Chương 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TỐI ƯU HÓA

I. Định nghĩa và ý nghĩa của các thuật ngữ

1. Tối ưu

- Tối ưu là tốt nhất
- Số lượng sự kiện, sự vật, hiện tượng trong tập hợp dùng để so sánh càng lớn thì tính đại diện càng cao.
- Tập hợp các điều kiện ràng buộc tạo nên miền giới hạn phạm vi so sánh lựa chọn ta thường gọi là miền cho phép.

2. Tối ưu hóa

- Tối ưu hóa là làm cho tốt nhất.
- Khái niệm này chỉ rõ để có kết quả tốt nhất cần có sự tác động, điều khiển từ bên ngoài.
- Để làm tốt nhất ta cần xác định:
    - Mục tiêu mong đợi của sự vật, hiện tượng mà ta quan tâm
    - Các yếu tố chi phối đến mục tiêu mong đợi.
    - Phạm vi diễn biến của sự vật hiện, tượng ta khảo sát

3. Bài toán tối ưu

Khi tiến hành lập kế hoạch sản xuất, khi thiết kế sản phẩm, công trình hoặc hệ thống, khi điều khiển các quá trình nếu dựa vào nguyên lý cực trị không chỉ đạt được những mục tiêu về kỹ thuật mà còn đạt hiệu quả kinh tế cao.

Toán học giúp chúng ta giải quyết dung hòa mâu thuẫn giữa yêu cầu kỹ thuật và hiệu quả kinh tế chính là bài toán tối ưu.

Bài toán tối ưu được phát biểu như sau:

$$f(x) \rightarrow \max(\min) \qquad (1\text{-}1)$$

Thỏa mãn điều kiện: $$g_i(x) = \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, i = 1:m; \qquad (1\text{-}2)$$

$$x \in X \subset R^n \qquad (1\text{-}3)$$

Trong đó:

- f(x) gọi là hàm mục tiêu
- các hàm gi(x), i = 1: n; gọi là hàm ràng buộc mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (1-2) là một ràng buộc

– Tập hợp D ={x∈X| $g_i(x) = \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, i = 1:m$ } gọi là miền ràng buộc

– Mỗi điểm x($x_1, x_2,..., x_n$) ∈D gọi là một phương án (hay một nghiệm)

– Mỗi phương án x^*∈D làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max hoặc min cụ thể là:

  - $f(x^*) \ge f(x)$ với mọi x∈D đối với bài toán Max
  - $\le f(x)$ với mọi x∈D đối với bài toán Min

được gọi là phương án tối ưu và $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán

4. Phân loại bài toán tối ưu

Với định nghĩa bài toán tối ưu ta có thể suy ra phương pháp tổng quát để giải bài toán là phương pháp duyệt toàn bộ. Bản chất của phương pháp này tìm giá trị của hàm mục tiêu f(x) trên tất cả các phương án, sau đó so sánh các giá trị tính được để tìm ra giá trị tối ưu và phương án tối ưu của bài toán.

Để phân loại bài toán tối ưu người ta thường dựa vào tính chất các thành phần của bài toán và đối tượng nghiên cứu để phân thành các loại chủ yếu sau:

– Quy hoạch phi tuyến: nếu hàm mục tiêu f(x) hoặc có ít nhất một trong các hàm ràng buộc $g_i(x)$ là phi tuyến hoặc cả f(x) và $g_i(x)$ cùng phi tuyến.

– Quy hoạch tuyến tính: nếu hàm mục tiêu f(x) và hàm ràng buộc $g_i(x)$ là tuyến tính

– Quy hoạch động: nếu đối tượng xét là các quá trình có nhiều giai đoạn nói chung hay các quá trình phát triển theo thời gian nói riêng.

– Quy hoạch tham số: nếu các hệ số trong biểu thức của hàm mục tiêu và hàm ràng buộc phụ thuộc vào tham số.

– Quy hoạch rời rạc: nếu miền ràng buộc D là tập rời rạc. Trong trường hợp riêng khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên thì ta có quy hoạch nguyên. Trường hợp quy hoạch nguyên mà biến chỉ nhận giá trị (0) hay (1) gọi là quy hoạch Boole.

– Quy hoạch đa mục tiêu: nếu cùng trên một miền ràng buộc ta xét đồng thời các hàm mục tiêu khác nhau.

II. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ GIẢI TÍCH LỒI VÀ ĐẠI SỐ

1. Một số khái niệm về giải tích lồi

1.1. Không gian Euclic

1.2. Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng

1.3. Tập lồi

2. Mốt số khái niệm về đại số

2.1. Ma trận

Ma trận là một bảng chữ nhật gồm mxn số sắp thành m hàng và n cột có dạng:

$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn} \end{vmatrix}$ và được ký hiệu là $A = (a_{ij})_{mxn}$ là ma trận có kích thước là m×n

- Ma trận có số hàng bằng số cột (m=n) gọi là ma trận vuông và gọi là ma trận có cấp n.
- Ma trận mà có các cột của nó là các hàng tương ứng của ma trận ban đầu A gọi là ma trận chuyển vị của A và ký hiệu là A'
  - Ví dụ: $A = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ thì $A' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$
- Ma trận chỉ có một cột gọi là véctơ cột.
- Ma trận chỉ có một hàng gọi là véctơ hàng.
- Ma trận vuông có dạng: $A = \begin{vmatrix} \alpha_1, 0, \dots\dots 0 \\ 0, \alpha_2, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ 0, 0 \dots\dots \alpha_n \end{vmatrix}$
- Nếu ma trận đường chéo có $\alpha_i = 1$, i =1:n thì gọi là ma trận đơn vị; được ký hiệu bằng I hoặc E
- Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng kích thước và các phần tử tương ứng bằng nhau.
- Muốn nhân ma trận với một hằng số α, ta nhân mỗi phần tử của ma trận đó với số đó: $\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{mxn}$
  - Ví dụ: $2.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.3 & 2.4 \\ 2.7 & 2.(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}$
- Tổng hai ma trận A và B có cùng kích thước là ma trận C mà mỗi phần tử của nó bằng tổng thể các phần tử tương ứng của ma trận A và ma trận B $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - Ví dụ: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

- Ma trận A nhân được với ma trận B chỉ trong trường hợp số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B

  $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{jk})_{nxl}$, $C = (c_k)_{mxl}$

  - Ví dụ1: $\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.1 & 3.4 \\ 2.1 & 2.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

  - Ví dụ 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.1 + 2.3 + 3.1 & 1.2 + 2.2 + 3.4 \\ 4.1 + 1.3 + 2.1 & 4.2 + 1.2 + 2.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}$

2.2. Định thức

- Định thức cấp 2 ứng với ma trận vuông cấp 2 ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

- Định thức cấp 3 ứng với ma trận vuông cấp 3, ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

❖ Tính chất của định thức

- Định thức không thay đổi khi ta thay đổi hàng thành cột, cột thành hàng (Δ = Δ')
  - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2; \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$
- Nếu đổi hai hàng (hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu
  - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2; \Delta_d = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 1.4 = 2$
- Thừa số chung của một hàng (một cột) có thể đưa ra ngoài dấu định thức
  - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$
- Nếu các phần của một cột hay hàng tỷ lệ với các phần tử tương ứng của một cột hay hàng khác thì định thức bằng 0
- Nếu mỗi phần tử của một cột có thể tách thành tổng của hai số thì định thức đó cũng tách thành tổng của hai định thức tương ứng.
  - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 + 2 \\ 1 & 7 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13$

– Định thức sẽ không thay đổi nếu cộng thêm vào các phần tử của một cột (hàng) nào đó các phần tử của một cột (hàng khác) đã nhân với một hằng số

o Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+(-2.2) & 5+(-2.1) & 7+(-2.3) \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2.3. Ma trận ngịch đảo

– Ma trận vuông A được gọi là không suy biến nếu nó có định thức $\Delta \neq 0$, ngược lại A gọi là suy biến.

– Đối với mỗi ma trận không suy biến sẽ tồn tại một ma trận (A-1) thỏa mãn điều kiện AA-1= A-1A = E

A^{-1} gọi là ma trận nghịch đảo của A; $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{vmatrix}$

o Ví dụ: cho $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ tính A^{-1}

Tính Δ = 1.5.8 + 2.3.1 + 3.2.0 – 3.5.1 – 1.3.0 – 2.2.8 = -1 $\neq 0 \Rightarrow$ có A^{-1}

Tính $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$, $A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 13$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$, $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$, $A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

Ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = -1\begin{vmatrix} 40 & 16 & -9 \\ 13 & 5 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

2.4. Hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

❖ Hệ phương trình đại số tuyến tính được phân biệt:

– Không thuần nhất nếu có ít nhất một hệ số $b_i \neq 0$

– Thuần nhất nếu tất cả các hệ số bi = 0

– Tương thích nếu có ít nhất một nghiệm, tức là tồn tại một bộ giá trị x1, x2, x3,…. xn thỏa mãn hệ phương trình.

– Không tương thích nếu hệ không có nghiệm nào thỏa mãn hệ phương trình.

– Xác định nếu hệ chỉ có một nghiệm duy nhất.

– Bất định nếu hệ tồn tại quá một nghiệm.

❖ Trường hợp m = n

– Giả sử ma trận không suy biến tức là tồn tại ma trận nghịch đảo ta có: A-1Ax = A-1b. Bởi vì A-1A = E và nhân bất cứ ma trận nào với E sẽ được đúng ma trận đó nên x = A-1b và ta có công thức Crame tính nghiệm duy nhất: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,\dots n$

– Ví dụ: giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

Ta có $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{vmatrix}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$ $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{44}$

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{72}{44}$ $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{152}{44}$

❖ Trường hợp m ≠ n

Chương 2. QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I. Những huống thực tế dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

1.1. Bài toán lập kế hoạch

Một xí nghiệp muốn sản xuất 2 loại sản phẩm S_1, S_2 bằng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3. Suất chi phí nguyên liệu để sản xuất sản phẩm được thống kê theo bảng:

Sản phẩm / Nguyên liệu	S_1	S_2
N_1	2	1
N_2	1	2
N_3	0	1

- Để sản xuất một sản phẩm S_1 cần 2 đơn vị nguyên liệu N_1 và 1 đơn vị nguyên liệu N_2
- Để sản xuất một sản phẩm S_2 cần 1 đơn vị nguyên liệu N_1, 2 đơn vị nguyên liệu N_2 và 1 đơn vị nguyên liệu N_3
- Để sản xuất liên tục xí nghiệp dự trữ 8 đơn vị nguyên liệu N_1, 7 đơn vị nguyên liệu N_2, 3 đơn vị nguyên liệu N_3.
- Theo thị trường tiền lãi trên 1 đơn vị sản phẩm S_1 là 4 triệu đồng, Trên đơn vị sản phẩm S_2 là 5 triệu đồng.

Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất sao cho xí nghiệp thu được tiền lãi lớn nhất với những hạn chế về nguyê liệu

❖ **Phân tích mô hình toán:**

- Gọi x_1 là số lượng sản phẩm S_1, x_2 là số lượng sản phẩm S_2 như vậy tiền lãi mong muốn lớn nhất sẽ là: $4x_1 + 5x_2 \to \max$
- Từ bảng chi phí và dự trữ nguyên liệu ta có:
- Nguyên liệu N_1 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $2x_1 + x_2 \leq 8$
- Nguyên liệu N_2 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $x_1 + 2x_2 \leq 7$
- Nguyên liệu N_3 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $x_2 \leq 3$
- Tất nhiên x_1, x_2 số lượng sản phẩm S_1, S_2 do đó $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

– Tổng hợp các phân tích trên ta có bài toán:

$$\langle 1 \rangle f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Dạng tổng quát bài toán lập kế hoạch tối ưu

Giả sử một đơn vị muốn sản xuất n sản phẩm ($S_1, S_2, \ldots S_n$) bằng cách sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau ($N_1, N_2, \ldots N_m$)

Ta đặt các ký hiệu:

– x_j là lượng sản phẩm các loại (j= 1: n)

– c_j là tiền lãi trên một đơn vị sản phẩm

– a_{ij} là suất chi phí nguyên liệu loại i để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j

– b_i là lượng dự trữ các nguyên liệu (i = 1:m)

Hãy xác định x_j (j= 1: n) sao cho tổng tiền lãi lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu đang có?

Mô hình bài toán dạng tổng quát như sau:

$$\langle 1 \rangle f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \to \max$$

$$\langle 2 \rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ j = 1:n, i = 1:n$$

$$\langle 3 \rangle x_j \ge 0,\ j = 1:n$$

1.2. Bài toán sử dụng vật tư

❖ **Bài toán:**

Một nhà máy sử dụng m loại vật tư V_i (i=1:m) để sản xuất n mặt hàng H_j; gọi

– b_i là lượng vật tư thứ i

– a_{ij} là số đơn vị vật tư thứ i để sản xuất ra một đơn vị mặt hàng j

– c_j là tiền lãi trên một đơn vị sản phẩm H_j

– x_j là lượng sản phẩm của mặt hàng H_j (j= 1: n)

Yêu cầu: Hãy tìm số lượng sản phẩm sản xuất ra trong điều kiện đã cho tiền lãi thu về lớn nhất

Mô hình bài toán dạng tổng quát như sau:

$$\langle 1\rangle\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \to \max$$

$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1:m$$

$$\langle 3\rangle\ x_j \ge 0,\ j = 1:n$$

❖ **Bài tập ví dụ:**

Một xí nghiệp sản xuất bốn loại mặt hàng A, B, C, D từ 3 loại vật tư I, II, III. Số lượng hạn chế của mỗi loại vật tư, định mức tiêu hao vật tư cho một đơn vị mặt hàng và lãi thu được từ một đơn vị mặt hàng được cho ở bảng sau:

Mặt hàng / Vật tư	A (x_1)	B(x_2)	C (x_3)	D (x_4)
I (300Đơn vị)	12	5	15	6
II (500đơn vị)	14	8	7	9
III (200đơn vị)	17	13	9	12
Tiền lãi/1ĐVSP	5	8	4	6

Hãy lập phương án sản xuất để tổng tiền lãi lớn nhất đồng thời đảm bảo chủ động về vật tư.

Bài làm:

Gọi x_1 là số lượng sản phẩm A; Gọi x_2 là số lượng sản phẩm B; Gọi x_3 là số lượng sản phẩm C; Gọi x_4 là số lượng sản phẩm D như vậy tiền lãi mong muốn lớn nhất sẽ là: $f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$

Từ bảng sản xuất nguyên liệu ta có:

- Nguyên liệu I dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 300$
- Nguyên liệu II dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 500$
- Nguyên liệu III dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 200$

Do x_1; x_2 ; x_3 ; x_4 là số lượng sản phẩm do vậy $x_j \ge 0$, j = 1: 4

Tổng hợp các phân tích trên ta có bài toán:

(1) $f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$

(2) $$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 300 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 500 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 200 \end{cases}$$

(3) $x_j \ge 0$, i = 1: 4

Kết quả giải bải toán tối ưu:

X1	X2	X3	X4	F(x)
0	15	0	0	120

1.3. Bài toán cái túi

❖ **Bài toán:**

Một người khách đi du lịch muốn mang theo một cái túi nặng không quá b kg. Người khách dự định mang theo n loại vật dụng, mỗi loại vật dụng j có khối lượng là a_j kg và có giá trị là c_i.

Người khách du lịch muốn chất vào túi các vật dụng sao cho tổng giá trị các đồ vật mang theo là lớn nhất.

Phân tích mô hình toán:

Gọi x_j là đồ vật loại j sẽ chất vào cái túi, ta có bài toán như sau:

$$\langle 1\rangle\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$$

$$\langle 3\rangle\ x_j \ge 0,\ j = 1:n,\ x_j\ nguyên$$

1.4. Bài toán pha trộn

❖ **Bài toán:**

Một nhà máy luyện kim muốn sản xuất một hợp kim với thành phần 20%bạc, 30% đồng, 50% nhôm. Họ sử dụng các loại nguyên liệu bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C. Hàm lượng các nguyên liệu và giá một đơn vị khối lượng mỗi loại (USD/kg) được cho ở bảng sau:

	Bạc (x_1)	Đồng (x_2)	Nhôm (x_3)	A (x_4)	B (x_5)	C (x)
Bạc	90%	5%	0	30%	50%	40%
Đồng	10%	90%	0	40%	20%	35%
Nhôm	0	5%	100%	30%	30%	25%
Đơn giá (USD/kg)	1500	300	100	1000	1200	1100

Hãy lập phương án pha trộn thế nào để đơn giá thành sản phẩm là thấp nhất.

*** Phân tích mô hình toán:**

Đặt x_j; j = 1:6 là khối lượng (kg) bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C tương ứng để sản xuất ra 1kg hợp kim (x_j này cũng đồng thời là tỷ lệ pha trộn các nguyên liệu khi sản xuất ra hợp kim).

Trong một kg hợp kim mới tạo ra sẽ chứa 0,2kg bạc, 0,3kg đồng, 0,5kg Nhôm. Từ bảng đã cho ta có các số liệu:

– Lượng bạc chứa trong 1kg sản phẩm là:

$1x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6$ lượng này phải bằng 0,2kg

– Lượng đồng chứa trong 1kg sản phẩm là:

$1x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6$ lượng này phải bằng 0,3kg

– Lượng nhôm chứa trong 1kg sản phẩm là:

$1x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6$ lượng này phải bằng 0,5kg

– Giá thành 1kg sản phẩm sẽ là:

$1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6$ là nhỏ nhất

Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán tối ưu như sau:

(1) $f(x) = 1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6 \rightarrow \min$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6 = 0,2 \\ x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6 = 0,3 \\ x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6 = 0,5 \end{cases}$$

(3) $x_i \geq 0,\ i = 1:6$

Giải bài toán tối ưu ta được:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	F(x)
0.2	0.3	0.5	0	0	0	440

1.5. Bài toán vận tải

❖ Bài toán dạng tổng quát

– Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa được đánh số (i =1:m) lượng hàng hóa ở kho thứ i được kí hiệu là a_i (i =1:m). Có n địa điểm nhận tiêu thụ hàng hóa trên được đánh số (j =1:n) với nhu cầu tiêu thụ ở địa điểm j kí hiệu là b_j (j =1:n)

– Ta gọi kho i là địa điểm xuất phát, điểm tiêu thụ j là điểm đến. Gọi c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm xuất phát i đến điểm đến j.

– Yêu cầu: lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ điểm xuất phát tới điểm tiêu thụ sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

*** Phân tích mô hình toán:**

– Ta đặt x_{ij} là lượng hàng hóa vận chuyển từ điểm xuất phát i đến điểm j; Vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ mong muốn tổng chi phí này nhỏ nhất.

– Các điều kiện đã cho ta biểu diễn dưới dạng:

  - $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ là lượng hàng hóa vận chuyển khỏi kho thứ i

- $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ là lượng hàng hóa chuyển đến nơi tiêu thụ
- Vì x_{ij} là lượng hàng hóa nên $x_{ij} \geq 0$
- Ngoài ra để cân bằng xuất nhập nên $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tổng hợp các phân tích trên ta có mô hình bài toán:

$$\langle 1 \rangle f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle x_{ij} \geq 0, i = 1:m, j = 1:n$$

❖ **Bài tập ví dụ:**

Có hai địa phương A_1 và A_2 chuyên cung cấp cà phê cho 3 công ty xuất khẩu B_1, B_2, B_3. Biết khả năng cung cấp của 2 địa phương A_1 là 150T và A_2 là 250T. Yêu cầu xuất khẩu của công ty B_1 là 100T, B_2 là 130T, B_3 là 170T cước phí vận chuyển (x1000đ/T) từ nơi cung cấp đến nơi nhận được cho theo bảng:

Tiêu thụ / Cung cấp	B_1 100T	B_2 130T	B_3 170T
A_1 150T	12	16	28
A_2 250T	20	31	15

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất

Bài làm:

- Ta đặt x_{ij} là lượng hàng hóa vận chuyển từ điểm xuất phát i đến điểm j; Vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ mong muốn tổng chi phí này nhỏ nhất.

$$\langle 1\rangle\ f(x) = 12x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 20x_{21} + 31x_{22} + 15x_{23} \to \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 250 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 130 \\ x_{13} + x_{23} = 170 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1:2,\ j = 1:3$$

Kết quả giải:

X11	X12	X13	X21	X22	X23	F(x)
20.0	130.0	0.0	80.0	0.0	170.0	6470

II. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC DẠNG CỦA BÀI TOÁN QHTT

2.1. Định nghĩa

QHTT là môn toán học nghiên cứu phương pháp tìm cực trị của một hàm tuyến tính thỏa mãn một số hữu hạn các ràng buộc được biểu diễn bằng các phương trình và bất phương trình tuyến tính.

