C2: Tín hiệu ngẫu nhiên và Nhiễu

Lý thuyết thông tin

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

01/08/2011

Tín hiệu xác định

Tín hiệu xác định và đặc trưng phổ

Tín hiệu xác định:

- Mô tả bằng hàm xác định của các biến (thời gian, tọa độ,..).
  - Mô tả bằng biểu thức giải tích/đồ thị, ...

Nếu tín hiệu xác định thỏa mãn điều kiện hội tụ thì tồn tại cặp biến đổi Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} \quad \text{hoặc } X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega t} \quad \text{hoặc } x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- Đ/k: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$ hoặc $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ hoặc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ hoặc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$
- $X(e^{j\omega})$: Phổ tín hiệu, hàm liên tục theo ω
  - $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)} = \Re\{X(e^{j\omega})\} + j\Im\{X(e^{j\omega})\}$

Tín hiệu xác định

Một số đặc trưng vật lý quan trọng

- Thời hạn của tín hiệu:
  - Khoảng thời gian mà giá trị tín hiệu khác 0
- Bề rộng phổ tín hiệu:
  - Khoảng tần số mà phổ tín hiệu khác 0
- Năng lượng của tín hiệu:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(e^{j\omega})|^2 \omega$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \omega$$

  - $E = R_X(0)$
- Công suất của tín hiệu $P = \frac{E}{T}$ [W]

Tín hiệu xác định

Mật độ phổ công suất của hàm tuần hoàn

Với hàm $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T và có năng lượng hữu hạn trên mỗi chu kỳ (tức là $\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$), mật độ phổ công suất (PSD - Power Spectral Density) được xác định:

$$G_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \delta(f - nf_0) \quad \text{với } f_0 = \frac{1}{T}$$

- PSD cho biết sự phân bố công suất của tín hiệu theo tần số.
- PSD bao gồm chuỗi các xung tại các thành phần tần số của $x(t)$, độ lớn của mỗi xung tương ứng với công suất tại tần số đó.
- Công suất phổ của tín hiệu:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{f} G(\eta)d\eta$$

  - Phổ công suất của hàm tuần hoàn là một hàm bậc thang có các bước nhảy tại các tần số hài.

Tín hiệu xác định

Mật độ phổ công suất của hàm tuần hoàn (cont.)

- PSD không mang các thông tin về pha của tín hiệu $x(t)$ tại các tần số thành phần.
  - Nếu $x(t)$ và $x'(t)$ các hệ số trong biểu diễn chuỗi Fourier có cùng biên độ nhưng khác pha thì PSD như nhau
- PSD là một hàm không âm.
- PSD có mối quan hệ chặt chẽ với hàm tự tương quan:

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Bản chất của tín hiệu thông tin và nhiễu

Tín hiệu mang tin tức có bản chất ngẫu nhiên.

Nhiễu có bản chất ngẫu nhiên.

- Tín hiệu mang tin tức và nhiễu là các QTNN.
  - Giới hạn xem xét các quá trình WSS.
- Các đặc trưng thống kê (các đặc trưng thống kê của quá trình WSS)
  - ...
  - Khoảng tương quan: τ_K

Tín hiệu ngẫu nhiên

Quá trình ngẫu nhiên tuần hoàn

Một quá trình ngẫu nhiên WSS với các hàm thể hiện $x(t)$ được gọi là tuần hoàn với chu kỳ T nếu hàm tự tương quan $R_X(\tau)$ của nó là một hàm tuần hoàn với chu kỳ T.

- Nếu một QTNN WSS tuần hoàn với chu kỳ $T \Rightarrow$ các biến ngẫu nhiên X_t và $X_{t+\tau}$ bằng nhau với xác suất bằng 1.

Xét một thể hiện $x(t)$ của một QTNN WSS tuần hoàn với chu kỳ T. Giả sử $E[x(t)] = 0$. Nếu thể hiện $x(t)$ tuần hoàn và có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier thì:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{với } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên tuần hoàn

- Với mỗi thể hiện khác nhau thì x_n khác nhau
  - x_n là một RV.
- Một QTNN tuần hoàn thì đảm bảo rằng chuỗi biểu diễn Fourier là trực giao kép:
  - Hàm theo thời gian của các thành phần thứ n và m trực giao.
  - $E[x_n x*_m] = 0$
- $R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0\tau}\ \forall\tau \Leftarrow$ Do $R_X(\tau)$ tuần hoàn

PSD của một quá trình dừng tuần hoàn được định nghĩa là:

$$G_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\delta(f - nf_0) \quad \text{với } f_0 = \frac{1}{T}$$

$$\text{trong đó } b_n = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên tuần hoàn (cont.)

