BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP (A1)

Biên soạn: TS. VŨ GIA TÊ

Ths. ĐỖ PHI NGA

CHƯƠNG I: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1. SỐ THỰC.

1.1.1. Các tính chất cơ bản của tập số thực.

A. Sự cần thiết mở rộng tập số hữu tỉ Q.

Do nhu cầu đòi hỏi của cuộc sống,tập các số tự nhiên N={0,1,2,...}, cơ sở của phép đếm đã được mở rộng sang tập các số nguyên Z={0, $\pm$ 1, $\pm$ 2,...}. Sau đó, do trong Z không có các phần tử mà tích với 2 hoặc 3 bằng 1, nên người ta đã xây dựng tập các số hữu tỉ Q, đó là tập gồm các số được biểu diễn bởi tỉ số của hai số nguyên, tức là số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Nếu chỉ dừng lại trên tập Q thì trong toán học gặp phải nhiều điều hạn chế, đặc biệt là gặp khó khăn trong việc giải thích các hiện tượng của cuộc sống. Chẳng hạn việc tính đường chéo của hình vuông có kích thước đơn vị. Đường chéo đó là $\sqrt{2}$ không thể mô tả bởi số hữu tỉ. Thật vậy nếu $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \in$ Q trong đó ƯSCLN(m, n)=1 thì $m^2=2n^2 \Rightarrow m=2p$ và $4p^2=2n^2 \Rightarrow n=2q$. Điều này vô lí vì lúc này m, n có ước chung là 2. Chứng tỏ $\sqrt{2} \notin$ Q. Những số xuất hiện và được dùng thường xuyên trong giải tích như e, π cũng không phải là số hữu tỉ.

B. Số vô tỉ.

Một số biểu diễn dưới dạng thập phân vô hạn không tuần hoàn,hay không thể biểu diễn dưới dạng tỉ số của hai số nguyên được gọi là số vô tỉ.

C. Số thực.

Tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ tạo thành tập hợp số thực.

Kí hiệu tập số thực là R.

Vậy tập số vô tỉ là R\Q.

Người ta có thể xây dựng tập số thực R nhờ vào một hệ suy diễn hay nói cách khác nhờ vào một hệ tiên đề.Chúng ta không trình bày ở đây mà coi rằng tập hợp số thực R là quá quen thuộc và kiểm tra lại sự thoả mãn tiên đề đó. Chúng ta coi đó là các tính chất của tập hợp R.

Tính chất 1: Tập R là một trường giao hoán với hai phép cộng và nhân: (R, + , .).

1. $\forall a,b \in R, a+b \in R, a.b \in R$

2. $\forall a,b,c \in R, (a+b)+c = a+(b+c), (a.b)c = a(bc)$

3. $\forall a,b \in R, a+b = b+a, ab = ba$

4. R có phần tử trung hoà đối với phép cộng là 0 và đối với phép nhân là 1

$\forall a \in R, a+0 = 0+a = a$

$$a.1 \;= 1.a \;= a$$

5. Phân phối đối với phép cộng

$$\forall a,b,c \in R, a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca$$

6. Tồn tại phần tử đối của phép cộng

$$\forall a \in R, \exists(-a), a + (-a) = 0$$

Tồn tại phần tủ nghịch đảo của phép nhân

$$\forall a \in R^*, R^* = R \setminus \{0\}, \exists a^{-1}, a.a^{-1} = 1$$

Tính chất 2: Tập R được xếp thứ tự toàn phần và đóng kín đối với các số thực dương.

1. $\forall a,b \in R, a < b$ hoặc $a = b$ hoặc $a > b$

2.

$$\forall a,b,c \in R, a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$$
$$\forall a,b \in R, c \in R_+, a \le b \Rightarrow ac \le bc$$

3. $\forall a,b \in R_+, a + b \in R_+, ab \in R_+$

Tính chất 3: Tập R là đầy theo nghĩa sau đây:

Mọi tập con X không rỗng của R bị chặn trên trong R đều có một cận trên đúng thuộc R và mọi tập con không rỗng X của R bị chặn dưới trong R đều có một cận dưới đúng thuộc R.