2.2. Các dạng cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính

Một bài toán quy hoạch tuyến tính gồm 3 thành phần:

- Hàm mục tiêu: là tổ hợp tuyến tính của các ẩn số biểu thị một đại lượng nào đó mà ta mong muốn của bài toán.
- Các ràng buộc cơ bản: là những nảy sinh do hạn chế về tài nguyên, kế hoạch sản xuất, yêu cầu kỹ thuật…
- Các ràng buộc phụ: là tính chất của các ẩn số

❖ **Dạng tổng quát**

$$\langle 1\rangle\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to (\min)\quad \max$$

$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\geq, \leq, =) b_i,\ i = 1:m$$

$$\langle 3\rangle\ x_j (\geq, \leq, tùy ý\ ,0),\ j = 1:n$$

Bài toán được phát biểu như sau: Tìm giá trị $x^*(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n)$ làm cho hàm mục tiêu $f(x) \to \min(\max)$ thỏa mãn các ràng buộc (2),(3)

❖ **Dạng chính tắc**

$$\langle 1\rangle\ f(x) = c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{(min)} \quad \text{max}$$

$$\langle 2\rangle\ A.x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1:m$$

$$\langle 3\rangle\ x = x_j \geq 0$$

Triển khai các phần tử trên ta có:

– A: ma trận các hệ số ràng buộc: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{vmatrix}$

– x: là ma trận các ẩn: $\begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix}$, $x_j \geq 0$;

– b: là ma trận vế phải các ràng buộc: $\begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{vmatrix}$

Đặc trưng của dạng chính tắc là: - Các ràng buộc đều ở dạng đẳng thức

- Các ẩn số đều không âm

❖ **Dạng chuẩn**

$$\langle 1\rangle\ f(x) = c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{max}$$

$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1:m$$

$$\langle 3\rangle\ x_j \geq 0,\ j = 1:n$$

2.3. Quy tắc biến đổi dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

❖ **Đưa bài toán f(x) → min về f(x) → max và ngược lại**

– Trong bài toán f(x) = c.x → min, ta đặt $f'(x)$ = -c.x → max

– Gọi x^* là nghiệm tối ưu của $f'(x)$ và -c.x = max $f'(x)$ khi đó – $c.x^* \geq c.x$ hay $c.x^* \leq c.x$. Như vậy x^* cũng là nghiệm tối ưu của bài toán f(x) → min

– Tức là min f(x) = c. x^* = - max $f'(x)$ = max (- $f'(x)$)

❖ **Phương trình hóa các bất phương trình ở hệ ràng buộc và ngược lại**

– Khi ràng buộc $A.x \le b$ ta thêm vào các biến phụ

  - Đặt $w = (x_{n+1} \ldots x_{n+m})$ khi đó $A.x \le b$ sẽ là $A.x + E.w = b$; trong đó E là ma trận đơn vị, $w \ge 0$
  - Chú ý ẩn phụ đưa vào là ẩn chứa ở hệ ràng buộc, có giá trị không âm, hệ số ẩn phụ đưa vào là +1; những ẩn phụ như vậy cũng là những ẩn cơ bản. Hệ số của ẩn phụ trong hàm mục tiêu bằng 0
  - Ví dụ: Chuyển bài toán QHTT dạng tổng quát về dạng chính tắc

Dạng tổng quát → Dạng chính tắc

$$\langle 1\rangle f(x) = 4x_1 + 6x_2 \to \min \qquad \langle 1\rangle f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ 0,5x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \le 12 \\ x_2 \le 9 \end{cases} \qquad \langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 0,5x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_5 = 12 \\ x_2 + x_6 = 9 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:2 \qquad \langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:6$$

– Khi ràng buộc $A.x \ge 0$ ta trừ các biến phụ

  - Đặt $w = (x_{n+1} \ldots x_{n+m})$ khi đó $A.x \le b$ sẽ là $A.x + E.w = b$; trong đó E là ma trận đơn vị, $w \ge 0$
  - Chú ý ẩn phụ đưa vào là ẩn chứa ở hệ ràng buộc, có giá trị không âm, hệ số ẩn phụ đưa vào là +1; những ẩn phụ như vậy cũng là những ẩn cơ bản. Hệ số của ẩn phụ trong hàm mục tiêu bằng 0
  - Ví dụ: Chuyển bài toán QHTT dạng tổng quát về dạng chính tắc

Dạng tổng quát → Dạng chính tắc

$$\langle 1\rangle f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min \qquad \langle 1\rangle f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 \ge 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 4 \\ 4x_3 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases} \qquad \langle 2\rangle \begin{cases} x_1 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ 4x_3 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_7 = 1 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:3 \qquad \langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:3$$

❖ **Khử các ẩn $x_j \le 0$ hoặc x_j tùy ý**

– Với các ẩn $x_j \le 0$: ta đặt $x'_j = -\ x_j$ và khử x_j ra khỏi bài toán. Sau khi giải bài toán theo x'_j ta căn cứ vào điều kiện để tìm x_j ban đầu

– Với các ẩn x_j tùy ý ta thay bằng hai ẩn $x_j = x'_j - x''_j$ với điều kiện $x'_j, x''_j \geq 0$

❖ **Bài tập:** đưa các bài toán QHTT sau đây về dạng chính tắc

$$\langle 1 \rangle\, f(x) = 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}4x_4 \to \min$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}6x_4 \leq 600 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}5x_4 \leq 800 \\ x_1 + x_2 \geq 1000 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle\, x_1 \geq 0,\ x_2\ .tùy ý\ ,\ (x_3, x_4) \geq 0$$

Bài làm:

Đặt $x_2 = x'_2 - x''_2$ với điều kiện $(x'_j, x''_j) \geq 0$

$$\langle 1 \rangle\, f(x) = 0{,}8x_1 + 0{,}3(x'_2 - x''_2) + 0{,}5x_3 + 0{,}4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \min$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}2(x'_2 - x''_2) + 0{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + x_5 = 600 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4(x'_2 - x''_2) + 0{,}2x_3 + 0{,}5x_4 + x_6 = 800 \\ x_1 + (x'_2 - x''_2) - x_7 = 1000 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle\, x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \geq 0;\ i = 1:7$$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ GIẢI BÀI TOÁN QHTT

3.1. Bài toán phẳng

Đề bài: Tìm $x^* = (x^*_1,\ x^*_2)$ thoả mãn các ràng buộc $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 (a) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 (b) \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ làm cho

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

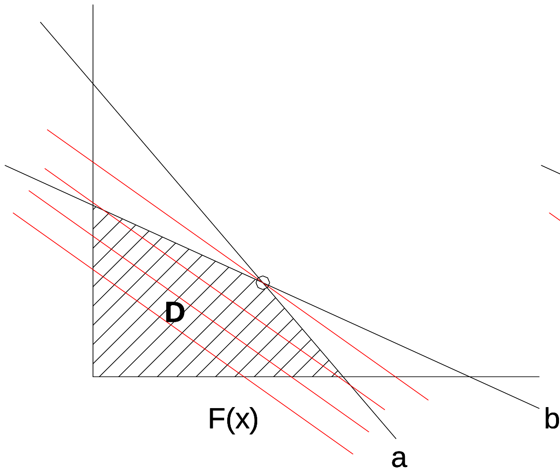
Bài giải:

– Vẽ miền chấp nhận được (miền D mà x thỏa mãn các điều kiện ràng buộc)
  - o Lưu ý: Nếu các ràng buộc là đẳng thức thì miền D là một điểm
  - o Nếu các ràng buộc là bất đẳng thức thì miền D là một đa diện bao gồm cả đường biên

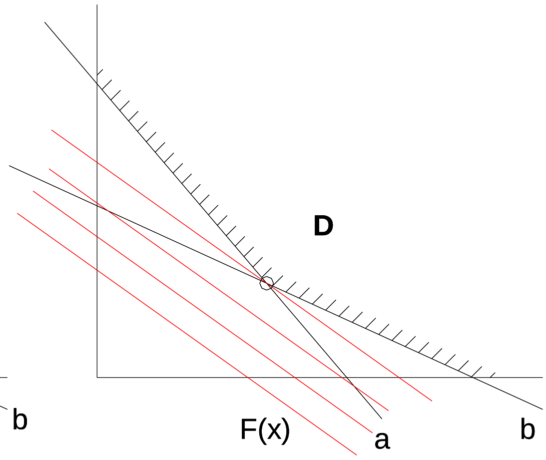
– Vẽ các đường cùng mục tiêu (đường mức):
  - o Cho f(x) bằng một giá trị cụ thể (cho f(x) = B) ta tiến hành vẽ đường

$$x_2 = \frac{B}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}x_1$$

  - o Cho đường mức vừa vẽ tịnh tiến song song với chính nó (tức là thay đổi giá trị f(x)). Càng xa gốc tọa độ thì giá trị của hàm mục tiêu càng tăng.



Hình 2.1



Hình 2.2

- Tìm nghiệm tối ưu
  - Nếu đường mức tiếp xúc với miền D tại một điểm thì nghiệm tối ưu là đơn trị
  - Nếu đường mức tiếp xúc với hai điểm (1cạnh) thì nghiệm đa trị
  - Nếu các ràng buộc có dạng $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{cases}$ miền D như hình 2.2 thì f(x) đạt giá trị min tại A và không tồn tại f(x) max.

3.2. Bài toán mở rộng

Đối với bài toán n biến $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ với m ràng buộc thì miền cho phép là một đa diện lồi (n – m) chiều lúc đó:

- Nghiệm tối ưu là toạ độ của một đỉnh hay nhiều đỉnh của miền cho phép.
- Nghiệm đơn trị nếu một đỉnh của đa diện cho phép tiếp xúc với mặt cùng mục tiêu (mặt mức)
- Nghiệm là đa trị nếu mặt tiếp xúc với k đỉnh (k>1) k đỉnh này tạo nên một đơn hình (k – 1) chiều. Do đó có thể lấy (k – 1) giá trị biến tùy ý, còn (n – (k – 1)) biến khác là hàm tuyến tính của (k – 1) biến tùy ý. Đó chính là cơ sở của phương pháp đơn hình

Bài tập 1: Giải bài toán QHTT sau đây:

$$\langle 1 \rangle f(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Bài làm:

* Vẽ miền chấp nhận của $\langle 2\rangle \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$

– Vẽ đồ thị $2x_1 + x_2 = 8$ ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 8$; $x_2 = 0$, $x_1 = 4$

– Vẽ đồ thị $x_1 + 2x_2 = 7$ ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 3.5$; $x_2 = 0$, $x_1 = 7$

* Vẽ đường cùng mục tiêu

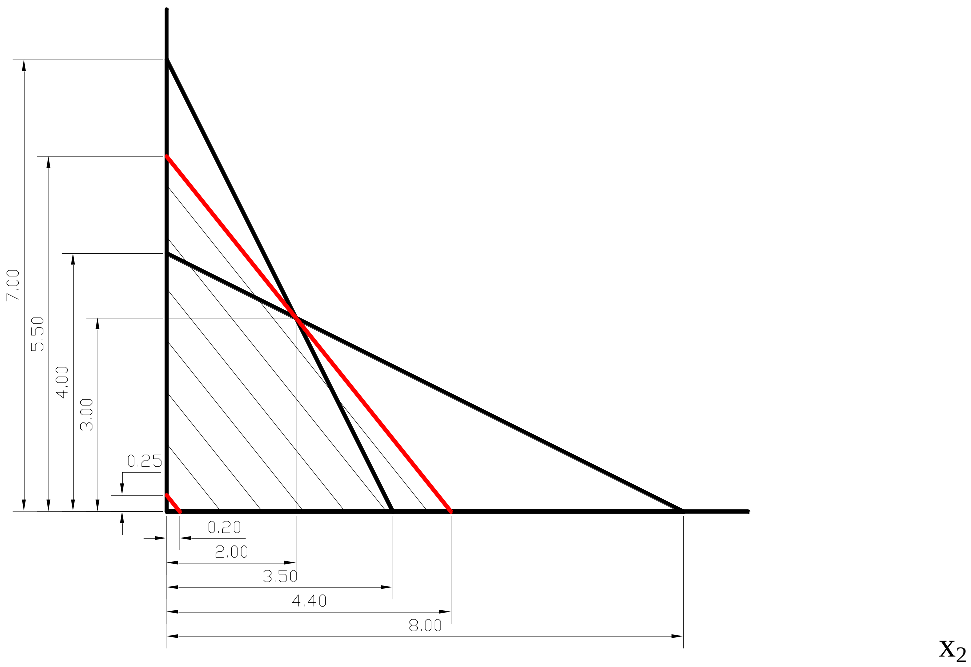
– Cho f(x) = 1 ta có hàm mục tiêu $f(x) = 4x_1 + 5x_2 = 1$ vẽ đồ thị cho hàm mục tiêu này ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 0.2$; $x_2 = 0$, $x_1 = 0.25$

– Cho Cho f(x) = 2 ta có hàm mục tiêu $f(x) = 4x_1 + 5x_2 = 2$ vẽ đồ thị cho hàm mục tiêu này ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 0.4$; $x_2 = 0$, $x_1 = 0.5$

– Cho f(x) = 3 ta có hàm mục tiêu $f(x) = 4x_1 + 5x_2 = 3$ vẽ đồ thị cho hàm mục tiêu này ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 0.6$; $x_2 = 0$, $x_1 = 0.75$

....