- $b_n = E[|x_n|^2]$: trung bình thống kê công suất tại thành phần tần số $f = n/T$
- $\Rightarrow G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
  - PSD và hàm tự tương quan của tín hiệu ngẫu nhiên tuần hoàn cũng là một cặp FT.

Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên

Trường hợp tổng quát:

- Tập các thể hiện $x(t)$ của QTNN là một tập vô hạn.
- Khoảng thời gian của thể hiện $x(t)$: $\infty < t < \infty$
- Thể hiện $x(t)$ có năng lượng hữu hạn trong một khoảng không đảm bảo nó có năng lượng hữu hạn trên $\infty < t < \infty$

Xây dựng hàm:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

- $\Rightarrow x_T(t)$ khả tích tuyệt đối $\Rightarrow X_T(e^{j\omega}) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-j\omega t}dt$
- $\Rightarrow E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} |X_T(e^{j\omega})|^2 d\omega$
- $\Rightarrow P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{|X_T(e^{j\omega})|^2}{T} d\omega$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên (cont.)

- $G_T(\omega) = \frac{|X_T(e^{j\omega})|^2}{T}$: PSD của thể hiện $x_T(t)$ trên $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
- $\Rightarrow G_{x(t)}(\omega) = \lim_{T\to\infty} G_T(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(e^{j\omega})|^2}{T}$: PSD của thể hiện $x(t)$
- $\Rightarrow G_X(\omega) = E[G_{x(t)}(\omega)] = E[\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(e^{j\omega})|^2}{T}]$: PSD của QTNN

Định lý (Cặp biến đổi Wiener-Khinchin)

Một QTNN WSS có cặp biến đổi Wiener-Khinchin:

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- Cặp biến đổi Wiener-Khinchin là cặp biến đổi Fourier mở rộng cho các tín hiệu ngẫu nhiên WSS.
- Đ/k $R_X(\tau)$ khả tích tuyệt đối: $\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)d\tau < \infty$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên - Tính chất

- $G_X(\omega) \geq 0$
- $G_X(-\omega) = G_X(\omega)$ với một quá trình thực (giá trị thực) $X(t)$.
- $G_X(\omega)$ là thực.

Sử dụng công thức Euler: $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$

$$G_X(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} R_X(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$
$$R_X(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} G_X(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

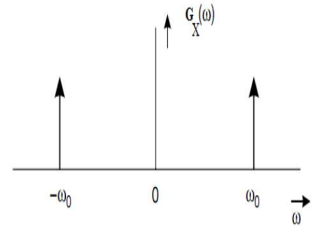
Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên - Ví dụ minh họa 1

Ví dụ

Một quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A\cos(\omega_0 t - \theta)$, với A và ω_0 là các hằng số, θ là một biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên khoảng $(0, 2\pi]$. Tìm mật độ phổ công suất của $X(t)$.

- $R_X(\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(\omega_0\tau)$
- $\Rightarrow G_X(\omega) = \frac{\pi}{2}A^2[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$



Hình: Mật độ phổ công suất của tín hiệu cos với pha ngẫu nhiên. © Etten

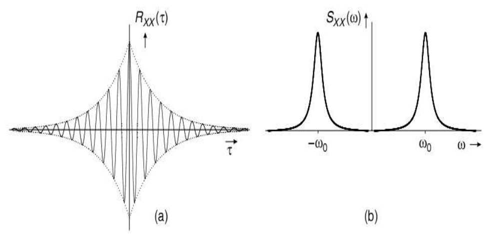
Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên - Ví dụ minh họa 2

Ví dụ (Mật độ phổ công suất của bộ dao động nội - OSC)

Một quá trình ngẫu nhiên $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \psi(t))$, với A và ω_0 là các hằng số, ψ là một biến dịch ngẫu nhiên (random walk process) được xác định bởi $\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} N(\tau)d\tau$ với $N(t)$ là một quá trình nhiễu trắng (mật độ phổ của $N(t)$ là hằng số với mọi tần số). Tìm mật độ phổ công suất của $X(t)$.

- $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$
- $\Rightarrow G_X(\omega) = \frac{\alpha A^2/2}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2} + \frac{\alpha A^2/2}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}$



Tín hiệu ngẫu nhiên

Phổ của tín hiệu ngẫu nhiên - Ví dụ minh họa 3

Ví dụ

Một quá trình ngẫu nhiên dừng, còn gọi là dãy xung điện báo có biên độ không đổi bằng đơn vị, và độ rộng xung ngẫu nhiên. Biết hàm tự tương quan $R_X(\tau) = e^{-2\alpha|\tau|}$ với α là tốc độ chuyển trạng thái của tín hiệu. Xác định mật độ phổ công suất?

