VII. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

1. KHÁI NIỆM

2. CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

2.1. Cặp bài toán P - D

Cho bài toán QHTT sau đây (Bài toán gốc P): Tìm x = (x_1, x_2,… x_n) là cho hàm mục tiêu $Z_p \rightarrow$ max với các ràng buộc sau:

$$\langle 1 \rangle Z_p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_J \rightarrow \max$$

$$(2) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i ; i = 1 : m$$

$$(3) x_j \geq 0 ; i = 1 : m ; j = 1 : n$$

Bài toán đối ngẫu D tương ứng với bài toán P được phát biểu như sau: tìm y = (y_1, y_2,… y_m) là cho hàm mục tiêu $Z_D \rightarrow$min với các ràng buộc sau:

$$\langle 1 \rangle Z_D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$$

$$(2) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j ; j = 1 \div n$$

$$(3) y_i \geq 0 ; i = 1 : m ;$$

2.2. Trình tự lập bài toán P - D

Bước 1: Lập sơ đồ

- Viết các biến x_j tương ứng (hàng trên cùng)
- Viết ma trận hệ số các ma trận ràng buộc thành dạng bảng
- Viết các hệ số C_j tương ứng (hàng cuối cùng)
- Viết các hệ số bi tương ứng (cột ngoài cùng bên phải)
- Viết các biến y_i của bài toán D (cột ngoài cùng bên trái)
- Đánh dấu các hạn chế của biến

Bước 2: Từ sơ đồ lập bài toán D

Bài tập 1: Cho bài toán gốc P

$\langle 1 \rangle Z_p = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow Max$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -2 \end{cases}$$

Lập bài toán đối ngẫu D

$\langle 3 \rangle x_1, x_2$ *tùyý* $; x_3 \le 0$

<u>Bài làm</u>

		x_1	x_2	x_3		
		tùyý	*tùyý*	$\le$		
y_1	$\ge$	1	2	1	$\le$	2
y_2	$\ge$	-2	1	-1	$\le$	4
y_3	$\ge$	1	2	-1	$\le$	-2
		$=$	$=$	$\le$		
		27	50	18		

$\langle 1 \rangle Z_D = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \rightarrow Min$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 27 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 50 \\ y_1 - y_2 - y_3 \le 18 \end{cases}$$

$\langle 3 \rangle y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Bài tập 2: Cho bài toán gốc P

$\langle 1 \rangle Z_p = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow Min$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$$

Lập bài toán đối ngẫu D

$\langle 3 \rangle x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

<u>Bài làm</u>

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	
y_1	$\le$	1	1	-1	0	$\le$ 15
y_2	*tùyý*	1	1	1	1	$=$ 27
y_3	$\le$	1	-1	-1	0	$\le$ 18
		$\le$	$\le$	$\le$	$\le$	
		-2	1	0	1	

$\langle 1 \rangle Z_D = 15y_1 + 27y_2 + 18y_3 \rightarrow Max$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le -2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \le 0 \\ y_2 \le 1 \end{cases}$$

$\langle 3 \rangle y_1, y_3 \le 0, y_2$ *tùyý*

3. QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN P VÀ BÀI TOÁN D

1. Các định lý đối ngẫu

Định lý 1: Với cặp bài toán P và D chỉ xảy ra một trong 3 trường hợp sau:

- Cả P và D đều không có phương án
- Cả P và D đều có phương án, lúc đó cả hai đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu $Z_{P(\text{tối ưu})} = Z_{D(\text{tối ưu})}$
- Một trong hai bài toán không có phương án tối ưu, còn bài toán kia có phương án, khi đó bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

Định lý 2: (Định lý về độ lệch bù) điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán P và y^0 của bài toán D tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j\right) = 0,\ j = 1:n \\ y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i\right) = 0, i = 1:m \end{cases}$$

Chú ý: Trong các tích trên nếu các thừa số này khác không thì thừa số kia phải bằng không. Nhờ tính chất này mà ta lập được hệ phương trình tuyến tính giúp cho việc giải bài toán D.

2. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

Giả sử đã giải được bài toán D, ta có thể suy ra kết quả của bài toán P như sau:

Theo định 1: Nếu bài toán D không có phương án tối ưu thì kết luận bài toán P không có phương án tối ưu.

Theo định lý 1 và 2: Nếu bài toán D có phương án tối ưu là $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots y_m^0)$ và giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{D(Yo)}$ ta có

- Bài toán P cũng có phương án tối ưu là $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ với giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{P(Xo)} = Z_{D(Yo)}$
- Việc tính toán giá trị phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ được tiến hành như sau:

▪ Thứ 1: Nếu $y_i^0 \neq 0$ thì ta có $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 = b_i$, nhờ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính để tính giá trị x_j^0

▪ Thứ 2: Ta thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j = E$. Với các chỉ số j nào mà $E \neq 0$ thì theo định lý 2 thì có $x_j = 0$

▪ Với các phương trình đã được lập ở công việc thứ 1 và kết quả xác định được ở công việc thứ 2, ta tìm được nghiệm tối ưu của bài toán P

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Giải bài toán QHTT sau

$$\langle 1\rangle f(x) = 52x_1 + 60x_2 + 36x_3 \to Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 \ge -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_2 \ge -2 \\ x_3 \ge 3 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j\, tùy\, .ý,\; j = 1:3$$

Bước 1: Chuyển bài toán P về bài toán D

		x_1	x_2	x_3		
		$t.ý$	$t.ý$	$t.ý$		
y_1	$\ge$	1	0	0	$\ge$	-2
y_2	$\ge$	2	4	3	$\ge$	6
y_3	$\ge$	4	2	0	$\ge$	4
y_4	$\ge$	0	1	0	$\ge$	-2
y_5	$\ge$	0	0	1	$\ge$	3
		=	=	=	$\to$	Min
		52	60	36	$\downarrow$	max

→ Bài toán D

$$\langle 1\rangle Z_D = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 2y_4 + 3y_5 \to Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle y_i \ge 0; i = 1:3$$

Bước 2: Giải bài toán D bằng phương pháp thử lần lượt

- Chọn biến cơ sở Theo định lý 4 có 3 PT ràng buộc nên có 3 nghiệm dương; ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,0,0)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 = 36 \end{cases}$ giải được $\begin{cases} y_1^0 = 4 \\ y_2^0 = 12 \\ y_3^0 = 6 \end{cases}$ giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = -2.4 + 6.12 + 4.6 = 88$
- Thử đưa y_4 vào cơ sở ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,y_4,0)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 = 36 \end{cases}$ ba phương trình 4 ẩn nên chuyển thành $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 2a_3 = 1 \\ 3a_2 = 0 \end{cases}$ giải ta được $a_1 = -2; a_2 = 0; a_3 = 0,5$

Hiệu suất của y_4: $\gamma_4 = -2.(-2) + 6.0 + 4.0,5 = 6$

$\Delta_4 = c_4 - \gamma_4 = -2 - 6 = -8 < 0$ nên đưa y_4 vào không có lợi

- Thử đưa y_5 vào cơ sở ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,0,y_5)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$ ba phương trình 4 ẩn nên chuyển thành $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 = 1 \end{cases}$ giải ta được $a_1 = 3; a_2 = 0,5; a_3 = -1$

Hiệu suất của y_5: $\gamma_5 = -2.3 + 6.0,5 + 4.(-1) = -7$

$\Delta_5 = c_5 - \gamma_5 = 3 - (-7) = 10 > 0$ nên đưa y_5 vào có lợi

Tính $\lambda_1 = \frac{y_1^0}{a_1^0} = \frac{4}{3}$; $\lambda_2 = \frac{y_2^0}{a_2^0} = \frac{12}{0,5} = 24$; $\lambda_3 = \frac{y_3^0}{a_3^0} = \frac{6}{-1} = -6$; ta loại bỏ biến nào có giá giá trị $\lambda_I > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ y_1 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là $Y_0=(0,y_2,y_3,0,y_5)$; Thay biến mới vào ràng buộc ta được $\begin{cases} 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$ giải hệ ta được $\begin{cases} y_2^0 = 11,333 \\ y_3^0 = 7,333 \\ y_5^0 = 2 \end{cases}$ giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 6.11,333 + 4.7,333 + 3.2 = 103,33$