– Cho f(x) = 22 ta có hàm mục tiêu $f(x) = 4x_1 + 5x_2 = 22$ vẽ đồ thị cho hàm mục tiêu này ta có $x_1 = 0$, $x_2 = 4.4$; $x_2 = 0$, $x_1 = 5.5$



– Tìm nghiệm tối ưu: Đường mức tiếp xúc với miền D tại một điểm thì nghiệm tối ưu là đơn trị. Từ điểm tiếp xúc đó ta chiếu xuống trục x_1 và x_2 ta xác định được giá trị $x_1 = 3$; $x_2 = 2$, đối chiếu với các ràng buộc phụ ta thấy x_1, x_2 thỏa mãn do đó phương án tối ưu là $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ và giá trị tối ưu f(x) = 22

IV. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA QHTT

Định lý 1: Tập hợp tất cả các phương án của một bài toán QHTT là tập lồi, hay là miền nghiệm cho phép

Định lý 2: Hàm mục tiêu của bài toán QHTT sẽ đạt min hoặc max tại một điểm cực biên của tập D mà nhiều điểm cực biên thì nó sẽ đạt max hoặc min tại những điểm là tổ hợp lồi của các điểm đó.

Định lý 3: Nếu véc tơ A_1, A_2,… A_k là độc lập tuyến tính và thỏa mãn $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = b$ trong đó $x_j > 0$, j =1:k thì điểm x = (x_1, x_2, …x_k, 0, 0…,0) là điểm cực biên của tập lồi đa diện D.

Định lý 4: Nếu x = (x_1, x_2, …x_n) là điểm cực biên của tập lồi đa diện D thì các véc tơ A_j trong biểu diễn $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = b$ ứng với các thành phần x_j >0 thành lập hệ độc lập tuyến tính. Vì ma trận A có m dòng nên suy ra rằng điểm cực biên không quá m thành phần dương.

Định lý này có thể phát biểu khác như sau: Phương án của QHTT chứa một số biến dương bằng số các ràng buộc dạng đẳng thức độc lập được thỏa mãn còn các biến còn lại bằng không.

Định lý 5: Để x = (x_1, x_2, …x_n) là phương án cực biên của QHTT dưới dạng chính tắc thì điều kiện cần và đủ là các vectơ cột của A_j của ma trận A các thành phần x_j là độc lập tuyến tính

V. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QHTT

5.1. Phương pháp thử lần lượt

Giả sử bài toán có m ràng buộc độc lập được cho ở dạng chính tắc: Ax =b (1)

Ta thực hiện các bước như sau:

1. Chọn biến cơ sở

- ❖ Ta chọn một điểm tùy ý thuộc đa diện D đó là tập n số x = (x_1, x_2, …x_n). Theo định lý 4 của quan hệ tuyến tính thì có m số dương, còn những biến khác bằng 0. Gọi các biến dương của điểm xuất phát làm biến cơ sở (x_1, x_2, …x_m, 0, 0, …)

2. Tìm nghiệm xuất phát (nghiệm thử thứ nhất)

- ❖ Thay các biến cơ sở vào ràng buộc (1) ta có m phương trình chứa m ẩn số

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rm}x_m = b, r = 1:m$$

Viết dưới dạng triển khai: $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$ (2)

❖ Giải hệ phương trình tuyến tính (2) ta tìm được nghiệm xuất phát (x_1^0, x_2^0, $\ldots x_m^0$)

❖ Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là: $Z_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_mx_m^0$

3. Chọn nghiệm thử thứ hai

❖ Thêm vào biến x_{m+1} lúc này ràng buộc có dạng:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rm}x_m + a_{rm+1}x_{m+1} = b, r = 1:m \qquad (3)$$

Hệ (3) gồm m phương trình với m+1 biến

Hệ (3) có nghiệm đơn trị khi các phương trình tạo thành hệ phụ thuộc, do đó cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào các cột còn lại với hệ số là y_i:

$$a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \ldots + a_{rm}y_m = a_{r,m+1} \qquad (4)$$

Hệ (4) có nghiệm duy nhất là: (y_1^0, y_2^0, $\ldots y_m^0$)

❖ Lấy các số hạng tương ứng của hệ (3) trừ đi số hạng tương ứng của hệ (4) ta ký hiệu bội số đó là $\lambda \geq 0$ ta được

$$a_{r1}(x_1 - \lambda y_1) + a_{r2}(x_2 - \lambda y_2) + \ldots + a_{rm}(x_m - \lambda y_m) + a_{r,m+1} + \lambda = b_r, r = 1:m \qquad (5)$$

Hệ (5) là biến thể của hệ (4) chỉ có các ẩn là khác.

❖ Chọn nghiệm thử thứ 2 cho hệ (5) là:

$$(x_1^0 - \lambda y_1^0), (x_2^0 - \lambda y_2^0), \ldots, \ (x_m^0 - \lambda y_m^0), \lambda \qquad (6)$$

– Do có m + 1 biến nên một trong các biến phải nhận giá trị không. Muốn biết biến nào trong hệ (6) phải nhận giá trị không ta phải thực hiện như sau:

– Tính giá trị của hàm mục tiêu với giá trị thứ nhất và nghiệm thử thứ hai:

$Z_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_mx_m^0$

$$z_1 = c_1(x_1^0 - \lambda y_1^0) + c_2(x_2^0 - \lambda y_2^0) + \ldots + c_m(x_m^0 - \lambda y_m^0) + c_{m+1}\lambda$$

Ta có số gia: $\Delta z_1 = z_1 - z_0 = \lambda [c_{m+1} - (c_1y_1^0 + c_2y_2^0 + \ldots + c_my_m^0)] = \lambda(c_{m+1} - \gamma_{m+1})$

Trong đó $\gamma_{m+1} = c_1y_1^0 + c_2y_2^0 + \ldots + c_my_m^0$

Ta gọi $(c_{m+1} - \gamma_{m+1})$ là hiệu xuất

– Có thể có 3 trường hợp xảy ra:

- o $\Delta Z = 0$: nghiệm xuất phát và nghiệm mới đưa vào như nhau. Suy ra có hai đỉnh tiếp xúc giữa đa diện nghiệm D và mặt đồng mức Z

- ○ $\Delta Z < 0$: Với bài toán $Z \to Max$ nghiệm mới đưa vào xấu hơn nghiệm xuất phát, loại nghiệm mới; Nhưng với bài toán $Z \to Min$ nghiệm mới đưa vào tốt hơn nghiệm xuất phát, nhận nghiệm mới.
- ○ $\Delta Z > 0$: Với bài toán $Z \to Max$ nghiệm mới đưa vào tốt hơn nghiệm xuất phát, nhận nghiệm mới; Nhưng với bài toán $Z \to Min$ nghiệm mới đưa vào xấu hơn nghiệm xuất phát, loại nghiệm mới.

– Khi đã chọn đã chọn được nghiệm mới tốt hơn hoặc bằng nghiệm xuất phát ta đưa nó vào cơ sở và cần loại bỏ một nghiệm trong biến xuất phát (vì theo định lý 4 chỉ có m nghiệm dương)

– Giả thiết đã đưa biến mới thứ m + 1 vào cơ sở, khi đó ta có thể viết các biến mới của phương án theo hệ (6); một biến thứ I nào đó phải thoả mãn phương trình: $x_i^0 - \lambda y_i^0 = 0 \to \lambda = \frac{x_i^0}{y_i^0}$

– Còn đối với biến $j \neq i$ thì $x_i^0 - \lambda y_i^0 > 0$

Từ đó suy ra phải loại trừ biến nào ứng với $\lambda > 0$ và nhỏ nhất ($0 < \lambda = Min \frac{x_i^0}{y_i^0}$

4. Thực hiện liên tục các thủ thuật toán ở trên

Đưa vào các biến chưa dùng m + 2, m + 3,… tính ΔZ_2, ΔZ_3,… cho tới khi thử hết các biến cơ sở.

$$\Delta Z_2 = \lambda (c_{m+2} - \gamma_{m+2})$$

....

$$\Delta Z_i = \lambda (c_{m+i} - \gamma_{m+i})$$

<u>BÀI TẬP ÁP DỤNG:</u> PHƯƠNG PHÁP THỬ LẦN LƯỢT

Bài tập 1: Tìm x^* (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho:

$$\begin{aligned}
&\langle 1\rangle Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 \to Max\\
&\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 800 \end{cases}\\
&\langle 3\rangle x_j \geq 0, j = 1:4
\end{aligned}$$

Bài làm:

❖ Chọn biến cơ sở: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên biến cơ sở là: (x_1, x_2, 0, 0)

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 = 800 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 220$, $x_2^0 = 120$, Vậy nghiệm xuất phát là: x = (220,120,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 220 + 2.120 = 460$

❖ Thử đưa x_3 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 800 \end{cases}$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} y_1 - y_2 = 7 \\ 2y_1 + 3y_2 = -1 \end{cases}$ giải hệ ta được $y_1^0 = 4$, $y_2^0 = -3$

Hiệu suất của x_3 là: $\gamma_3 = 1.4 + 2.(-3) = -2$

$$C_3 - \gamma_3 = -3 - (-2) = -1 < 0$$

Do vậy đưa x_3 vào không có lợi

❖ Thử đưa x_4 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_4 = 800 \end{cases}$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} y_1 - y_2 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 = 10 \end{cases}$ giải hệ ta được $y_1^0 = 13/5$, $y_2^0 = 8/5$

- **Tính hiệu suất của x_4 là**: $C_4 - \gamma_4 = 6 - (29/5) = 1/5 > 0$

Trong đó $C_4 = 6$; $\gamma_4 = 1.13/5 + 2.8/5 = 29/5$

Bài toán Z → Max mà hiệu xuất của $x_4 \geq 0$; Do vậy đưa x_4 vào có lợi, nhận x_4