- $\Rightarrow G_X(\omega) = \frac{1}{2\alpha - j\omega} + \frac{1}{2\alpha + j\omega} = \frac{4\alpha}{4\alpha^2+\omega^2}$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Băng tần của một quá trình ngẫu nhiên

Băng tần r.m.s. W_e của một quá trình ngẫu nhiên được định nghĩa là:

$$W_e^2 \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 G_X(\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}G_X(\omega)d\omega}$$

- W_e: Moment chuẩn hóa bậc 2 của phổ công suất
- Định nghĩa chỉ sử dụng cho quá trình băng thấp (lowpass process)

Quá trình thông thấp có $G_X(\omega)$ có giá trị lớn tại $\omega = 0$ và vùng tần thấp và giảm dần khi tần số tăng.

Ví dụ

Xác định băng tần r.m.s. của phổ thông thấp lý tưởng

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{với } |\omega| \leq B \\ 0 & \text{với } |\omega| > B \end{cases}$$

Tín hiệu ngẫu nhiên

Băng tần của một quá trình ngẫu nhiên (cont.)

Băng tần r.m.s. của một quá trình thông dải được xác định bởi:

$$W_e^2 \triangleq \frac{4\int_0^\infty (\omega - \bar{\omega}_0)^2 G_X(\omega)d\omega}{\int_0^\infty G_X(\omega)d\omega}$$

- $\bar{\omega}_0$: tần số trung bình
  - $$\bar{\omega}_0 \triangleq \frac{\int_0^\infty \omega G_X(\omega)d\omega}{\int_0^\infty G_X(\omega)d\omega}$$

Một quá trình thông dải (bandpass process) là một quá trình mà hàm PSD tập trung xung quanh một tần số $\bar{\omega}_0$ và có giá trị rất nhỏ (bằng 0 hoặc gần như bằng 0) tại $\omega = 0$

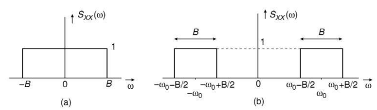
Tín hiệu ngẫu nhiên

Băng tần của một quá trình ngẫu nhiên (cont.)

Ví dụ

Tính băng tần r.m.s. của một quá trình thông dải lý tưởng với hàm mật độ phổ công suất:

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{với } |\omega - \omega_0| < \frac{B}{2} \text{ và } |\omega + \omega_0| < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{khoảng còn lại} \end{cases}$$



Hình: Phổ công suất quá trình thông thấp và thông dải lý tưởng © Etten

Tín hiệu ngẫu nhiên

Bề rộng phổ công suất

Bề rộng phổ của một quá trình ngẫu nhiên:

$$\Delta\omega \triangleq \frac{\int_0^\infty G_X(\omega)d\omega}{G_X(\omega_0)}$$

trong đó $G_X(\omega_0)$ là giá trị cực đại của $G_X(\omega)$

- Đặc trưng cho sự tập trung công suất của tín hiệu quanh tần số trung tâm
- Đặc trưng cho sự bằng phẳng của phân bố phổ xung quan tần số trung tâm.

Tín hiệu ngẫu nhiên

Mật độ phổ công suất chéo

Hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ là WSS đồng thời, mối quan hệ giữa hàm mật độ phổ công suất chéo và hàm tương quan chéo của chúng được cho bởi:

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- Không luôn có ý nghĩa vật lý trực tiếp
- Có vai trò quan trọng trong các phân tích hệ thống với các mối quan hệ của nhiều hơn một tín hiệu.

Tín hiệu ngẫu nhiên

Tương quan phổ

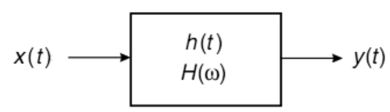
Với hai quá trình ngẫu nhiên WSS $X(t)$ và $Y(t)$, hàm tương quan phổ (coherence spectrum) được xác định theo công thức:

$$\rho_{XY}(\omega) \triangleq \frac{G_{XY}(\omega)}{\sqrt{G_X(\omega)G_Y(\omega)}}$$

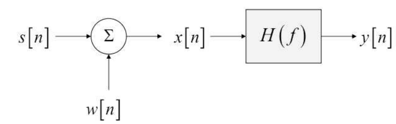
- Đại lượng đo lường mức độ quan hệ xấp xỉ giữa $X(t)$ và $Y(t)$ bởi một phép chuyển đổi tuyến tính bất biến.
- Có ý nghĩa tương tự với hệ số tương quan $\rho_{XY}(\tau)$

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Tổng quan



(a) Hệ thống tuyến tính



(b) Mạch lọc Wiener. © Greenberg

Hệ thống tuyến tính:

- LTI có đáp ứng xung xác định (biết trước) $h(t)$ $(H(\omega))$.
- Tín hiệu vào $x(t)$ là mẫu của một quá trình WSS.
- $\Rightarrow$ Tín hiệu ra được đánh giá thế nào?