Cho $X \subset R$ và $a \in R$

Gọi a là cận trên của X trong R nếu $x \le a, \forall x \in X$.

Gọi a là cận dưới của X trong R nếu $x \ge a, \forall x \in X$.

Gọi X bị chặn trên trong R(bị chặn dưới) khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một cận trên (cận dưới) của X trong R.

Gọi số nhỏ nhất trong các cận trên của X trong R là cận trên đúng của X trong R, kí hiệu số đó là M^* hay SupX (đọc là Suprémum của X).

Gọi số lớn nhất trong các cận dưới của X trong R là cận dưới đúng của X trong R, kí hiệu số đó là m^* hay InfX (đọc là Infimum của X).

Nếu $M^* \in X$ thì nói rằng M^* là phần tử lớn nhất của X, kí hiệu M^*=SupX=MaxX.

Nếu $m^* \in X$ thì nói rằng m^* là phần tử nhỏ nhất của X, kí hiệu m^*=InfX= MinX.

Gọi X là bị chặn trong R khi và chỉ khi X bị chặn trên và bị chặn dưới trong R.

Chú ý:

1. Tập R\Q không ổn định đối với phép cộng và phép nhân, chẳng hạn

$\pm\sqrt{2} \in R \setminus Q$ nhưng $\begin{matrix} \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \notin R \setminus Q \\ \sqrt{2}.\sqrt{2} \notin R \setminus Q \end{matrix}$

2. $\forall x \in R \setminus Q, \forall y \in Q, x + y \in R \setminus Q$

$$xy \in R \setminus Q$$

$$\frac{1}{x} \in R \setminus Q$$

Nếu M là cận trên của tập X thì SupX ≤ M và nếu m là cận dưới của tập X thì InfM ≥ m.

4. Nếu M^*=SupX thì $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in X \Rightarrow M^* - \varepsilon < \alpha$

Nếu m^*=InfX thì $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in X \Rightarrow m^* + \varepsilon > \alpha$

Ví dụ 1: Chứng minh $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \in R \setminus Q$

Giải: Giả sử q=$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in Q \Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (q - \sqrt{6})^2$ hay $q^2 + 1 = 2(q+1)\sqrt{6}$, dễ dàng chứng minh $\sqrt{6} \notin Q$ (tương tự như chứng minh $\sqrt{2} \notin Q$). Theo chú ý trên suy ra q+1=0 và q^2+1=0. Điều này là mâu thuẫn. Vậy q ∉ Q.

Ví dụ 2: Tìm các cận dưới đúng và cận trên đúng trong R nếu chúng tồn tại của tập

$$X = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}, n \in N^* \right\} = \left\{ u_n, n \in N^* \right\}$$

Giải:

$\forall p \in N^*$ có

$$u_{2p} = \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2p} \Rightarrow 0 < u_{2p} \le u_2 = \frac{3}{4}$$

$$u_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2p+1} \Rightarrow -\frac{1}{3} \le -\frac{1}{2p+1} \le u_{2p+1} \le \frac{1}{2^{2p+1}} \le \frac{1}{8}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}$$

suy ra $\forall n \in N^*$ có $-\frac{1}{2} = u_1 \le u_n \le u_2 = \frac{3}{4}$

InfX=minX=$-\frac{1}{2}$, SupX=maxX=$\frac{3}{4}$

Ví dụ 3: Cho A, B là hai tập không rỗng của R và bị chặn trên.

a. Chứng minh Sup ($A \cup B$)=Max(Sup(A), Sup(B)).

b. Gọi A+B=$\{x \in R, \exists (a,b) \in A \times B, x = a + b\}$, chứng minh

Sup(A+B) = Sup(A) + Sup(B)

Giải:

a. Kí hiệu $\alpha = SupA, \beta = SupB, \gamma = Max(\alpha, \beta)$. Vậy tập hợp các cận trên của $A \cup B$ chính là X=$\{x, x \geq \alpha$ và $x \geq \beta\}$ hay X=$\{x, x \geq \gamma\}$ Vậy $\gamma = Sup(A \cup B)$

b.

