. Phương pháp thử lần lượt

Giả sử bài toán có m ràng buộc độc lập được cho ở dạng chính tắc: Ax =b (1)

Ta thực hiện các bước như sau:

1. Chọn biến cơ sở

- Ta chọn một điểm tùy ý thuộc đa diện D đó là tập n số $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$. Theo định lý 4 của quan hệ tuyến tính thì có m số dương, còn những biến khác bằng 0. Gọi các biến dương của điểm xuất phát làm biến cơ sở $(x_1, x_2, \dots x_m, 0, 0, \dots)$

2. Tìm nghiệm xuất phát (nghiệm thử thứ nhất)

- Thay các biến cơ sở vào ràng buộc (1) ta có m phương trình chứa m ẩn số

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rm}x_m = b, r = 1:m$$

Viết dưới dạng triển khai: $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$ (2)

❖ Giải hệ phương trình tuyến tính (2) ta tìm được nghiệm xuất phát (x_1^0, x_2^0, …x_m^0)

❖ Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là: $Z_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_mx_m^0$

3. Chọn nghiệm thử thứ hai

❖ Thêm vào biến x_{m+1} lúc này ràng buộc có dạng:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rm}x_m + a_{rm+1}x_{m+1} = b, r = 1:m \qquad (3)$$

Hệ (3) gồm m phương trình với m+1 biến

Hệ (3) có nghiệm đơn trị khi các phương trình tạo thành hệ phụ thuộc, do đó cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào các cột còn lại với hệ số là y_i:

$$a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \ldots + a_{rm}y_m = a_{r,m+1} \qquad (4)$$

Hệ (4) có nghiệm duy nhất là: (y_1^0, y_2^0, …y_m^0)

❖ Lấy các số hạng tương ứng của hệ (3) trừ đi số hạng tương ứng của hệ (4) ta ký hiệu bội số đó là $\lambda \geq 0$ ta được

$$a_{r1}(x_1 - \lambda y_1) + a_{r2}(x_2 - \lambda y_2) + \ldots + a_{rm}(x_m - \lambda y_m) + a_{r,m+1} + \lambda = b_r, r = 1:m \qquad (5)$$

Hệ (5) là biến thể của hệ (4) chỉ có các ẩn là khác.

❖ Chọn nghiệm thử thứ 2 cho hệ (5) là:

$$(x_1^0 - \lambda y_1^0), (x_2^0 - \lambda y_2^0), \ldots, \ (x_m^0 - \lambda y_m^0), \lambda \qquad (6)$$

– Do có m + 1 biến nên một trong các biến phải nhận giá trị không. Muốn biết biến nào trong hệ (6) phải nhận giá trị không ta phải thực hiện như sau:

– Tính giá trị của hàm mục tiêu với giá trị thứ nhất và nghiệm thử thứ hai:

$Z_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_mx_m^0$

$Z_1 = c_1(x_1^0 - \lambda y_1^0) + c_2(x_2^0 - \lambda y_2^0) + \ldots + c_m(x_m^0 - \lambda y_m^0) + c_{m+1}\lambda$

Ta có số gia: $\Delta Z_1 = Z_1 - Z_0 = \lambda c_{m+1} - (c_1y_1^0 + c_2y_2^0 + \ldots + c_my_m^0) = \lambda(c_{m+1} - \gamma_{m+1})$

Trong đó $\gamma_{m+1} = c_1y_1^0 + c_2y_2^0 + \ldots + c_my_m^0$

Ta gọi $(c_{m+1} - \gamma_{m+1})$ là hiệu xuất

– Có thể có 3 trường hợp xảy ra:

- $\Delta Z = 0$: nghiệm xuất phát và nghiệm mới đưa vào như nhau. Suy ra có hai đỉnh tiếp xúc giữa đa diện nghiệm D và mặt đồng mức Z

- $\Delta Z < 0$: Với bài toán $Z \to Max$ nghiệm mới đưa vào xấu hơn nghiệm xuất phát, loại nghiệm mới; Nhưng với bài toán $Z \to Min$ nghiệm mới đưa vào tốt hơn nghiệm xuất phát, nhận nghiệm mới.
- $\Delta Z > 0$: Với bài toán $Z \to Max$ nghiệm mới đưa vào tốt hơn nghiệm xuất phát, nhận nghiệm mới; Nhưng với bài toán $Z \to Min$ nghiệm mới đưa vào xấu hơn nghiệm xuất phát, loại nghiệm mới.