Mạch lọc Wiener:

- LTI có đáp ứng xung xác định (biết trước) $(H(f))$
- $w(n)$ là một quá trình ngẫu nhiên.
- $s(n)$ là một tín hiệu xác định hoặc một quá trình ngẫu nhiên.
- $\Rightarrow$ Tín hiệu ra được đánh giá thế nào?

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian

Định nghĩa

Một hệ thống được gọi là tuyến tính bất biến theo thời gian (LTI) nếu: $x_n(t) \Rightarrow y_n(t)$ *thì* $x(t) = \sum_k a_k x_n(t-\tau_k) \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k y_n(t-\tau_k)$

Định lý

Nếu một hệ thống LTI với hàm đáp ứng xung $h(t)$ được kích thích bởi một tín hiệu $x(t)$, khi đó đầu ra của hệ thống được xác định:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Đặc tính thống kê của tín hiệu đầu ra

Một hệ thống LTI với đáp ứng xung $h(t)$, quá trình ngẫu nhiên tác động tại đầu vào $X(t)$, tương ứng đầu ra $Y(t)$.

- Mối quan hệ đầu vào và đầu ra qua hệ thống LTI:
  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$
- Nếu $X(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên WSS:
  - $\Rightarrow \overline{Y(t)} = E[Y(t)] = \overline{X(t)}H(0)$
  - $\Rightarrow R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$
    - $\Rightarrow$ Nếu $X(t)$ là một QTNN WSS thì $Y(t)$ cũng là một QTNN WSS
  - $\Rightarrow R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$
    - $\Rightarrow$ Nếu $X(t)$ là một QTNN WSS thì $X(t)$ và $Y(t)$ cũng là các QTNN WSS đồng thời
  - $\Rightarrow R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau)$

Đo lường đáp ứng xung của hệ thống - Nhận dạng hệ thống tuyến tính

Nếu quá trình vào là một quá trình nhiễu trắng (quá trình với giá trị PSD là hằng số trên toàn dải tần) có biên độ $N_0/2$. Đáp ứng xung của hệ thống $h(\tau) = 2R_{XY}(\tau)/N_0$.

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Phổ của tín hiệu đầu ra

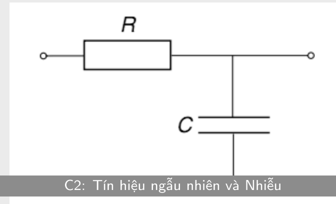
Nếu quá trình đầu vào của một hệ thống tuyến tính bất biến với hàm truyền đạt $H(\omega)$ là một quá trình WSS $X(t)$ có PSD $G_X(\omega)$ thì quá trình ra tương ứng $Y(t)$ cũng sẽ là một quá trình WSS và có PSD xác định bằng:

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega)H(\omega)H^*(\omega) = G_X(\omega)|H(\omega)|^2$$

- Công suất trung bình của quá trình ra:

  $P_Y = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$

Xét một khâu RC như hình vẽ. Giả sử mạch bị kích thích bởi một tín hiệu nhiễu trắng có PSD bằng $N_0/2$. Tính PSD của tín hiệu ra và công suất trung bình tín hiệu ra.



Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Việc tính toán công suất trung bình tín hiệu đầu ra

Tính toán công suất trung bình tín hiệu ra:

- Sử dụng công thức hàm tự tương quan với $\tau = 0$
- Sử dụng mật độ phổ công suất.

Để tính hàm tự tương quan của $Y(t)$

- Cần hàm mật độ phân bố của $X(t)$ để tính tích chập kép
- Hoặc cần hàm pdf của $Y(t)$
  - Việc đo lường hàm pdf khó khăn hơn rất nhiều việc đo lường PSD.
  - Và hàm pdf của $Y(t)$ nhìn chung không đơn giản tuân theo quy luật của $X(t)$ (ngoại trừ nếu $X(t)$ là quá trình chuẩn)

Việc tính toán giá trị trung bình và phương sai của quá trình đầu ra của hệ thống tuyến tính bất biến thông qua hàm PSD đơn giản hơn nhiều.