$$\begin{matrix} \forall a \in A, a \leq SupA \\ \forall b \in B, b \leq SupB \end{matrix} \Rightarrow \forall a + b \in A + B, a + b \leq SupA + SupB$$

$$\Rightarrow M^* = Sup(A + B)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{matrix} \exists a \in A, a > SupA - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \exists b \in B, b > SupB - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \exists a + b \in A + B, a + b > SupA + SupB - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists M^* = SupA + SupB = Sup(A + B)$$

1.1.2. Tập số thực mở rộng

Người ta thêm vào tập số thực R hai phần tử kí hiệu là $-\infty$ và $+\infty$. Tập số thực mở rộng kí hiệu là $\overline{R}$ và $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, các phép toán + và ., quan hệ thứ tự được định nghĩa như sau:

1. $\forall x \in R$ $\quad \begin{matrix} x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \end{matrix}$

2. $\begin{matrix} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$

3. $\forall x \in R_+^*, R_+^* = \{x \in R, x > 0\}$

$$\begin{matrix} x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \\ x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty \end{matrix}$$

$\forall x \in R_-^*, R_-^* = \{x \in R, x < 0\}$

$$\begin{matrix} x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \\ x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty \end{matrix}$$

4.

$$\begin{matrix} (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty \\ (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \end{matrix}$$

5. $\forall x \in R$

$$-\infty < x < +\infty$$
$$-\infty \le -\infty$$
$$+\infty \le +\infty$$

1.1.3. Các khoảng số thực

Cho $a,b \in R$ và $a \le b$. Trong R có chín loại khoảng sau đây:

$[a,b] = \{x \in R; a \le x \le b\}$ được gọi là đoạn hay khoảng đóng bị chặn

$[a,b) = \{x \in R; a \le x < b\}$
$(a,b] = \{x \in R; a < x \le b\}$ được gọi là khoảng nửa đóng hoặc nửa mở

$[a,+\infty) = \{x \in R; a \le x\}$
$(-\infty,a] = \{x \in R; x \le a\}$
$(a,b) = \{x \in R; a < x < b\}$ được gọi là các khoảng mở
$(a,+\infty) = \{x \in R; a < x\}$
$(-\infty,a) = \{x \in R; x < a\}$

Các số thực a,b gọi là các mút của khoảng.

1.1.4. Giá trị tuyệt đối của số thực

A. Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của số thực x, kí hiệu $|x|$ là một số thực không âm xác định như sau

$$|x| = \begin{cases} x & khi \quad x \ge 0 \\ -x & khi \quad x \le 0 \end{cases}$$

B. Tính chất

1. $\forall x \in R, \quad |x| = Max(x,-x)$

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.

$\forall x, y \in R, \quad |xy| = |x||y|$

$\forall n \in N^*, \quad \forall x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in R, \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$

$\forall x \in R, \left|x^n\right| = |x|^n$

4. $\forall x \in R^*, \quad \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

5.

$\forall x, y \in R, \quad |x+y| \le |x| + |y|$

$\forall n \in N^*, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in R, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

6.

$$\forall x, y \in R, \quad Max(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right)$$

$$Min(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right)$$

7. $\forall x, y \in R, \quad \big||x| - |y|\big| \le |x-y|$

1.1.5. Khoảng cách thông thường trong R

A. Định nghĩa: Khoảng cách trong R là ánh xạ

$$d : R \times R \to R$$

$$(x,y) \mapsto |x-y|$$

Đó là hình ảnh trực quan về khoảng cách giữa 2 điểm x và y trên đường thẳng trục số thực R.

B. Tính chất

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\forall x, y \in R, \quad d(x,y) = d(y,x)$

3. $\forall x, y, z \in R, \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

4. $\forall x, y, z \in R, |d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)$

1.2. SỐ PHỨC

Chúng ta đã biết rằng trong trường số thực R không thể phân tích thành thừa số tam thức bậc hai ax^2+bx+c khi $\Delta=b^2-4ac<0$.Tuy nhiên sẽ rất tiện lợi nếu có thể thừa số hoá tam thức này thành dạng $a(x-\alpha)(x-\beta)$ trong đó $\alpha,\beta\notin R$.Nhằm mục đích này thêm vào R một phần tử mới, kí hiệu là i (gọi là đơn vị ảo) kết hợp với các cặp số thực $(x,y)\in R^2$ để tạo ra các số phức.