- **Xét hệ số** λ

$$\lambda_i = \frac{x_i^0}{y_i^0}; \quad \lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{220 .5}{13} = 84,6; \quad \lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{120 .5}{8} = 75$$

Loại ẩn có hệ $\lambda_i \geq 0$ và nhỏ nhất cho cả hai bài toán; thấy $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ do vậy loại x_2 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là x= (x_1, 0,0,x_4); Thay biến cơ sở và phương trình ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 10x_4 = 800 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 25 \\ x_4 = 75 \end{cases}$ tính giá trị $Z_1 = 1.25 + 6.75 = 475$

$$\Delta Z = Z_1 - Z_0 = 475 - 460 = 15$$

❖ Kết luận: vậy phương án tối ưu là : $x^* = (25,0,0,75)$ và giá trị tối ưu là $Z_{x^*} = 475$

$$\langle 1\rangle f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

Bài tập 2: Tìm x_1, x_2 sao cho: $$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:2$$

Bài làm:

❖ Chuyển bài toán QHTT dạng tổng quát về chính tắc ta có:

$$\langle 1\rangle f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:5$$

❖ Chọn biến cơ sở:

Hệ ràng buộc có 3PT, theo định lý 4 sẽ có 3 nghiệm dương, nên biến cơ sở là: (x_1, x_2, x_3, 0, 0)

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 6$, $x_2^0 = 3$, $x_3^0 = 6$

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (6,3,6,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 2.6 + 5.3 = 27$

❖ Thử đưa x4 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$ hệ có 3 PT mà 4 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 0,5$, $y_2^0 = -0,5$, $y_3^0 = 1,5$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 2.0,5 – 5.0,5 + 0.1,5 = - 1,5$

$$c_4 - \gamma_4 = 0 – (-1,5) = 1,5 > 0$$

Nên đưa x_4 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{6}{0,5} = 12$; $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{3}{-0,5} = -6$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{6}{1,5} = 4$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_3 > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_3 khỏi biến cơ sở;

Biến cơ sở mới là: $(x_1, x_2, 0, x_4, 0)$

Thay biến cơ sở mới vào hệ ràng buộc ta có: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ giải hệ ràng buộc ta được: $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 5$, $x_4^0 = 4$ và giá trị hàm mục tiêu $Z_1 = 2.4 + 5.5 + 0.4 = 33$

$\Delta Z_1 = Z_1 - Z_0 = 33 - 27 = 6 > 0$

❖ Thử đưa x_5 vào cơ sở ta có hệ phương trình ràng buộc

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$ có 3 PT mà 4 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} y_1 + 4y_2 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$ giải hệ ta được: $\begin{cases} y_1^0 = 4/3 \\ y_2^0 = -1/3 \\ y_4^0 = -11/3 \end{cases}$

Hiệu suất của x_5 là: $\gamma_5 = 2.4/3 - 5.1/3 = 1$

$c_5 - \gamma_5 = 0 - 1 < 0$ do đó đưa x_5 vào không có lợi

Vậy phương án tối ưu là: $x^* = (4,5,0,4,0)$ và giá trị tối ưu là $Z^* = 2.4 + 5.5 + 0.4 = 33$

Bài tập 3: Tìm x_1, x_2, sao cho

$$\langle 1\rangle f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \to Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:6$$

Bài làm:

❖ Chọn biến cơ sở: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên chọn biến cơ sở là: $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 2$, $x_2^0 = 2$, $x_3^0 = 2$

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (2,2,2,0,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 6 + 10 + 6 = 22$

❖ Thử đưa x_4 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (x_1, x_2, x_3, x_4,0 ,0) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 = 1 \\ 2y_1 + 3y_3 = 0 \\ 2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

giải hệ ta được $y_1^0 = 3/17$, $y_2^0 = 4/17$, $y_3^0 = -2/17$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 9/17 + 12/17 - 6/17 = 15/17$

$$C_4 - \gamma_4 = -3 - 15/17 = -66/17 < 0$$

Nên đưa x_4 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{2}{3/17} = 34/3$; $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{2}{4/17} = 34/4$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{2}{-2/17} = -17$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_I > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_2 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là (x_1, 0, x_3, x_4,0 ,0); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$$

giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 0.5$, $x_3^0 = 3$, $x_4^0 = 8.5$

Vậy nghiệm mới là: x = (0.5, 0, 3, 8.5, 0, 0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = -15$

❖ Thử đưa x_5 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (x_1, 0, x_3, x_4, x_5 ,0) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$$

hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + 3y_3 = 1 \\ 4y_3 = 0 \end{cases}$$

giải hệ ta được $y_1^0 = 1/2$, $y_3^0 = 0$, $y_4^0 = -1/2$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_5 = 3/2 + 0 + 3/2 = 3$

$$C_5 - \gamma_5 = 2 - 3 = -1 < 0$$

Nên đưa x_5 vào có lợi nên cần loại bỏ một ẩn ra khỏi hệ ràng buộc:

Tính $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{0.5}{0.5} = 1$; $\lambda_3 = \frac{x_3^0}{y_3^0} = \frac{3}{0} = \infty$; $\lambda_4 = \frac{x_4^0}{y_4^0} = \frac{8.5}{-0.5} = -17$; ta loại bỏ biến nào có giá trị $\lambda_i > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ x_1 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là (0, 0, x_3, x_4, x_5, 0); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có $\begin{cases} -x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 = 12 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_3^0 = 3$, $x_4^0 = 9$, $x_5^0 = 1$;

Vậy nghiệm mới là: x = (0, 0, 3, 9, 1, 0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = -16$

❖ Thử đưa x_6 vào biến cơ sở; biến cơ sở là: (0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6) thay vào ràng buộc ta có hệ PT ràng buộc:

$\begin{cases} -x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$ hệ có 3 PT mà 4 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$\begin{cases} -y_3 + y_4 = 0 \\ 3y_3 + y_5 = 0 \\ 4y_3 = 1 \end{cases}$ giải hệ ta được $y_3^0 = 1/4$, $y_4^0 = 1/4$, , $y_5^0 = -3/4$

Hiệu suất của x_5 là: $\gamma_6 = 3/4 - 3/4 - 6/4 = -6/4$

$$C_6 - \gamma_6 = 1 - (-6/4) = 10/4 > 0$$

Nên đưa x_6 vào không có lợi nên

❖ Kết luận: vậy phương án tối ưu là: x* = (0, 0, 3, 9, 1, 0) và giá trị tối ưu là $Z_0 = -16$

5.2. Phương pháp lập bảng

1. Cơ sở toán học của phương pháp

❖ **Tính chất 1**: Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cơ bản tối ưu.

❖ **Tính chất 2**: Số phương án cơ bản là hữu hạn.

❖ **Tính chất 3**: Điều kiện cần và đủ để bài toán có phương án tối ưu là hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới khi f(x) → min và bị chặn trên khi f(x) → max trên tập hợp các phương án

❖ Chú ý: do tính chất 1 ta chỉ xét phương án cơ bản tức là sau khi đưa về chính tắc đã xuất hiện phương án cơ bản. Nếu đưa về dạng chính tắc mà vẫn chưa xuất hiện phương án cơ bản thì ta phải đặt ẩn giả thông qua bài toán phụ.

❖ Xuất phát từ phương án cơ bản, dùng tiêu chuẩn tối ưu để xác định một trong ba khả năng của bài toán:

- Phương án tối ưu
- Bài toán không có phương án tối ưu
- Khả hai khả năng trên không khẳng định được thì chuyển sang phương án cơ bản tiếp theo. Bài toán cứ lặp như vậy cho tới khi giải xong. Do tính chất 2 nên số lần lặp sẽ là hữu hạn. Việc chuyển phương án cơ bản này sang phương án cơ bản khác bằng cách thay đổi ẩn cơ bản bằng phương pháp Gauss – Jordan

PHƯƠNG PHÁP LẬP BẢNG

1. Tiêu chuẩn tối ưu

- Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi j ở bài toán Z → min và $\Delta_j \geq 0$ với mọi j ở bài toán Z → max thì phương án đang xét là phương án tối ưu
- Tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \leq 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → min và $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \leq 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → max thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

2. Chọn ẩn đưa vào và ẩn đưa ra

Trong hai trường hợp trên không xảy ra thì ta chuyển phương án

*** Ẩn đưa vào (x_L):**

- Bài toán Z → min ẩn đưa vào ứng với cột có $\Delta_j > 0$ và lớn nhất
- Bài toán Z → max ẩn đưa vào ứng với cột có $\Delta_j < 0$ và nhỏ nhất

*** Ẩn đưa ra (x_k):**

– Chung cho cả hai bài toán Z → max và Z → min ẩn đưa ra là ẩn ứng với hàng k

có $\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kl}} = \min(\frac{b_i}{a_{il}}$ với $a_{il} > 0$)

3. Ẩn cơ bản

Ẩn cơ bản còn gọi là ẩn độc lập tuyến tính, có hai đặc trưng

– Chỉ xuất hiện một lần trong các phương trình ràng buộc

– Có hệ số bằng + 1

TRÌNH TỰ LẬP BẢNG ĐƠN HÌNH

Bước 1: Lập bảng đơn hình

- Cột 1: Ẩn cơ bản ACB
- Cột 2: Hệ số ACB – ghi các hệ số của ACB trong hàm mục tiêu
- Cột 3: Phương án – ghi giá trị b_i của các phương trình ràng buộc theo giá trị tương ứng của hàng ACB
- Cột 4: Ghi các hệ số của các ẩn tương ứng trong hệ ràng buộc.
- Cột 5: Ghi tỷ số giữa cột phương án với cột chuẩn theo hàng tương ứng chỉ tính các hệ số $a_{il} > 0$ ($\lambda_i = \frac{b_i}{a_{il}}$)
- Hàng cuối cùng: ghi các hệ số của Δ
  - Δ_0 – là giá trị hàm mục tiêu ở phương án đầu $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$
  - Với các ẩn cơ bản thì $\Delta_j = 0$
  - Hệ số đặc trưng của cột tương ứng của các ẩn khác ẩn cơ bản là $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu

Dựa vào hệ số đặc trưng của Δ_j ta tiến hành kiểm tra như sau:

- Phương án ban đầu là phương án tối ưu nếu:
  - Nếu $\Delta_j \le 0$ với mọi j = 1: n ở bài toán Z → min
  - Nếu $\Delta_j \ge 0$ với mọi j = 1:n ở bài toán Z → max
- Nếu phương án có tồn tại
  - Nếu $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → min và $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z → max thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

- Nếu phương án có tồn tại:
  - Nếu $\Delta_j > 0$, nhưng với mọi j có $a_{ij} > 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \rightarrow \min$
  - Nếu $\Delta_j < 0$ nhưng với mọi j có $a_{ij} > 0$ (i = 1:m) ở bài toán $Z \rightarrow \max$

Thì chuyển sang phương án tốt hơn.