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm - Băng tần nhiễu: Định nghĩa một số quá trình

Một quá trình $X(t)$ được gọi là quá trình với băng thông hữu hạn (band-limited process) nếu $G_X(\omega) = 0$ ở ngoài một số khoảng tần số xác định nào đó trên trục tần số.

Một quá trình $X(t)$ được gọi là quá trình thông thấp (lowpass process) hoặc quá trình băng tần cơ sở (baseband process) nếu

$$G_X(\omega)\begin{cases} \neq 0 & \text{với } |\omega| < W \\ = 0 & \text{với } |\omega| > W \end{cases}$$

Một quá trình $X(t)$ được gọi là quá trình thông dải (bandpass process) nếu

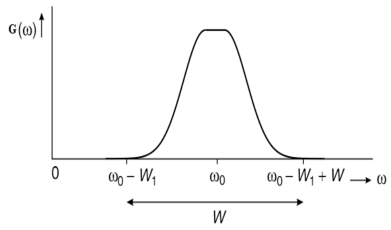
$$G_X(\omega)\begin{cases} \neq 0 & \text{với } \omega_0 - W_1 \leq |\omega| < \omega_0 - W_1 + W \\ = 0 & \text{với các khoảng còn lại} \end{cases}$$

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm - Băng tần nhiễu: Định nghĩa một số quá trình (cont.)

Một hệ thống được gọi là hệ thống băng hẹp (narrowband system) nếu băng thông của hệ thống rất nhỏ so với khoảng tần số trên đó phổ của tín hiệu vào tồn tại.

Một quá trình được gọi là quá trình băng hẹp (narrowband process) nếu băng tần nhỏ hơn rất nhiều so với khoảng tần số trung tâm: $W << \omega_0$.



Hình: © Etten

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm tương đương

Giá trị công suất trung bình quá trình đầu ra:

$P_Y = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$

- Công thức hữu dụng cho các ứng dụng thực tế.
- $\Rightarrow$ Cần một phương thức tính toán đơn giản.

Giải thông tạp âm tương đương của một hệ thống với hàm truyền đạt $H(\omega)$ được định nghĩa là:

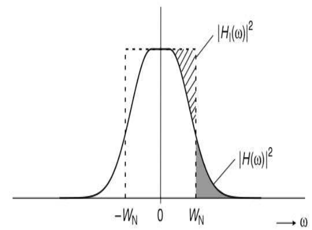
$$W_N = \frac{\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(0)|^2}$$

Công suất trung bình của quá trình đầu ra có thể ước lượng bằng:

$$P_Y = \frac{N_0}{2\pi}|H(0)|^2 W_N$$

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm tương đương (cont.)



Hình: © Etten

- Với trường hợp nhiễu vào là nhiễu trắng, công thức tích phân trong tính toán công suất trung bình đầu ra trở thành đơn giản là một tích.
  - Nếu chúng ta quan tâm đến hoạt động lọc nhiễu thì hệ thống có thể đặc tả bằng duy nhất W_N.

Tính toán dải thông tạp âm tương đương của khâu RC cho trong ví dụ tại trang 4

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm tương đương - Với quá trình băng hẹp

Công suất trung bình tín hiệu ra của một hệ thống băng hẹp với hàm truyền đạt $H(\omega)$ với tín hiệu vào bất kỳ có $G_X(\omega)$ được xác định:

$$P_Y \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$

và

$$P_Y \approx \frac{G_X(0)}{\pi}|H(\omega)|^2 W_N$$

Truyền tín hiệu ngẫu nhiên qua hệ thống tuyến tính

Giải thông tạp âm tương đương - Với quá trình thông dải

Dải thông tạp âm tương đương của một hệ thống thông dải được xác định:

$$W_N = \frac{\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega_0)|^2}$$

trong đó ω_0 được chọn thích hợp với tần số bất kỳ nằm trong dải tần của hệ thống.

- ω_0 có thể được chọn là tần số trung tâm hoặc tần số mà $|H(\omega)|$ đạt giá trị cực đại.