Kết luận phương án tối ưu của bài toán D là $Y^0 = (0;11,333;7,333;0;2)$ và giá trị tối ưu là $Z^0 = 103,33$

Bước 3: Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Thứ 1: Kết quả giải bài toán D cho thấy $(y_2, y_3, y_5) \neq 0$ nên ta có $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

- Thứ 2: Thay kết quả $Y^0 = (0;\ 11,333;\ 7,333;\ 0;\ 2)$ vào biểu thức tính $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 - 60 \\ 3y_2 + y_5 - 36 \end{cases} = \begin{cases} 1.0 + 2.11,333 + 4.7,333 - 52 = 0 \\ 4.11,333 + 2.7,333 + 1.0 - 60 = 0 \\ 3.11,333 + 2 - 36 = 0 \end{cases}$ ta nhận được kết quả E = 0, j = 1: 3 do đó $x_j \neq 0$; giải phương trình thứ 1 ta được phương án tối ưu của bài toán P là $x_0^* = (\frac{11}{6}, -\frac{5}{3}, 3)$ và giá trị tối ưu là $Z_{P(X^*)} = (103,333)$

Bài 2: Giải bài toán QHTT sau

$\langle 1\rangle\ f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \to Min$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$$

$\langle 3\rangle\ x_j \ge 0,\ j = 1:4$

Bước 1: Chuyển bài toán P về bài toán D

		x_1	x_2	x_3	x_4		
		$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$		
y_1	$\le$	1	1	-1	0	$\le$	15
y_2	$t.ý$	1	1	1	1	$=$	27
y_3	$\le$	1	-1	-1	0	$\le$	18
		$\le$	$\le$	$\le$	$\le$	$\to$	min
		-2	1	0	1	$\downarrow$	max

→ Bài toán D

$\langle 1\rangle\ f(x) = 15y_1 + 27y_2 + 18y_3 \to Max$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le -2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \le 0 \\ y_2 \le 1 \end{cases}$$

$\langle 3\rangle\ y_1 \le 0;\ y_2\, tùy.ý;\ y_3 \le 0$

Bước 2: Giải bài toán tối ưu D ta được phương án tối ưu như sau

$Y^0 = (-1; -1; 0)$ và giá trị tối ưu là $Z^0_D = -42$

Bước 3: Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Thứ 1: Kết quả giải bài toán D cho thấy $(y_1, y_2) \ne 0$ nên ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \end{cases}$
- Thứ 2: Thay kết quả $Y^0 = (-1; -1; 0)$ vào biểu thức tính $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - (-2) \\ y_1 + y_2 - y_3 - 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 - 0 \\ y_2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 - 1 + 0 - (-2) = 0 \\ -1 - 1 - 0 - 1 = -3 \\ -(-1) - 1 - 0 - 0 = 0 \\ -1 - 1 = -2 \end{cases}$ ta nhận được kết quả

$E_1 = 0$; $E_3 = 0$, do đó $x_1, x_3 \ne 0$; và $E_1 = 0$; $E_3 = 0$, do đó $x_1, x_3 \ne 0$;

$E_2 \ne 0$; $E_4 \ne = 0$, do đó $x_2 = 0$, $x_4 = 0$;

Giải phương trình thứ 1

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 - x_3 = 15 \\ x_1 + 0 + x_3 + 0 = 27 \end{cases} = \begin{cases} x_1 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_3 = 27 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 21 \\ x_3 = 6 \end{cases}$ ta được phương án tối ưu của bài toán P là $x_0^* = (21,0,6,0)$ và giá trị tối ưu là $Z_{P(X^*)} = -42$