– Khi đã chọn đã chọn được nghiệm mới tốt hơn hoặc bằng nghiệm xuất phát ta đưa nó vào cơ sở và cần loại bỏ một nghiệm trong biến xuất phát (vì theo định lý 4 chỉ có m nghiệm dương)

– Giả thiết đã đưa biến mới thứ m + 1 vào cơ sở, khi đó ta có thể viết các biến mới của phương án theo hệ (6); một biến thứ I nào đó phải thoả mãn phương trình:

$$x_i^0 - \lambda y_i^0 = 0 \to \lambda = \frac{x_i^0}{y_i^0}$$

– Còn đối với biến j ≠ i thì $x_i^0 - \lambda y_i^0 > 0$

Từ đó suy ra phải loại trừ biến nào ứng với λ > 0 và nhỏ nhất ($0 < \lambda = Min \dfrac{x_i^0}{y_i^0}$

4. Thực hiện liên tục các thủ thuật toán ở trên

Đưa vào các biến chưa dùng m + 2, m + 3,… tính ΔZ_2, ΔZ_3,… cho tới khi thử hết các biến cơ sở.

$$\begin{aligned}
&\Delta Z_2 = \lambda (c_{m+2} - \gamma_{m+2}) \\
&\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\
&\Delta Z_i = \lambda (c_{m+i} - \gamma_{m+i})
\end{aligned}$$

<u>BÀI TẬP ÁP DỤNG:</u> PHƯƠNG PHÁP THỬ LẦN LƯỢT

Bài tập 1: Tìm x^* (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho:

$$\begin{aligned}
&\langle 1\rangle Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to Max \\
&\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 800 \end{cases} \\
&\langle 3\rangle x_j \geq 0,\ j = 1:4
\end{aligned}$$

Bài làm:

❖ Chọn biến cơ sở: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên biến cơ sở là: (x_1, x_2, 0, 0)

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 = 800 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 220$, $x_2^0 = 120$, Vậy nghiệm xuất phát là: x = (220,120,0,0) và giá trị ban đầu là $Z_0 = 220 + 2.120 = 460$

❖ Thử đưa x_3 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 800 \end{cases}$$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 7 \\ 2y_1 + 3y_2 = -1 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 4$, $y_2^0 = -3$

Hiệu suất của x_3 là: $\gamma_3 = 1.4 + 2.(-3) = -2$

$$C_3 - \gamma_3 = -3 - (-2) = -1 < 0$$

Do vậy đưa x_3 vào không có lợi

❖ Thử đưa x_4 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_4 = 800 \end{cases}$$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 = 10 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 13/5$, $y_2^0 = 8/5$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 1.13/5 + 2.8/5 = 29/5$

$$C_4 - \gamma_4 = 4 - (29/5) = -9/5 < 0$$

Do vậy đưa x_4 vào không có lợi

❖ Kết luận: vậy phương án tối ưu là : $x^* = (220,120,0,0)$ và giá trị tối ưu là $Z_{x^*} = 220 + 2.120 = 460$

Bài tập 2: Tìm x_1, x_2 sao cho:

$$\langle 1\rangle f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:2$$

Bài làm:

❖ Chuyển bài toán QHTT dạng tổng quát về chính tắc ta có:

$$\langle 1\rangle f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:5$$

❖ Chọn biến cơ sở:

Hệ ràng buộc có 3PT, theo định lý 4 sẽcó 3 nghiệm dương, nên biến cơ sở là: (x_1, x_2, x_3, 0, 0)

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 6$, $x_2^0 = 3$, $x_3^0 = 6$

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (6,3,6,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 2.6 + 5.3 = 27$

❖ Thử đưa x4 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$ hệ có 3 PT mà 4 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 0{,}5$, $y_2^0 = -0{,}5$, $y_3^0 = 1{,}5$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 2.0{,}5 – 5.0{,}5 + 0.1{,}5 = - 1{,}5$

$$c_4 - \gamma_4 = 0 – (-1{,}5) = 1{,}5 > 0$$

Nên đưa x_4 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{6}{0,5} = 12$; $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{3}{-0,5} = -6$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{6}{1,5} = 4$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_I > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_3 khỏi biến cơ sở;

Biến cơ sở mới là: $(x_1, x_2, 0, x_4, 0)$

Thay biến cơ sở mới vào hệ ràng buộc ta có: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ giải hệ ràng buộc ta được: $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 5$, $x_4^0 = 4$ và giá trị hàm mục tiêu $Z_1 = 2.4 + 5.5 + 0.4 = 33$