Công suất nhiễu trung bình tại đầu ra hệ thống thông dải $P_Y = \frac{N_0}{2\pi}|H(\omega_0)|^2 W_N$

Công suất ra trung bình của hệ thống thông dải với băng tần hẹp
$P_Y \approx \frac{G_X(\omega_0)}{\pi}|H(\omega_0)|^2 W_N$

Các quá trình thông dải

Tín hiệu thông dải xác định - Tổng quan

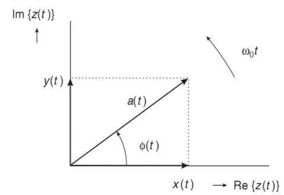
- Tín hiệu điều biên: $s(t) = A(1 + m(t))cos(\omega_0 t)$
  - A: độ lớn biên độ sóng mang khi chưa điều chế.
  - $m(t)$: thành phần tần thấp mang thông tin tín hiệu điều chế.
  - Nếu $1 + m(t)$ không bao giờ âm thì $s(t)$ giống như tín hiệu sóng hài có biên độ thay đổi theo tín hiệu điều chế.
- Tín hiệu điều tần: $s(t) = Acos\left[\omega_0 t + \int_0^t \psi(\tau)d\tau\right]$
  - $\psi(t)$: thành phần tần thấp mang thông tin điều chế.
  - Biên độ của tín hiệu điều tần là không đổi.
- $\Rightarrow$ biểu thức tổng quát của tín hiệu điều chế: $s(t) = a(t)cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$
  - $\Rightarrow s(t) = x(t)cos(\omega_0 t) - y(t)sin(\omega_0 t)$
    - ⋆ $x(t) \triangleq a(t)cos\varphi(t)$ và $y(t) \triangleq a(t)sin\varphi(t)$
    - ⋆ các thành phần cùng pha (in-phase) và vuông pha (quadrature-phase)

Các quá trình thông dải

Tín hiệu thông dải xác định - Các biểu diễn

Biểu diễn dạng biên phức (complex envelope):

- $z(t) \triangleq x(t) + jy(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$
  - $z(t)$ có thể coi như một véc-tơ pha trong mặt phẳng xy.
  - $z(t)$: không phải là tín hiệu vật lý, đơn thuần là định nghĩa toán học.
- $\Rightarrow s(t) = \Re\{z(t)e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2}[z(t)e^{j\omega_0 t} + z^*(t)e^{-j\omega_0 t}]$, trong đó ω_0 là tần số sóng mang
- $z(t)e^{j\omega_0 t}$: tín hiệu giải tích



Hình: © Etten

- $a(t) = |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$
- $\varphi(t) = arg[z(t)] = arctan\frac{y(t)}{x(t)}$
- $\Rightarrow$ Biên phức không những mang thông tin về biên mà còn mang cả thông tin về pha.

Các quá trình thông dải

Tín hiệu thông dải xác định - Phổ của tín hiệu

Nếu tín hiệu $s(t)$ là tín hiệu với năng lượng hữu hạn thì chúng ta có mối quan hệ phổ:

$$S(\omega) = \frac{1}{2}[Z(\omega - \omega_0) + Z^*(-\omega - \omega_0)]$$

Hàm truyền đạt của hệ thống (bộ lọc) thông dải:

- $H(\omega) = H_L(\omega - \omega_c) + H_L^*(-\omega - \omega_c)$
  - $H_L(\omega)$: hàm truyền đạt của bộ lọc thông thấp.
  - ω_c: tần số đặc trưng, có giá bất kỳ trong băng tần của $H(\omega)$
  - Tần số đặc trưng có mối quan hệ chặt chẽ với biên phức.
  - ω_c thường được chọn bằng tần số sóng mang ω_0

Các quá trình thông dải

Tín hiệu thông dải xác định - Phổ của tín hiệu (cont.)

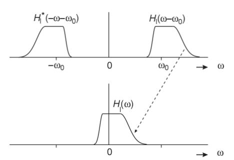
Mối quan hệ của biên phức được cho bởi công thức:

$$Z_o(\omega) = Z_i(\omega)H_L(\omega)$$

$$z_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_L(\tau)z_i(t - \tau)d\tau$$

trong đó $Z_i(\omega)$, $Z_o(\omega)$ và $z_i(t)$, $z_o(t)$ lần lượt là phổ và hàm biên phức vào, ra; $h_L(t)$ là IFT của $H_L(\omega)$.

- $h_L(t)$: đáp ứng xung phức của hệ thống băng tần cơ bản tương đương.
  - $h_L(t)$: không phải là hàm giá trị thực; không phải là đáp ứng xung của hệ thống thực mà là một hệ thống tương đương



- Mối quan hệ đầu vào và đầu ra của hệ thống thông dải khá đơn giản.
- Tín hiệu hoàn toàn xác định được bằng các biên phức và tần số đặc trưng ...

