

II. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH NHIỀU MỤC TIÊU

1. Khái niệm

Trong thực tế ta đòi hỏi phải cân nhắc, so sánh nhiều mục tiêu khác nhau; Ví dụ như khi lập kế hoạch sản xuất ngoài mục tiêu thu lãi về lớn nhất, còn đòi hỏi ổn định lực lượng lao động, nâng cao đời sống, vốn đầu tư ... Những bài toán như vậy yêu cầu ta phải đạt nhiều mục tiêu khác nhau và gọi là bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu.

Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thường gắn với mô hình toán tương ứng như bài toán QHPT, bài toán QHTT nhiều mục tiêu...

Cách tiếp cận với bài toán nhiều mục tiêu là ta quy định mỗi mục tiêu một mức bằng số cụ thể, tiếp đến là xác định các hệ số phạt do vi phạm quy định và cuối cùng là tìm phương án đạt cực tiểu tổng độ lệch giữa các hệ số phạt đã xác định của các giá trị hàm mục tiêu so với mức quy định cho từng mục tiêu.

Phân loại mức mục tiêu:

- Mức một phía, cận dưới: quy định giới hạn dưới cho các giá trị mục tiêu cần đạt, nếu đạt cao hơn càng tốt.
- Mức một phía cận trên: quy định giới hạn trên cho các giá trị mục tiêu cần đạt, nếu đạt thấp hơn càng tốt.
- Mức hai phía: quy định giá trị mà mục tiêu phải đạt không hơn không kém.

2. Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu không có ưu tiên

Bài toán:

Một xí nghiệp dự kiến sản xuất ba sản phẩm mới A, B, C. Giám đốc quan tâm tới 3 mục tiêu chính là: lợi nhuận, lao động, vốn đầu tư. Cụ thể là:

1. Cần đạt được lợi nhuận tối thiểu là 125 triệu đồng từ các sản phẩm mới này
2. Duy trì đội ngũ lao động hiện có ở mức 4000 người
3. Mức đầu tư không được vượt quá 55 triệu đồng

Giám đốc này nhận thấy không có khả năng đạt đồng thời ba mục tiêu nêu ra, vì vậy ông quyết định các hệ số phạt như sau:

- Hệ số phạt 5 trên 1 triệu đồng lợi nhuận thấp hơn mức quy định
- Hệ số phạt 2 trên 100 lao động phải sử dụng thêm vượt quy định và hệ số phạt 4 trên 100 lao động không được sử dụng
- Hệ số phạt 3 trên 1 triệu đồng vốn đầu tư phải tăng thêm so với mức quy định.

Giả sử mức lợi nhuận, số lao động và vốn đầu tư tỷ lệ thuận với mức sản xuất sản phẩm.

Các số liệu, định mức và các hệ số phạt được cho trong bảng sau:

| Mục tiêu | Sản phẩm | | | Mức mục tiêu | Hệ số phạt |
|------------|----------|---|----|---------------|------------|
| | A | B | C | | |
| Lợi nhuận | 12 | 9 | 15 | ≥ 125 | 5 |
| Lao động | 5 | 3 | 4 | $= 40 (x100)$ | 2(+); 4(-) |
| Vốn đầu tư | 5 | 7 | 8 | ≤ 55 | 3 |

BÀI LÀM

- Đặt x_1, x_2, x_3 , lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

$$12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$$

- Đặt Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu quy định. Với các hệ số phạt đã cho thì mục tiêu tổng thể là tìm x_1, x_2, x_3 sao cho Z min
- Để tiện cho nghiên cứu ta đưa biến phụ y_1, y_2, y_3 vào như sau :

$$y_1 = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125$$

$$y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40$$

$$y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55$$

- Do y_i có thể dương có thể âm, nên ta đặt $y_i = y_i^+ - y_i^-$; $y_2 = y_2^+ - y_2^-$; $y_3 = y_3^+ - y_3^-$ với $y_i^+, y_i^- \geq 0$; $i = 1 \div 3$
- Quan hệ trên cho thấy y_i^+ biểu thị phần dương của biến y_i dấu (+) và y_i^- biểu thị phần âm của biến y_i dấu (-)
- Với biến phụ này ta lập hàm mục tiêu như sau:

$$Z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ \rightarrow \min$$

- Để chuyển bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thành một mục tiêu, ta cần phải đưa biến phụ vào các ràng buộc như sau:

$$y_1 = y_1^+ - y_1^- = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125 \text{ hay } 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125$$

$$y_2 = y_2^+ - y_2^- = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40 \text{ hay } 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40$$

$$y_3 = y_3^+ - y_3^- = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55 \text{ hay } 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55$$

- Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán một mục tiêu như sau :

$$(1) Z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 12x_1^+ + 9x_2^+ + 15x_3^- - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1^+ + 3x_2^+ + 4x_3^- - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1^+ + 7x_2^+ + 8x_3^- - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 1 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

$$x_1 = 25/3; x_2 = 0; x_3 = 5/3; y_1^+ = 0, y_1^- = 0, y_2^+ = 25/3, y_2^- = 0, y_3^+ = 0, y_3^- = 0$$

- Kết quả giải bài toán ta thấy:

- $y_1^+ - y_1^- = 0$, tức là mục tiêu thứ nhất hoàn toàn thỏa mãn
- $y_2^+ - y_2^- = 8.33$, mục tiêu thứ hai đã vượt mức quy định là 833 người so với mức quy định là 4000 người
- $y_3^+ - y_3^- = 0$, tức là mục tiêu thứ ba hoàn toàn thỏa mãn

3. Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên

Trong thực tế có nhiều trường hợp bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu khác nhau. Để tiện khảo sát, người yêu cầu phải đặt thứ tự mức ưu tiên. Với bài toán này ta tập trung vào mức mục tiêu ưu tiên 1 sau đó giải có lời giải đối với mức ưu tiên 1. Sau đó ta xét các mức ưu tiên kế tiếp.