Bước 3: Xác định cột chuẩn – tìm ẩn đưa vào

Dựa vào tính chất của hệ số đặc trưng Δ_j ta có quy tắc xác định cột chuẩn như sau:

- Với bài toán $Z \rightarrow \min$; cột chuẩn là cột ứng với $\Delta_L = \Delta_j$ lớn nhất với những $\Delta_j > 0$ và x_j không cơ bản.
- Với bài toán $Z \rightarrow \max$; cột chuẩn là cột ứng với $\Delta_L = \Delta_j$ nhỏ nhất với những $\Delta_j < 0$ và x_j không cơ bản.
- Biến x_L tương ứng với cột chuẩn là ẩn đưa vào trong bảng đơn hình mới.

Bước 4: Xác định hàng chuẩn, tìm ẩn đưa ra, tìm phần tử xoay

- Quy tắc xác định hàng chuẩn áp dụng chung cho cả hai bài toán $Z \rightarrow \max$ và $Z \rightarrow \min$ ẩn đưa ra là ẩn ứng với hàng k có $\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kl}} = \frac{b_i}{a_{il}}$ (nhỏ nhất với $a_{il} > 0$)
- Ẩn tương ứng với hàng k (x_k) là ẩn đưa ra khỏi bảng đơn hình
- Phần tử a_{ij} ứng với cột chuẩn i = l, hàn chuẩn j = k được gọi là phần tử xoay a_{kl}

Bước 5: Biến đổi thay phương án

- Sau khi xác định được ẩn đưa vào x_l, ẩn đưa ra x_k, phần tử xoay a_{kl}
- Thay biến cơ bản ở hàng k bằng biến x_l (loại x_k ra)
- Giá trị số liệu ở hàng cơ sở (hàng x_l) tính như sau:

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}},\ j = 1:n\ ; \qquad b'_k = \frac{b_k}{a_{kl}},\ j = 1:n$$

Trong đó: a'_{kj} ; b'_k giá trị ở bảng mới

a_{kj} ; a_{kl}; b_k giá trị ở bảng cũ

- Giá trị các hàng còn lại biến đổi theo quy tắc của bảng sau:

$$b'_i = \frac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}}\ ; i = 1: m; j =1: n$$

$$a'_{ij} = \frac{a_{ii} a_{kl} - a_{kj} a_{il}}{a_{kl}}\ ; i = 1: m; j =1: n$$

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j a_{kl} - a_{kj} \Delta_l}{a_{kl}}\ ; i = 1: m; j =1: n$$

BÀI TẬP PHƯƠNG PHÁP LẬP BẢNG ĐƠN HÌNH

Giải bài toán QHTT sau:

$$\langle 1\rangle f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \to Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \geq 0,\ j = 1:6$$

1. Xác định ẩn cơ bản

– Đây là phương trình chính tắc và có ẩn cơ bản là $x_4 = 6$; $x_5 = 10$; $x_6 = 12$

2. Lập bảng đơn hình ban đầu

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
X_4	-3	6	1	3	-1	1	0	0	
X_5	2	10	2	0	3	0	1	0	10/3
X_6	1	12	0	2	4	0	0	1	12/4
Δ		$\Delta_0 = 14$	Δ_1=-2	Δ_2=-12	Δ_3=10	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	Δ_6 =0	

– Từ bảng đơn hình xuất phát ta kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu nhận thấy: đây là bài toán $Z \to$ min nhưng có $\Delta_3 = 10 > 0$ do đó phương án xuất phát không phải là phương án tối ưu nên phải chuyển phương án.

3. Biến đổi phương án

– Xác định cột chuẩn, tìm ẩn đưa vào: đây là bài toán $Z \to$ min, nên cột chuẩn đưa vào là cột ứng với $\Delta j > 0$ và lớn nhất. Do vậy cột l = 3 là cột chuẩn và x_3 là ẩn đưa vào.

– Xác định hàng chuẩn, tìm ẩn đưa ra: điều kiện hàng chuẩn k phải là hàng có λ_k = min$\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\}$ và $a_{i3} > 0$; do đó k = 3 và phần tử đưa ra là x_6

– Xác định phần tử xoay: $a_{kl} = a_{33} = 4$; hàng chuẩn của bảng đơn hình mới là k = 3

– Dựa vào cách tính toán giá trị ở bảng đơn hình biến đổi ta lập được bảng đơn hình mới là:

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
X_4	-3	$b'_1 = 9$	1	7/2	0	1	0	1/4	
X_5	2	$b'_2 = 1$	2	-3/2	0	0	1	-3/4	10/3
X_3	3	$b'_3 = 3$	0	1/2	1	0	0	1/4	12/4
Δ		$\Delta_0 = -16$	Δ_1=-2	Δ_2=-12	Δ_3= 0	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$	Δ_6 =-5/2	

Từ bảng ta thấy với mọi j = 1: 6 thì $\Delta j \leq 0$, đây là bài toán $Z \to$ min. Nên phương án ở bảng là phương án tối ưu. $x^* = (0, 0, 3, 9, 1, 0)$ và giá trị tối ưu là $f(x^*) = -16$

1	2	3	4						5
ACB	Hệ số ABC	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
x_4	$C_1 = -3$	$b_1 = 6$	$a_{11}= 1$	$a_{12} = 3$	$a_{13} = -1$	$a_{14} = 1$	$a_{15} = 0$	$a_{16} = 0$	
x_5	$C_2 = 2$	$b_2 = 10$	$a_{21}= 2$	$a_{22} = 0$	$a_{23} = 3$	$a_{24} = 0$	$a_{25} = 1$	$a_{26} = 0$	
x_6	$C_3 = 1$	$b_3 = 12$	$a_{31}= 0$	$a_{32} = 2$	$a_{33} = 4$	$a_{34} = 0$	$a_{35} = 0$	$a_{36} = 1$	
Δ_j		$\Delta_0 = 14$	$\Delta_1 = -2$	$\Delta_2 =$	$\Delta_3 =$	$\Delta_4 =$	$\Delta_5 =$	$\Delta_6 =$	
Bảng mới									
x_4	$C_1 = -3$	$b_1' =$	$a_{11}' =$	$a_{12}' =$	$a_{13}' =$	$a_{14}' =$	$a_{15}' =$	$a_{16}' =$	
x_5	$C_2 = 2$	$b_2' =$	$a_{21}' =$	$a_{22}' =$	$a_{23}' =$	$a_{24}' =$	$a_{25}' =$	$a_{26}' =$	
x_3	$C_3 = 3$	$b_3' =$	$a_{31}' =$	$a_{32}' =$	$a_{33}' =$	$a_{34}' =$	$a_{35}' =$	$a_{36}' =$	
Δ_j'		$\Delta_0' =$	$\Delta_1' =$	$\Delta_2' =$	$\Delta_3' =$	$\Delta_4' =$	$\Delta_5' =$	$\Delta_6' =$	

Phương án ban đầu

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$$

$\Delta_0 = -3.6 + 2.10 + 1.12 = 14$

$\Delta_1 = (-3.1 + 2.2 + 1.0) – 3 = -2$

$\Delta_2 = (-3.3 + 2.0 + 1.2) – 5 = -12$

$\Delta_3 = (-3.-1 + 2.3 +1.4) – 3 = 10$

$\Delta_4 = (-3.1 + 2.0+1.0) – (-3) = 0$

$\Delta_5 = (-3.0 + 2.1+1.0) – 2 = 0$

$\Delta_6 = (-3.0 + 2.0+1.1) – 1 = 0$

Phương án xoay

$$b_k' = \frac{b_k}{a_{kl}},\ j = 1:n$$

$$a_{kj}' = \frac{a_{kj}}{a_{kl}},\ j = 1:n$$

$$b_i' = \frac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}}\text{; i = 1: m; j =1: n}$$

$$a_{ij}' = \frac{a_{ii} a_{kl} - a_{kj} a_{il}}{a_{kl}}\text{; i = 1: m; j =1: n}$$

$$\Delta_j' = \frac{\Delta_j a_{kl} - a_{kj}\Delta_l}{a_{kl}}\text{; i = 1: m; j =1: n}$$

Phương án xoay

$$b_1' = \frac{b_1 a_{33} - b_3 a_{13}}{a_{33}} = \frac{6.4 - 12.(-1)}{4} = 9$$

$$b_2' = \frac{b_2 a_{33} - b_3 a_{23}}{a_{33}} = \frac{10.4 - 12.3}{4} = 1$$

$$b_3' = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{12}{3} = 3$$

$$a_{11}' = \frac{a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}}{a_{33}} = \frac{1.4 - 0.(-1)}{4} = 1$$

$$a_{21}' = \frac{a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}}{a_{33}} = \frac{2.4 - 0.3}{4} = 2$$

$$a_{31}' = \frac{a_{31}}{a_{33}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$a_{12}' = \frac{a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}}{a_{33}} = \frac{3.4 - 2(-1)}{4} = 7/2$$

$$a_{22}' = \frac{a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}}{a_{33}} = \frac{0.4 - 2.3}{4} = -3/2$$

$$a_{32}' = \frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{2}{4} = 1/2$$

VII. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

1. KHÁI NIỆM

2. CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

2.1. Cặp bài toán P - D

Cho bài toán QHTT sau đây (Bài toán gốc P): Tìm x = (x_1, x_2,… x_n) là cho hàm mục tiêu Z_p → max với các ràng buộc sau:

$$\langle 1\rangle Z_p = \sum_{j=1}^{n} c_j x_J \to \max$$

$$(2) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ; i = 1 \div m$$

$$(3) x_j \ge 0 ; i = 1 : m ; j = 1 : n$$

Bài toán đối ngẫu D tương ứng với bài toán P được phát biểu như sau: tìm y = (y_1, y_2,… y_m) là cho hàm mục tiêu Z_D →min với các ràng buộc sau:

$$\langle 1\rangle Z_D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$(2) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j ; j = 1 \div n$$

$$(3) y_i \ge 0 ; i = 1 : m ;$$

2.2. Trình tự lập bài toán P - D

Bước 1: Lập sơ đồ

- Viết các biến x_j tương ứng (hàng trên cùng)
- Viết ma trận hệ số các ma trận ràng buộc thành dạng bảng
- Viết các hệ số C_j tương ứng (hàng cuối cùng)
- Viết các hệ số bi tương ứng (cột ngoài cùng bên phải)
- Viết các biến y_i của bài toán D (cột ngoài cùng bên trái)
- Đánh dấu các hạn chế của biến

Bước 2: Từ sơ đồ lập bài toán D

Bài tập 1: Cho bài toán gốc P

$\langle 1 \rangle Z_p = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \to Max$

$\langle 2 \rangle \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -2 \end{cases}$

Lập bài toán đối ngẫu D

$\langle 3 \rangle x_1, x_2\, tùy ý \;;\; x_3 \le 0$

Bài làm

Bước 1: Lập sơ đồ đối ngẫu

		$X1$	$X2$	$X3$		
		TY	TY	≤ 0		
$Y1$	$\ge$	1	2	1	$\le$	$b1 = 2$
$Y2$	TY	-2	1	-1	$=$	$b2 = 4$
$Y3$	$\ge$	1	2	-1	$\le$	$b3 = -2$
		$=$	$=$	$\le$		
		$C1 = 27$	$C2 = 50$	$C3 = 18$		