$\Delta Z_1 = Z_1 - Z_0 = 33 - 27 = 6 > 0$

❖ Thử đưa x_5 vào cơ sở ta có hệ phương trình ràng buộc

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$ có 3 PT mà 4 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} y_1 + 4y_2 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$ giải hệ ta được: $\begin{cases} y_1^0 = 4/3 \\ y_2^0 = -1/3 \\ y_4^0 = -11/3 \end{cases}$

Hiệu suất của x_5 là: $\gamma_5 = 2.4/3 - 5.1/3 = 1$

$c_5 - \gamma_5 = 0 - 1 < 0$ do đó đưa x_5 vào không có lợi

Vậy phương án tối ưu là: $x^* = (4,5,0,4,0)$ và giá trị tối ưu là $Z^* = 2.4 + 5.5 + 0.4 = 33$

Bài tập 3: Tìm x_1, x_2, sao cho
$$\langle 1\rangle f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \to Min$$
$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$
$$\langle 3\rangle x_j \geq 0,\ j = 1:6$$

Bài làm:

❖ Chọn biến cơ sở: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên chọn biến cơ sở là: $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 2$, $x_2^0 = 2$, $x_3^0 = 2$

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (2,2,2,0,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 6 + 10 + 6 = 22$

- Thử đưa x_4 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (x_1, x_2, x_3, x_4,0 ,0) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 = 1 \\ 2y_1 + 3y_3 = 0 \\ 2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

giải hệ ta được $y_1^0 = 3/17$, $y_2^0 = 4/17$, $y_3^0 = -2/17$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 9/17 + 12/17 - 6/17 = 15/17$

$$C_4 - \gamma_4 = -3 – 15/17 = -66/17 < 0$$

Nên đưa x_4 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{2}{3/17} = 34/3$; $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{2}{4/17} = 34/4$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{2}{-2/17} = -17$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_I > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_2 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là (x_1, 0, x_3, x_4,0 ,0); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$$

giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 0.5$, $x_3^0 = 3$, $x_4^0 = 8.5$

Vậy nghiệm mới là: x = (0.5, 0, 3, 8.5, 0, 0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = -15$

- Thử đưa x_5 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (x_1, 0, x_3, x_4, x_5 ,0) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$$

hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + 3y_3 = 1 \\ 4y_3 = 0 \end{cases}$$

giải hệ ta được $y_1^0 = 1/2$, $y_3^0 = 0$, $y_4^0 = -1/2$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_5 = 3/2 + 0 + 3/2 = 3$

$$C_5 - \gamma_5 = 2 – 3 = -1 < 0$$

Nên đưa x_5 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{0.5}{0.5} = 1$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{3}{0} = \infty$; $\lambda_4 = \frac{x_4^0}{y_4^0} = \frac{8.5}{-0.5} = -17$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_i > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_1 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là (x_1, 0, x_3, x_4,0 ,0); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có $\begin{cases} -x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_3^0 = 3$, $x_4^0 = 9$, $x_5^0 = 1$;

Vậy nghiệm mới là: x = (0, 0, 3, 9, 1, 0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = -16$

❖ Thử đưa x_6 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$ hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} -y_3 + y_4 = 0 \\ 3y_3 + y_5 = 0 \\ 4y_3 = 1 \end{cases}$ giải hệ ta được $y_3^0 = 1/4$, $y_4^0 = 1/4$, , $y_5^0 = -3/4$

Hiệu suất của x_5 là: $\gamma_6 = 3/4 – 3/4 – 6/4 = -6/4$

$$C_6 - \gamma_6 = 1 – (-6/4) = 10/4 >0$$

Nên đưa x_6 vào không có lợi nên

❖ Kết luận: vậy phương án tối ưu là: x* = (0, 0, 3, 9, 1, 0) và giá trị tối ưu là $Z_0 = -16$

5.2. Phương pháp lập bảng

1. Cơ sở toán học của phương pháp

❖ **Tính chất 1**: Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cơ bản tối ưu.

❖ **Tính chất 2**: Số phương án cơ bản là hữu hạn.