Thực chất của phương pháp này là giải một dãy các bài toán QHTT theo các giai đoạn khác nhau:

* Phương pháp thực hiện

Giai đoạn 1: Chỉ đưa vào mô hình QHTT các mục tiêu có mức ưu tiên 1 và áp dụng phương pháp đơn hình để giải. Nếu lời giải là duy nhất thì dừng quá trình giải mà không cần xét các mục tiêu còn lại. Trường hợp có nhiều lời giải ứng với cùng giá trị tối ưu hàm mục tiêu thì chuyển sang giai đoạn 2 và đưa vào mô hình các mục tiêu ở mức ưu tiên 2.

Giai đoạn 2: trong trường hợp cần chuyển sang giai đoạn 2, ta phải căn cứ vào giá trị của hàm mục tiêu Z^* tính được ở giai đoạn 1 như sau:

- Nếu $Z^* = 0$ tức các biến phụ bằng không (mọi mục tiêu ở mức ưu tiên 1 đều đạt).

Trong trường hợp này mọi biến phụ có thể loại ra khỏi mô hình ở giai đoạn 2

- Nếu $Z^* > 0$ thì ở giai đoạn 2 chỉ thêm vào mô hình đã thiết lập ở giai đoạn 1 các mục tiêu có mức ưu tiên 2, nhưng sau đó cần thêm vào ràng buộc phản ánh giá trị hàm mục tiêu của giai đoạn 1 bằng Z^*

Bài tập áp dụng

Sau khi giải bài toán trên. Giám đốc xí nghiệp không chấp nhận phương án tăng thêm lao động. Vì vậy ông đặt lại mục tiêu của bài toán là: Ưu tiên mức 1 là không tăng nhân lực, tránh đầu tư quá mức và ưu tiên mức 2 là giữ lại lợi nhuận tối thiểu 125 và tránh giảm lao động dưới mức 4000

Với quyết định hai mức ưu tiên như trên với các số liệu đã cho ta lập được bảng như sau :

| Mức ưu tiên | Mục tiêu | Sản phẩm | | | Mức mục tiêu | Hệ số phạt |
|---------------|------------|----------|---|----|------------------|------------|
| | | A | B | C | | |
| Mức ưu tiên 1 | Lao động | 5 | 3 | 4 | ≤ 40 (x100) | 2 |
| | Vốn đầu tư | 5 | 7 | 8 | ≤ 55 | 3 |
| Mức ưu tiên 2 | Lợi nhuận | 12 | 9 | 15 | ≥ 125 | 5 |
| | Lao động | 5 | 3 | 4 | ≥ 40 (x100) | 4 |

Theo số liệu ở bảng cho thì ta chỉ có hai mục tiêu ở mức ưu tiên 1 được đưa vào bài toán QHTT.

GIAI ĐOẠN 1

- Đặt x_1, x_2, x_3 , lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$$

- Đặt Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu quy định. Với các hệ số phạt đã cho thì mục tiêu tổng thể là tìm x_1, x_2, x_3 sao cho Z min
- Để tiện cho nghiên cứu ta đưa biến phụ y_2, y_3 vào như sau :

$$y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40$$

$$y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55$$

- Do y_i có thể dương có thể âm, nên ta đặt $y_2 = y_2^+ - y_2^-; y_3 = y_3^+ - y_3^-$ với $y_i^+, y_i^- \geq 0; i = 2, 3$
- Với biến phụ này ta lập hàm mục tiêu như sau:

$$Z = 2y_2^+ + 3y_3^+ \rightarrow \min$$

- Để chuyển bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thành một mục tiêu, ta cần phải đưa biến phụ vào các ràng buộc như sau:

$$y_2 = y_2^+ - y_2^- = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40 \text{ hay } 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40$$

$$y_3 = y_3^+ - y_3^- = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55 \text{ hay } 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55$$

- Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán một mục tiêu như sau :

$$(1) Z = 2y_2^+ + 3y_3^+ \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 2 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 3.75, y_2^+ = 0, y_2^- = 0, y_3^+ = 0, y_3^- = 0; Z^* = 0$ tức là hai mục tiêu ưu tiên 1 đều đạt. Do vậy loại bỏ $y_2^+ = 0, y_3^+ = 0$ ra khỏi mô hình

GIẢI ĐOẠN 2

Sau khi loại bỏ $y_2^+ = 0, y_3^+ = 0$ đồng thời thêm các mục tiêu ưu tiên 2 mô hình bài toán QHTT giai đoạn 2 là :

$$(1) Z = 5y_1^- + 4y_2^- \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (0 - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (0 - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 1 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 3.75, y_1^+ = 0, y_1^- = 8.75, y_2^- = 0, y_3^- = 0; Z^* = 43.75$; Do lời giải duy nhất nên quá trình giải kết thúc với $x^* = (5, 0, 3.75)$ là phương án tối ưu của bài toán.

Kết luận: Như vậy với phương án tối ưu $x^* = (5, 0, 3.75)$ thì mục tiêu về lao động và vốn đầu tư đều thỏa mãn còn lợi nhuận đạt 116.25 triệu (còn thiếu 8.75 triệu mới đạt)