Các quá trình thông dải
Quá trình ngẫu nhiên thông dải - Biểu diễn

Quá trình ngẫu nhiên thông dải: $N(t) = A(t)cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$

- $A(t)$ và $\Phi(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên.
- $\Rightarrow N(t) = X(t)cos(\omega_0 t) - Y(t)sin(\omega_0 t)$
  - $X(t) = A(t)cos\Phi(t)$, $Y(t) = A(t)sin\Phi(t)$
  - Các quá trình biểu diễn biên độ và pha của $N(t)$ dễ dàng được khôi phục bởi:

$$A(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad \text{và} \quad \Phi(t) = arctan\frac{Y(t)}{X(t)}$$

- $X(t)$ và $Y(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên thông thấp.
- Giả sử $N(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên WSS với giá trị trung bình bằng 0

Các quá trình thông dải
Quá trình ngẫu nhiên thông dải - Các tính chất

$N(t)$ là quá trình ngẫu nhiên WSS với giá trị trung bình bằng 0 với các thành phần cùng pha và vuông pha $X(t)$ và $Y(t)$ có các tính chất:

- $X(t)$ và $Y(t)$ là các QTNN WSS đồng thời.
- $E[X(t)] = E[Y(t)] = 0$
- $E[X^2(t)] = E[Y^2(t)] = E[N^2(t)]$
- $R_X(\tau) = R_Y(\tau)$
- $R_{YX}(\tau) = -R_{XY}(\tau)$
- $R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = 0$
- $G_X(\omega) = G_Y(\omega)$
- $G_X(\omega) = \mathcal{LP}\{G_N(\omega - \omega_0) + G_N(\omega + \omega_0)\}$
- $G_{XY}(\omega) = j\mathcal{LP}\{G_N(\omega - \omega_0) - G_N(\omega + \omega_0)\}$
- $G_{YX}(\omega) = -G_{XY}(\omega)$

$\mathcal{LP}\{x\}$ là toán tử biểu diễn phần thông thấp của x

- Các quá trình thành phần $X(t)$ và $Y(t)$ là không xác định duy nhất
  - Được xác định bởi việc lựa chọn tần số đặc trưng ω_0

Các quá trình thông dải
Quá trình ngẫu nhiên thông dải - Mối quan hệ phổ biên phức

- $Z(t) \triangleq X(t) + jY(t)$
  - $\Rightarrow R_Z(\tau) = 2[R_X(\tau) + jR_{XY}(\tau)]$
  - $\Rightarrow G_Z(\omega) = 2[G_X(\omega) + jG_{XY}(\omega)]$
  - Nếu $G_N(\omega)$ đối xứng xung quanh ω_0
    - $\Rightarrow G_{XY}(\omega) = 0$
    - $\Rightarrow G_Z(\omega) = 2G_X(\omega)$
- Biên phức rất quan trọng trong việc thiết lập biên của tín hiệu thông dải hoặc nhiễu thông dải.
- Đặc biệt quan trọng trong việc phân tích và tách sóng biên của các tín hiệu điều chế (điều biên)

Các quá trình thông dải
Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải - Tổng quan

- Thực tế kỹ thuật nảy sinh nhiều tình huống có thể mô tả bởi nhiễu Gausse trắng được lọc thông qua bộ lọc thông dải.
  - Nhiễu Gausse trắng qua bộ lọc tuyến tính sẽ tạo ra nhiễu có phân bố Gausse tại đầu ra.
  - Các thành phần I,Q-phase $X(t)$ và $Y(t)$ của một tín hiệu nhiễu thông dải Gausse cũng sẽ có phân bố Gausse.
- Bài toán cần xác định các hàm mật độ phân bố của biên và pha của quá trình nhiễu Gausse trắng được lọc bởi bộ lọc thông dải:
  - Đánh giá chất lượng các hệ thống ASK, FSK,...

Xem xét các hàm mật độ phân bố xác suất của biên và pha của quá trình:

$$N(t) + Ccos(\omega_0 t)$$

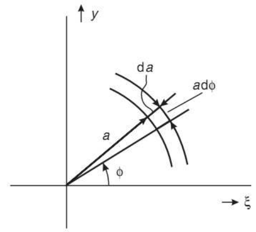
trong đó $Ccos(\omega_0 t)$ là tín hiệu mang tin.

Các quá trình thông dải

Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải

- Giả sử $N(t) = X(t)cos(\omega_0 t) - Y(t)sin(\omega_0 t)$
  - $N(t) + Ccos(\omega_0 t) = [X(t) + C]cos(\omega_0 t) - Y(t)sin(\omega_0 t)$
- Đặt $\Xi(t) \triangleq X(t) + C$
  - $N(t) + Ccos(\omega_0 t) = \Xi(t)cos(\omega_0 t) - Y(t)sin(\omega_0 t)$
- $\Rightarrow$ Các quá trình diễn tả biên độ $A(t)$ và pha $\Phi(t)$:
  - $A(t) = \sqrt{\Xi^2(t) + Y^2(t)}$ và $\Phi(t) = arctan\frac{Y(t)}{\Xi(t)}$

- Việc xem xét trong hệ tọa độ cực sẽ thuận lợi hơn.
- Xác suất mà kết quả của thể hiện (ξ, y) của cặp biến ngẫu nhiên (Ξ, Y) trong vùng $(a, a + da, \phi, \phi + d\phi)$:
  - $\xi = a \times cos(\phi)$, $y = a \times sin(\phi)$, $d\xi dy = adad\phi$



Hình: © Etten

Các quá trình thông dải

Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải (cont.)