❖ **Tính chất 3**: Điều kiện cần và đủ để bài toán có phương án tối ưu là hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới khi $f(x) \to \min$ và bị chặn trên khi $f(x) \to \max$ trên tập hợp các phương án

❖ Chú ý: do tính chất 1 ta chỉ xét phương án cơ bản tức là sau khi đưa về chính tắc đã xuất hiện phương án cơ bản. Nếu đưa về dạng chính tắc mà vẫn chưa xuất hiện phương án cơ bản thì ta phải đặt ẩn giả thông qua bài toán phụ.

❖ Xuất phát từ phương án cơ bản, dùng tiêu chuẩn tối ưu để xác định một trong ba khả năng của bài toán:

- Phương án tối ưu
- Bài toán không có phương án tối ưu
- Khả hai khả năng trên không khẳng định được thì chuyển sang phương án cơ bản tiếp theo. Bài toán cứ lặp như vậy cho tới khi giải xong. Do tính chất 2 nên số lần lặp sẽ là hữu hạn. Việc chuyển phương án cơ bản này sang phương án cơ bản khác bằng cách thay đổi ẩn cơ bản bằng phương pháp Gauss – Jordan

PHƯƠNG PHÁP LẬP BẢNG

1. Tiêu chuẩn tối ưu

- Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi j ở bài toán $Z \to \min$ và $\Delta_j \geq 0$ với mọi j ở bài toán $Z \to \max$ thì phương án đang xét là phương án tối ưu
- Tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \leq 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \to \min$ và $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \leq 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \to \max$ thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

2. Chọn ẩn đưa vào và ẩn đưa ra

Trong hai trường hợp trên không xảy ra thì ta chuyển phương án

*** Ẩn đưa vào (x_L):**

- Bài toán $Z \to \min$ ẩn đưa vào ứng với cột có $\Delta_j > 0$ và lớn nhất
- Bài toán $Z \to \max$ ẩn đưa vào ứng với cột có $\Delta_j < 0$ và nhỏ nhất

*** Ẩn đưa ra (x_k):**

– Chung cho cả hai bài toán Z → max và Z → min ẩn đưa ra là ẩn ứng với hàng k

có $\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kl}} = \min(\frac{b_i}{a_{il}}$ với $a_{il} > 0$)

3. Ẩn cơ bản

Ẩn cơ bản còn gọi là ẩn độc lập tuyến tính, có hai đặc trưng

– Chỉ xuất hiện một lần trong các phương trình ràng buộc

– Có hệ số bằng + 1

TRÌNH TỰ LẬP BẢNG ĐƠN HÌNH

Bước 1: Lập bảng đơn hình

- Cột 1: Ẩn cơ bản ACB
- Cột 2: Hệ số ACB – ghi các hệ số của ACB trong hàm mục tiêu
- Cột 3: Phương án – ghi giá trị b_i của các phương trình ràng buộc theo giá trị tương ứng của hàng ACB
- Cột 4: Ghi các hệ số của các ẩn tương ứng trong hệ ràng buộc.
- Cột 5: Ghi tỷ số giữa cột phương án với cột chuẩn theo hàng tương ứng chỉ tính các hệ số $a_{il} > 0$ ($\lambda_i = \frac{b_i}{a_{il}}$)
- Hàng cuối cùng: ghi các hệ số của Δ
  - Δ_0 – là giá trị hàm mục tiêu ở phương án đầu $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$
  - Với các ẩn cơ bản thì $\Delta_j = 0$
  - Hệ số đặc trưng của cột tương ứng của các ẩn khác ẩn cơ bản là $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu

Dựa vào hệ số đặc trưng của Δ_j ta tiến hành kiểm tra như sau:

- Phương án ban đầu là phương án tối ưu nếu:
  - Nếu $\Delta_j \le 0$ với mọi j = 1: n ở bài toán Z → min
  - Nếu $\Delta_j \ge 0$ với mọi j = 1:n ở bài toán Z → max
- Nếu phương án có tồn tại
  - Nếu $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → min và $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → max thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

- Nếu phương án có tồn tại:
    - Nếu $\Delta_j > 0$, nhưng với mọi j có $a_{ij} > 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \rightarrow \min$
    - Nếu $\Delta_j < 0$ nhưng với mọi j có $a_{ij} > 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \rightarrow \max$

  Thì chuyển sang phương án tốt hơn.