Bước 2: Từ sơ đồ đối ngẫu viết thành bài toán đối ngẫu

$\langle 1 \rangle Z_D = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \to Min$

$\langle 2 \rangle \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 27 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 50 \\ y_1 - y_2 - y_3 \le 18 \end{cases}$

$\langle 3 \rangle y_1 \ge 0, y_2 TY, y_3 \ge 0$

Bài tập 2: Cho bài toán gốc P

$\langle 1\rangle Z_p = -2x_1 + x_2 + x_4 \to Min$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$$

Lập bài toán đối ngẫu D

$\langle 3\rangle x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

<u>Bài làm</u>

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		$\ge$	$\ge$	$\ge$	$\ge$	
y_1	$\le$	1	1	-1	0	≤ 15
y_2	*tùyý*	1	1	1	1	$= 27$
y_3	$\le$	1	-1	-1	0	≤ 18
		$\le$	$\le$	$\le$	$\le$	
		-2	1	0	1	

$\langle 1\rangle Z_D = 15y_1 + 27y_2 + 18y_3 \to Max$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le -2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \le 0 \\ y_2 \le 1 \end{cases}$$

$\langle 3\rangle y_1, y_3 \le 0, y_2\, tùyý$

3. QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN P VÀ BÀI TOÁN D

1. Các định lý đối ngẫu

Định lý 1: Với cặp bài toán P và D chỉ xảy ra một trong 3 trường hợp sau:

- Cả P và D đều không có phương án
- Cả P và D đều có phương án, lúc đó cả hai đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu $Z_{P(\text{tối ưu})} = Z_{D(\text{tối ưu})}$
- Một trong hai bài toán không có phương án tối ưu, còn bài toán kia có phương án, khi đó bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

Định lý 2: (Định lý về độ lệch bù) điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán P và y^0 của bài toán D tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j\right) = 0,\ j = 1:n \\ y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i\right) = 0, i = 1:m \end{cases}$$

Chú ý: Trong các tích trên nếu các thừa số này khác không thì thừa số kia phải bằng không. Nhờ tính chất này mà ta lập được hệ phương trình tuyến tính giúp cho việc giải bài toán D.

2. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

Giả sử đã giải được bài toán D, ta có thể suy ra kết quả của bài toán P như sau:

Theo định 1: Nếu bài toán D không có phương án tối ưu thì kết luận bài toán P không có phương án tối ưu.

Theo định lý 1 và 2: Nếu bài toán D có phương án tối ưu là $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ và giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{D(Yo)}$ ta có

- Bài toán P cũng có phương án tối ưu là $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ với giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{P(Xo)} = Z_{D(Yo)}$
- Việc tính toán giá trị phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ được tiến hành như sau:

- Thứ 1: Nếu $y_i^0 \neq 0$ thì ta có $\sum a_{ij} x_i^0 = b_i$, nhờ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính để tính giá trị x_j^0
- Thứ 2: Ta thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = E$. Với các chỉ số j nào mà $E \neq 0$ thì theo định lý 2 thì có $x_j = 0$
- Với các phương trình đã được lập ở công việc thứ 1 và kết quả xác định được ở công việc thứ 2, ta tìm được nghiệm tối ưu của bài toán P

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Giải bài toán QHTT sau

$$\langle 1\rangle f(x) = 52x_1 + 60x_2 + 36x_3 \to Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_2 \geq -2 \\ x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j\, tùy.ý,\ j = 1:3$$

Bước 1: Chuyển bài toán P về bài toán D

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & & \\
 & & t.ý & t.ý & t.ý & & \\
y_1 & \geq & 1 & 0 & 0 & \geq & -2 \\
y_2 & \geq & 2 & 4 & 3 & \geq & 6 \\
y_3 & \geq & 4 & 2 & 0 & \geq & 4 \\
y_4 & \geq & 0 & 1 & 0 & \geq & -2 \\
y_5 & \geq & 0 & 0 & 1 & \geq & 3 \\
 & & = & = & = & \rightarrow & Min \\
 & & 52 & 60 & 36 & \downarrow & \max
\end{array}
$$

→ Bài toán D

$$\langle 1\rangle f(x) = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 2y_4 + 3y_5 \rightarrow Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle y_i \geq 0; i = 1:3$$

Bước 2: Giải bài toán D bằng phương pháp thử lần lượt

- Chọn biến cơ sở Theo định lý 4 có 3 PT ràng buộc nên có 3 nghiệm dương; ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,0,0)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 = 36 \end{cases}$ giải được $\begin{cases} y_1^0 = 4 \\ y_2^0 = 12 \\ y_3^0 = 6 \end{cases}$ giá trị hàm mục tiêu Z_0 = -2.4 + 6.12 + 4.6 = 88
- Thử đưa y_4 vào cơ sở ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,y_4,0)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 = 36 \end{cases}$ ba phương trình 4 ẩn nên chuyển thành $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 2a_3 = 1 \\ 3a_2 = 0 \end{cases}$ giải ta được $a_1 = -2; a_2 = 0; a_3 = 0,5$

  Hiệu suất của y_4: γ_4 = -2.(-2) + 6.0 + 4.0,5 = 6

  $\Delta_4 = c_4 - \gamma_4$ = -2 - 6 = - 8 < 0 nên đưa y_4 vào không có lợi
- Thử đưa y_5 vào cơ sở ta có $Y_0=(y_1,y_2,y_3,0,y_5)$; thay vào ràng buộc ta có $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$ ba phương trình 4 ẩn nên chuyển thành $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 = 1 \end{cases}$ giải ta được $a_1 = 3; a_2 = 0,5; a_3 = -1$

  Hiệu suất của y_5: γ_5 = -2.3 + 6.0,5 + 4.(-1) = -7

  $\Delta_5 = c_5 - \gamma_5$ = 3 – (-7) = 10 > 0 nên đưa y_5 vào có lợi

  Tính $\lambda_1 = \frac{y_1^0}{a_1^0} = \frac{4}{3}$; $\lambda_2 = \frac{y_2^0}{a_2^0} = \frac{12}{0,5} = 24$; $\lambda_3 = \frac{y_3^0}{a_3^0} = \frac{6}{-1} = -6$; ta loại bỏ biến nào có giá giá trị $\lambda_I > 0$ và có giá trị nhỏ nhất do vậy loại bỏ y_1 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là $Y_0=(0,y_2,y_3,0,y_5)$; Thay biến mới vào ràng buộc ta được $\begin{cases} 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$ giải

hệ ta được $\begin{cases} y_2^0 = 11,333 \\ y_3^0 = 7,333 \\ y_5^0 = 2 \end{cases}$ giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 6.11,333 + 4.7,333 + 3.2 = 103,33$

Kết luận phương án tối ưu của bài toán D là $Y^0 = (0;11,333;7,333;0;2)$ và giá trị tối ưu là $Z^0 = 103,33$

Bước 3: Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Thứ 1: Kết quả giải bài toán D cho thấy $(y_2, y_3, y_5) \neq 0$ nên ta có $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

- Thứ 2: Thay kết quả $Y^0 = (0;\ 11,333;\ 7,333;\ 0;\ 2)$ vào biểu thức tính $\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 - 60 \\ 3y_2 + y_5 - 36 \end{cases} = \begin{cases} 1.0 + 2.11,333 + 4.7,333 - 52 = 0 \\ 4.11,333 + 2.7,333 + 1.0 - 60 = 0 \\ 3.11,333 + 2 - 36 = 0 \end{cases}$ ta nhận được

kết quả E = 0, j = 1: 3 do đó $x_j \neq 0$; giải phương trình thứ 1 ta được phương án tối ưu của bài toán P là $x_0^* = (\frac{11}{6}, -\frac{5}{3}, 3)$ và giá trị tối ưu là $Z_{P(X^*)} = (103,333)$

Bài 2: Giải bài toán QHTT sau

$\langle 1 \rangle f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow Min$

$\langle 2 \rangle \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$

$\langle 3 \rangle x_j \geq 0,\ j = 1:4$

Bước 1: Chuyển bài toán P về bài toán D

		x_1	x_2	x_3	x_4		
		$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$		
y_1	$\leq$	1	1	-1	0	$\leq$	15
y_2	$t.ý$	1	1	1	1	=	27
y_3	$\leq$	1	-1	-1	0	$\leq$	18
		$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\rightarrow$	min
		-2	1	0	1	$\downarrow$	max

→ Bài toán D

$\langle 1 \rangle f(x) = 15y_1 + 27y_2 + 18y_3 \rightarrow Max$

$\langle 2 \rangle \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq -2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \leq 0 \\ y_2 \leq 1 \end{cases}$

$\langle 3 \rangle y_1 \leq 0;\ y_2 tùy.ý;\ y_3 \leq 0$

Bước 2: Giải bài toán tối ưu D ta được phương án tối ưu như sau

$Y^0 = (-1; -1; 0)$ và giá trị tối ưu là $Z^0_D = -42$

Bước 3: Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D

- Thứ 1: Kết quả giải bài toán D cho thấy $(y_1, y_2) \neq 0$ nên ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \end{cases}$
- Thứ 2: Thay kết quả $Y^0 = (-1; -1; 0)$ vào biểu thức tính

$$\sum a_{ij} y_i^0 - c_j = \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - (-2) \\ y_1 + y_2 - y_3 - 1 \\ - y_1 + y_2 - y_3 - 0 \\ y_2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 - 1 + 0 - (-2) = 0 \\ -1 - 1 - 0 - 1 = -3 \\ -(-1) - 1 - 0 - 0 = 0 \\ -1 - 1 = -2 \end{cases}$$ ta nhận được kết quả

$E_1 = 0$; $E_3 = 0$, do đó $x_1, x_3 \neq 0$; và $E_1 = 0$; $E_3 = 0$, do đó $x_1, x_3 \neq 0$;

$E_2 \neq 0$; $E_4 \neq = 0$, do đó $x_2 = 0$, $x_4 = 0$;

Giải phương trình thứ 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 - x_3 = 15 \\ x_1 + 0 + x_3 + 0 = 27 \end{cases} = \begin{cases} x_1 - x_3 = 15 \\ x_1 + x_3 = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 21 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$ ta được phương án tối ưu của bài toán P là $x_0^* = (21, 0, 6, 0)$ và giá trị tối ưu là $Z_{P(X^*)} = -42$

IIX. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH NHIỀU MỤC TIÊU

1. Khái niệm

Trong thực tế ta đòi hỏi phải cân nhắc, so sánh nhiều mục tiêu khác nhau; Ví dụ như khi lập kế hoạch sản xuất ngoài mục tiêu thu lãi về lớn nhất, còn đòi hỏi ổn định lực lượng lao động, nâng cao đời sống, vốn đầu tư ... Những bài toán như vậy yêu cầu ta phải đạt nhiều mục tiêu khác nhau và gọi là bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu.

Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thường gắn với mô hình toán tương ứng như bài toán QHPT, bài toán QHTT nhiều mục tiêu...