- Hàm mật độ phân bố hợp của các thành phần I,Q-phase:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}exp\left[-\frac{(\xi - C)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right]$$

- $\Rightarrow$ Hàm mật độ phân bố hợp của biên và pha:

$$f_{A\Phi}(a, \phi) = \frac{a}{2\pi\sigma^2}exp\left[-\frac{(acos(\phi) - C)^2 + (asin(\phi))^2}{2\sigma^2}\right]$$

- $\Rightarrow$ Hàm mật bộ phân bố xác suất của biên A:

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma^2}exp\left[-\frac{a^2 + C^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{Ca}{\sigma^2}\right) \quad \text{với } a \geq 0$$

  - $I_0(x) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp(xcos\phi)d\phi$: Hàm Bessel loại một bậc 0 (modified Bessel function of the first kind and zero order)

Các quá trình thông dải

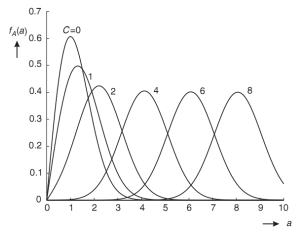
Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải - Phân bố biên

Hàm mật độ phân bố xác suất biên của trường hợp tổng quát nhiễu Gausse trắng thông qua bộ lọc thông dải tác động lên một tín hiệu điều hòa $Ccos(\omega_0 t)$:

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma^2}exp\left[-\frac{a^2 + C^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{Ca}{\sigma^2}\right) \quad \text{với } a \geq 0$$

- Đây là phân bố Rice (Rice distribution, Ricean distribution)

- Khi $C = 0$: tín hiệu chỉ bao gồm nhiễu thông dải.
  - $\Rightarrow f_A(a) = \frac{a}{\sigma^2}exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)$ với $a \geq 0$
  - Phân bố Rayleigh (Rayleigh-distribution)



Hình: Minh họa $f_A(a)$ với $\sigma^2 = 1$ © Etten

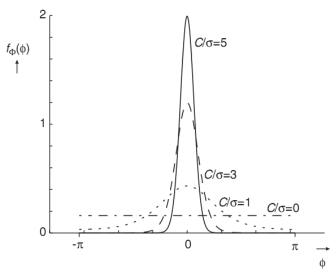
Các quá trình thông dải

Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải - Phân bố pha

- Một cách tương tự: $f_\Phi(\phi) = \int_0^\infty f_{A\Phi}(a, \phi)da \Rightarrow$
-

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}Ccos(\phi)exp\left(-\frac{C^2sin^2(\phi)}{2\sigma^2}\right)\left[1 - Q\left(\frac{Qcos(\phi)}{\sigma}\right)\right] \quad \text{với } |\phi| < \pi$$

  - $Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$



Hình: pdf pha của tín hiệu điều hòa có nhiễu © Etten

- Khi $C = 0$ ta có: $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ với $|\phi| < \pi$
  - Pha trong trường hợp biên phân bố Rayleigh phân có phân bố đều (uniform distribution)
  - Phân bố hợp của biên và pha độc lập với pha ϕ: $f_{A\Phi}(a, \phi) = f_A(a)f_\Phi(\phi)$
  - Biên và pha là độc lập nhau.

Các quá trình thông dải

Hàm pdf của biên và pha của nhiễu thông dải - Phân bố pha (cont.)

- **Chú ý**: Trong trường hợp tổng quát biên và pha không độc lập.
- Khi công suất tín hiệu rất lớn hơn so với công suất trung bình của nhiễu:
  - $\Rightarrow C >> \sigma$
  - $\Rightarrow$
$$f_{\Phi}(\phi) \approx \frac{Ccos(\phi)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{C^2 sin^2(\phi)}{2\sigma^2}\right) \quad \text{với } |\phi| < \frac{\pi}{2}$$
  - Khi đó, với các giá trị pha ϕ nhỏ, phân bố của pha có thể xấp xỉ phân bố Gausse, và $E[\Phi] \approx 0$, $E[\Phi^2] \approx \sigma^2$