Bước 3: Xác định cột chuẩn – tìm ẩn đưa vào

Dựa vào tính chất của hệ số đặc trưng Δ_j ta có quy tắc xác định cột chuẩn như sau:

- Với bài toán $Z \rightarrow \min$; cột chuẩn là cột ứng với $\Delta_L = \Delta_j$ lớn nhất với những $\Delta_j > 0$ và x_j không cơ bản.
- Với bài toán $Z \rightarrow \max$; cột chuẩn là cột ứng với $\Delta_L = \Delta_j$ nhỏ nhất với những $\Delta_j < 0$ và x_j không cơ bản.
- Biến x_L tương ứng với cột chuẩn là ẩn đưa vào trong bảng đơn hình mới.

Bước 4: Xác định hàng chuẩn, tìm ẩn đưa ra, tìm phần tử xoay

- Quy tắc xác định hàng chuẩn áp dụng chung cho cả hai bài toán $Z \rightarrow \max$ và $Z \rightarrow \min$ ẩn đưa ra là ẩn ứng với hàng k có $\lambda_k = \dfrac{b_k}{a_{kl}} = \dfrac{b_i}{a_{il}}$ (nhỏ nhất với $a_{il} > 0$)
- Ẩn tương ứng với hàng k (x_k) là ẩn đưa ra khỏi bảng đơn hình
- Phần tử a_{ij} ứng với cột chuẩn i = l, hàn chuẩn j = k được gọi là phần tử xoay a_{kl}

Bước 5: Biến đổi thay phương án

- Sau khi xác định được ẩn đưa vào x_l, ẩn đưa ra x_k, phần tử xoay a_{kl}
- Thay biến cơ bản ở hàng k bằng biến x_l (loại x_k ra)
- Giá trị số liệu ở hàng cơ sở (hàng x_l) tính như sau:

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}},\ j = 1:n \ ; \qquad b'_k = \frac{b_k}{a_{kl}},\ j = 1:n$$

Trong đó: a'_{kj} ; b'_k giá trị ở bảng mới

a_{kj} ; a_{kl}; b_k giá trị ở bảng cũ

- Giá trị các hàng còn lại biến đổi theo quy tắc của bảng sau:

$$b'_i = \frac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}} \text{; i = 1: m; j =1: n}$$

$$a'_{ij} = \frac{a_{ii} a_{kl} - a_{kj} a_{il}}{a_{kl}} \text{; i = 1: m; j =1: n}$$

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j a_{kl} - a_{kj} \Delta_l}{a_{kl}} \text{; i = 1: m; j =1: n}$$

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP LẬP BẢNG ĐƠN HÌNH

Giải bài toán QHTT sau:

$$\langle 1\rangle f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \to Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \geq 0,\ j = 1:6$$

1. Xác định ẩn cơ bản

– Đây là phương trình chính tắc và có ẩn cơ bản là $x_4 = 6$; $x_5 = 10$; $x_6 = 12$

2. Lập bảng đơn hình ban đầu

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
X_4	-3	6	1	3	-1	1	0	0	
X_5	2	10	2	0	3	0	1	0	10/3
X_6	1	12	0	2	4	0	0	1	12/4
Δ		$\Delta_0 = 14$	Δ_1=-2	Δ_2=-12	Δ_3=10	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	$\Delta_6 =0$	

– Từ bảng đơn hình xuất phát ta kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu nhận thấy: đây là bài toán $Z \to \min$ nhưng có $\Delta_3 = 10 > 0$ do đó phương án xuất phát không phải là phương án tối ưu nên phải chuyển phương án.

3. Biến đổi phương án

– Xác định cột chuẩn, tìm ẩn đưa vào: đây là bài toán $Z \to \min$, nên cột chuẩn đưa vào là cột ứng với $\Delta j > 0$ và lớn nhất. Do vậy cột l = 3 là cột chuẩn và x_3 là ẩn đưa vào.

– Xác định hàng chuẩn, tìm ẩn đưa ra: điều kiện hàng chuẩn k phải là hàng có $\lambda_k = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\}$ và $a_{i3} > 0$; do đó k = 3 và phần tử đưa ra là x_6

– Xác định phần tử xoay: $a_{kl} = a_{33} = 4$; hàng chuẩn của bảng đơn hình mới là k = 3

– Dựa vào cách tính toán giá trị ở bảng đơn hình biến đổi ta lập được bảng đơn hình mới là:

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
X_4	-3	$b'_1 = 9$	1	7/2	0	1	0	1/4	
X_5	2	$b'_2 = 1$	2	-3/2	0	0	1	-3/4	10/3
X_3	3	$b'_3 = 3$	0	1/2	1	0	0	1/4	12/4
Δ		$\Delta_0 = -16$	Δ_1=-2	Δ_2=-12	Δ_3= 0	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	Δ_6 =-5/2	