Cách tiếp cận với bài toán nhiều mục tiêu là ta quy định mỗi mục tiêu một mức bằng số cụ thể, tiếp đến là xác định các hệ số phạt do vi phạm quy định và cuối cùng là tìm phương án đạt cực tiểu tổng độ lệch giữa các hệ số phạt đã xác đinh của các giá trị hàm mục tiêu so với mức quy định cho từng mục tiêu.

Phân loại mức mục tiêu:

- Mức một phía, cận dưới: quy định giới hạn dưới cho các giá trị mục tiêu cần đạt, nếu đạt cao hơn càng tốt.
- Mức một phía cận trên: quy định giới hạn trên cho các giá trị mục tiêu cần đạt, nếu đạt thấp hơn càng tốt.

- Mức hai phía: quy định giá trị mà mục tiêu phải đạt không hơn không kém.

2. Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu không có ưu tiên

Bài toán:

Một xí nghiệp dự kiến sản xuất ba sản phẩm mới A, B, C. Giám đốc quan tâm tới 3 mục tiêu chính là: lợi nhuận, lao động, vốn đầu tư. Cụ thể là:

1. Cần đạt được lợi nhuận tối thiểu là 125 triệu đồng từ các sản phẩm mới này
2. Duy trì đội ngũ lao động hiện có ở mức 4000 người
3. Mức đầu tư không được vượt quá 55 triệu đồng

Giám đốc này nhận thấy không có khả năng đạt đồng thời ba mục tiêu nêu ra, vì vậy ông quyết định các hệ số phạt như sau:

- Hệ số phạt 5 trên 1 triệu đồng lợi nhuận thấp hơn mức quy định
- Hệ số phạt 2 trên 100 lao động phải sử dụng thêm vượt quy định và hệ số phạt 4 trên 100 lao động không được sử dụng
- Hệ số phạt 3 trên 1 triệu đồng vốn đầu tư phải tăng thêm so với mức quy định.

Giả sử mức lợi nhuận, số lao động và vốn đầu tư tỷ lệ thuận với mức sản xuất sản phẩm.

Các số liệu, định mức và các hệ số phạt được cho trong bảng sau:

Mục tiêu	**Sản phẩm**			**Mức mục tiêu**	**Hệ số phạt**
	A	B	C		
Lợi nhuận	12	9	15	≥ 125	5
Lao động	5	3	4	= 40 (x100)	2(+); 4(-)
Vốn đầu tư	5	7	8	≤ 55	3

BÀI LÀM

- Đặt x_1, x_2, x_3, lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

  Lợi nhuận: $12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125$

  Lao động: $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$

  Vốn đầu tư: $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$

- Đặt Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu quy định. Với các hệ số phạt đã cho thì mục tiêu tổng thể là tìm x_1, x_2, x_3 sao cho Z min
- Để tiện cho nghiên cứu ta đưa biến phụ y_1, y_2, y_3 vào như sau :

  $y_1 = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125$

$y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40$

$y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – 55$

- Do y_i có thể dương có thể âm, nên ta đặt $y_1 = y_1^+ - y_1^-; y_2 = y_2^+ - y_2^-; y_3 = y_3^+ - y_3^-$ với $y_i^+, y_i^- \geq 0$; $i = 1 \div 3$
- Quan hệ trên cho thấy y_i^+ biểu thị phần dương của biến y_i dấu (+) và y_i^- biểu thị phần âm của biến y_i dấu (-)
- Với biến phụ này ta lập hàm mục tiêu như sau:

$$Z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ \to \min$$

- Để chuyển bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thành một mục tiêu, ta cần phải đưa biến phụ vào các ràng buộc như sau:

$y_1 = y_1^+ - y_1^- = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 – 125$ hay $12x_1 + 9x_2 + 15x_3 – (y_1^+ - y_1^-) = 125$

$y_2 = y_2^+ - y_2^- = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 – 40$ hay $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 – (y_2^+ - y_2^-) = 40$

$y_3 = y_3^+ - y_3^- = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – 55$ hay $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – (y_3^+ - y_3^-) = 55$

- Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán một mục tiêu như sau :

$$(1)\, Z = +5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ \to \min$$

$$(2)\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3)\, x_j \geq 0,\, y_i^+ \geq 0,\, y_i^- \geq 0;\, j = 1 \div 3; i = 1 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

$x_1 = 25/3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5/3$; $y_1^+ = 0$, $y_1^- = 0$, $y_2^+ = 25/3$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 0$

- Kết quả giải bài toán ta thấy:
  - $y_1^+ - y_1^- = 0$, tức là mục tiêu thứ nhất hoàn toàn thỏa mãn
  - $y_2^+ - y_2^- = 8.33$, mục tiêu thứ hai đã vượt mức quy định là 833 người so với mức quy định là 4000 người
  - $y_3^+ - y_3^- = 0$, tức là mục tiêu thứ ba hoàn toàn thỏa mãn

  Kế hoạch sản xuất là: 8 sản phẩm A, 2 sản phẩm C, không sản xuất sản phẩm B thu được lợi nhuận là 126 triệu, Lao động cần 4800, Vốn đầu tư cần 56 triệu và Tổng lượng vi phạm là 19

  Kế hoạch sản xuất là: 25/3 =8,33 sản phẩm A, 5/3 =1,66 sản phẩm C, không sản xuất sản phẩm B thu được lợi nhuận là 125 triệu, Lao động cần 4833.1/3, Vốn đầu tư cần 55 triệu và Tổng lượng vi phạm là 50/3= (16,66)

3. Bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên

Trong thực tế có nhiều trường hợp bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu khác nhau. Để tiện khảo sát, người yêu cầu phải đặt thứ tự mức ưu tiên. Với bài toán này ta tập trung vào mức mục tiêu ưu tiên 1 sau đó giải có lời giải đối với mức ưu tiên 1. Sau đó ta xét các mức ưu tiên kế tiếp.

Thực chất của phương pháp này là giải một dãy các bài toán QHTT theo các giai đoạn khác nhau:

*** Phương pháp thực hiện**

Giai đoạn 1: Chỉ đưa vào mô hình QHTT các mục tiêu có mức ưu tiên 1 và áp dụng phương pháp đơn hình để giải. Nếu lời giải là duy nhất thì dừng quá trình giải mà không cần xét các mục tiêu còn lại. Trường hợp có nhiều lời giải ứng với cùng giá trị tối ưu hàm mục tiêu thì chuyển sang giai đoạn 2 và đưa vào mô hình các mục tiêu ở mức ưu tiên 2.

Giai đoạn 2: trong trường hợp cần chuyển sang giai đoạn 2, ta phải căn cứ vào giá trị của hàm mục tiêu Z^* tính được ở giai đoạn 1 như sau:

- Nếu $Z^* = 0$ tức các biến phụ bằng không (mọi mục tiêu ở mức ưu tiên 1 đều đạt). Trong trường hợp này mọi biến phụ có thể loại ra khỏi mô hình ở giai đoạn 2
- Nếu $Z^* > 0$ thì ở giai đoạn 2 chỉ thêm vào mô hình đã thiết lập ở giai đoạn 1 các mục tiêu có mức ưu tiên 2, nhưng sau đó cần thêm vào ràng buộc phản ánh giá trị hàm mục tiêu của giai đoạn 1 bằng Z^*

Bài tập áp dụng

Sau khi giải bài toán trên. Giám đốc xí nghiệp không chấp nhận phương án tăng thêm lao động. Vì vậy ông đặt lại mục tiêu của bài toán là: Ưu tiên mức 1 là không tăng nhân lực, tránh đầu tư quá mức và ưu tiên mức 2 là giữ lại lợi nhuận tối thiểu 125 và tránh giảm lao động dưới mức 4000

Với quyết định hai mức ưu tiên như trên với các số liệu đã cho ta lập được bảng như sau :

Mức ưu tiên	**Mục tiêu**	**Sản phẩm**			**Mức mục tiêu**	**Hệ số phạt**
		A	**B**	**C**		
Mức ưu tiên 1	Lao động	5	3	4	≤40 (x100)	2
	Vốn đầu tư	5	7	8	≤ 55	3
Mức ưu tiên 2	Lợi nhuận	12	9	15	≥ 125	5
	Lao động	5	3	4	≥40 (x100)	4

Theo số liệu ở bảng cho thì ta chỉ có hai mục tiêu ở mức ưu tiên 1 được đưa vào bài toán QHTT.

GIAI ĐOẠN 1

- Đặt x_1, x_2, x_3, lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

  $5x_1+ 3x_2 + 4x_3 \leq 40$

  $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$

- Đặt Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu quy định. Với các hệ số phạt đã cho thì mục tiêu tổng thể là tìm x_1, x_2, x_3 sao cho Z min
- Để tiện cho nghiên cứu ta đưa biến phụ y_2, y_3 vào như sau :

  $y_2 = 5x_1+ 3x_2 + 4x_3 - 40$

  $y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – 55$

- Do y_i có thể dương có thể âm, nên ta đặt $y_2 = y_2^+ - y_2^-; y_3 = y_3^+ - y_3^-$ với y_i^+, $y_i^- \geq 0$; i =2 ÷ 3
- Với biến phụ này ta lập hàm mục tiêu như sau:

  $Z = 2y_2^+ + 3y_3^+ \rightarrow \min$

- Để chuyển bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thành một mục tiêu, ta cần phải đưa biến phụ vào các ràng buộc như sau:

  $y_2 = y_2^+ - y_2^- = 5x_1+ 3x_2 + 4x_3 – 40$ hay $5x_1+ 3x_2 + 4x_3 – (y_2^+ - y_2^-) = 40$

  $y_3 = y_3^+ - y_3^- = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – 55$ hay $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – (y_3^+ - y_3^-) = 55$

- Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán một mục tiêu như sau :

$$(1) Z = 2y_2^+ + 3y_3^+ \rightarrow \min$$

$$(2)\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 2 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

  $x_1= 5$, $x_2 =0$, $x_3 = 3.75$, $y_2^+ = 0$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 0$; $Z^* = 0$ tức là hai mục tiêu ưu tiên 1 đều đạt. Do vậy loại bỏ $y_2^+ = 0$, $y_3^+ = 0$ ra khỏi mô hình

GIAI ĐOẠN 2

Sau khi loại bỏ $y_2^+ = 0$, $y_3^+ = 0$ đồng thời thêm các mục tiêu ưu tiên 2 mô hình bài toán QHTT giai đoạn 2 là :

$$(1) Z = 5y_1^- + 4y_2^- \rightarrow \min$$

$$(2)\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (0 - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (0 - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 1 \div 3$$

- Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình ta được:

  x_1= 5, x_2 =0, x_3 = 3.75, y_1^+ = 0, y_1^- = 8.75, y_2^- = 0, y_3^- = 0 ; Z^* = 43.75; Do lời giải duy nhất nên quá trình giải kết thúc với x^* = (5, 0, 3.75) là phương án tối ưu của bài toán.

Kết luận: Như vậy với phương án tối ưu x^* = (5, 0, 3.75) thì mục tiêu về lao động và vốn đầu tư đều thỏa mãn còn lợi nhuận đạt 116.25 triệu (còn thiếu 8.75 triệu mới đạt)