Từ bảng ta thấy với mọi j = 1: 6 thì $\Delta j \leq 0$, đây là bài toán $Z \to \min$. Nên phương án ở bảng là phương án tối ưu. $x^* = (0, 0, 3, 9, 1, 0)$ và giá trị tối ưu là $f(x^*) = -16$

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ABC	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
x_4	$C_1 = -3$	$b_1 = 6$	$a_{11}= 1$	$a_{12} = 3$	$a_{13} = -1$	$a_{14} = 1$	$a_{15} = 0$	$a_{16} = 0$	
x_5	$C_2 = 2$	$b_2 = 10$	$a_{21}= 2$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 3$	$a_{24} = 0$	$a_{25} = 1$	$a_{26} = 0$	
x_6	$C_3 = 1$	$b_3 = 12$	$a_{31}= 0$	$a_{32} = 2$	$a_{33} = 4$	$a_{34} = 0$	$a_{35} = 0$	$a_{36} = 1$	
Δ_j		$\Delta_0 = 14$	$\Delta_1 = -2$	$\Delta_2 =$	$\Delta_3 =$	$\Delta_4 =$	$\Delta_5 =$	$\Delta_6 =$	
Bảng mới									
x_4	$C_1 = -3$	$b_1' =$	$a_{11}' =$	$a_{12}' =$	$a_{13}' =$	$a_{14}' =$	$a_{15}' =$	$a_{16}' =$	
x_5	$C_2 = 2$	$b_2' =$	$a_{21}' =$	$a_{22}' =$	$a_{23}' =$	$a_{24}' =$	$a_{25}' =$	$a_{26}' =$	
x_3	$C_3 = 3$	$b_3' =$	$a_{31}' =$	$a_{32}' =$	$a_{33}' =$	$a_{34}' =$	$a_{35}' =$	$a_{36}' =$	
Δ_j'		$\Delta_0' =$	$\Delta_1' =$	$\Delta_2' =$	$\Delta_3' =$	$\Delta_4' =$	$\Delta_5' =$	$\Delta_6' =$	

Phương án ban đầu

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

$\Delta_0 = -3.6 + 2.10 + 1.12 = 14$

$\Delta_1 = (-3.1 + 2.2 + 1.0) – 3 = -2$

$\Delta_2 = (-3.3 + 2.0 + 1.2) – 5 = -12$

$\Delta_3 = (-3.-1 + 2.3 +1.4) – 3 = 10$

$\Delta_4 = (-3.1 + 2.0+1.0) – (-3) = 0$

$\Delta_5 = (-3.0 + 2.1+1.0) – 2 = 0$

$\Delta_6 = (-3.0 + 2.0+1.1) – 1 = 0$

Phương án xoay

$$b_k' = \frac{b_k}{a_{kl}}, \; j = 1:n$$

$$a_{kj}' = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}, \; j = 1:n$$

$$b_i' = \frac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}}$$; i = 1: m; j =1: n

$$a_{ij}' = \frac{a_{ii} a_{kl} - a_{kj} a_{il}}{a_{kl}}$$; i = 1: m; j =1: n

$$\Delta_j' = \frac{\Delta_j a_{kl} - a_{kj} \Delta_l}{a_{kl}}$$; i = 1: m; j =1: n

Phương án xoay

$$b_1' = \frac{b_1 a_{33} - b_3 a_{13}}{a_{33}} = \frac{6.4 - 12.(-1)}{4} = 9$$

$$b_2' = \frac{b_2 a_{33} - b_3 a_{23}}{a_{33}} = \frac{10.4 - 12.3}{4} = 1$$

$$b_3' = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{12}{3} = 3$$

$$a_{11}' = \frac{a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}}{a_{33}} = \frac{1.4 - 0.(-1)}{4} = 1$$

$$a_{21}' = \frac{a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}}{a_{33}} = \frac{2.4 - 0.3}{4} = 2$$

$$a_{31}' = \frac{a_{31}}{a_{33}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$a_{12}' = \frac{a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}}{a_{33}} = \frac{3.4 - 2(-1)}{4} = 7/2$$

$$a_{22}' = \frac{a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}}{a_{33}} = \frac{0.4 - 2.3}{4} = -3/2$$

$$a_{32}' = \frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{2}{4} = 1/2$$