1.2.1. Định nghĩa và các dạng số phức

A. Định nghĩa:

Cho $(x,y)\in R^2$, một số biểu diễn dưới dạng z=x+iy, trong đó $i^2=-1$ gọi là một số phức. Tập các số phức kí hiệu là C.

Gọi x là phần thực của z, kí hiệu Rez =x

y là phần ảo của z, kí hiệu là Imz =y

Gọi môđun của z,kí hiệu $|z|$ xác định bởi số thực không âm

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r\geq 0$$

Gọi Acgumen của z , kí hiệu Argz xác định bởi số thực

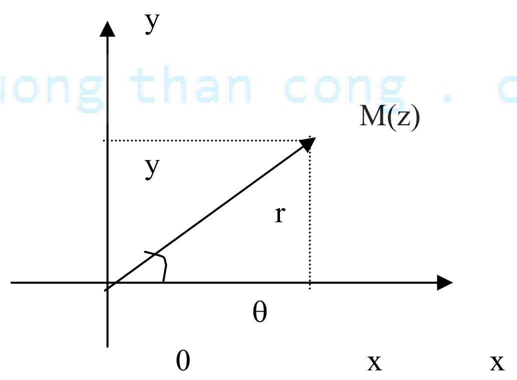
$$\text{Argz}=\theta\in R;\left\{\theta\in R;\cos\theta=\frac{x}{|z|}\ \text{và}\ \sin\theta=\frac{y}{|z|}\right\},\quad \text{với } z\neq 0$$

Như vậy Acgumen của z sai khác nhau $k2\pi, k\in Z$ và Arg0 không xác định.

Vậy số phức z có các dạng viết:

1. z =x+iy gọi là dạng chính tắc hay dạng đại số của số phức z .
2. z $=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

B. Biểu diễn hình học của các số phức



Xét mặt phẳng 0xy với hệ toạ độ trực chuẩn.

Ánh xạ $\varphi: \ C \to 0xy$ đặt mỗi số phức z=x+iy ứng với điểm M có toạ độ (x,y) trên mặt phẳng 0xy.Vậy φ là song ánh.Gọi mặt phẳng 0xy là mặt phẳng phức.

$\forall z \in C, \varphi(z)$ gọi là ảnh của z trên 0xy

$\forall M \in 0xy, \varphi^{-1}(M)$ gọi là toạ vị của M, đó là số phức $z \in C$. Ngoài ra $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là véctơ biểu diễn số phức z. Như vậy $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |z|$ và $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ =Argz

Trên mặt phẳng phức 0xy nhận thấy:

Trục 0x biểu diễn các số thực $z = x \in R$, trục này gọi là trục thực,còn trục 0y biểu diễn các số phức z = iy, y$\in R$ gọi là các số ảo thuần tuý,người ta gọi trục 0y là trục ảo.

1.2.2. Các phép toán trên tập C

A. Phép so sánh bằng nhau

$$\forall (x, y, x', y') \in R^4, \qquad x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

B. Phép lấy liên hợp

Cho $z = x + iy \in C$, liên hợp của z, kí hiệu $\bar{z}$ cho bởi $\bar{z} = x - iy$

C. Phép lấy số phức đối

Cho z=x+iy$\in$C, số phức đối của z, kí hiệu –z (đọc là trừ z) được xác định:

-z = -x-iy

D. Phép cộng

Cho z = x+iy, z’= x’+iy’,tổng của z và z’, kí hiệu z+z’ xác định như sau:

z+z’=(x+x’)+i(y+y’)

E. Phép nhân

Cho z=x+iy và z’=x’+iy’, tích của z và z’, kí hiệu z.z’ xác định như sau:

z.z’=(xx’-yy’) + i(xy’+x’y)

F. Phép trừ và phép chia

Là các phép tính ngược của phép cộng và phép nhân

$$z - z' = z + (-z')$$

$$\frac{z}{z'} = z'' \Leftrightarrow z = z'.z''$$

Từ các phép toán trên, nhận được các tính chất dưới đây:

1. $\forall z \in C, \overline{\overline{z}} = z.$

2. $\forall (z, z') \in C^2, \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

3. $\forall (z, z') \in C^2, \qquad \overline{z.z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$$\forall n \in N^*, \forall z_1, z_2, \ldots, z_n \in C, \qquad \overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i},$$

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$$

4. $\forall z \in C, \forall z' \in C^*, C^* = C \setminus \{0\}$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

5. $\forall z \in C, \qquad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

$$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in iR, iR = \{iy, y \in R\}$$

6. $\forall z \in C \qquad z.\overline{z} = |z|^2$

G. Phép luỹ thừa, công thức Moavrờ (Moivre)

Cho $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \forall k \in Z$

Gọi z^k là luỹ thừa bậc k của z. Bằng qui nạp, dễ chứng minh được

$$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \tag{1.1}$$

Gọi (1.1) là công thức Moivre.

H. Phép khai căn bậc n của $z \in C^*$.

Cho $n \in N^*, z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Gọi $\varsigma \in C^*$ là căn bậc n của z, kí hiệu $\sqrt[n]{z}$,xác định như sau: $\qquad \varsigma^n = z$

Nếu gọi $\rho = |\varsigma|$ và $\Phi = \text{Arg}\,\varsigma$ thì $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\Phi = \theta + 2k\pi \end{cases}$ hay là $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ và $\Phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ với $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Vậy số z có đúng n căn bậc n, đó là các số phức có dạng:

$$\varsigma = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{1.2}$$

Chú ý:

- Trong chương 4, sau khi đã có các khai triển của các hàm số sơ cấp, sẽ nhận được dạng luỹ thừa của số phức z:

$$z = re^{i\theta}$$

Khi đó công thức (1.1) sẽ là : $z^k = r^k e^{ik\theta}$, $\quad k \in Z$

(1.2) sẽ là : $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $\quad n \in N^*, k = 0,1,2,...,n-1$

- Căn bậc n của 1.

Vì z=1 có $|z|$=1=r, Argz=0.Vậy căn bậc n của 1 là n số phức dạng:

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

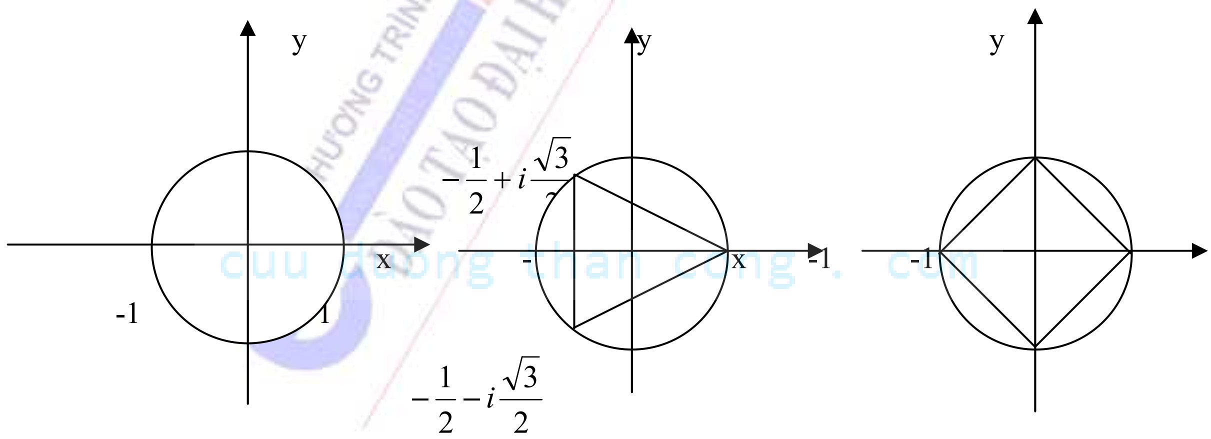
Vì $e^{\pm 2\pi i} = 1$ nên các số phức ω_k có những tính chất sau:

a. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$. .

b. $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}, \qquad \omega_k = \omega_1^k$.

c. $\forall n \in N \setminus \{0,1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = 0,$

d. Các số phức ω_k biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn lượng giác và một trong các đỉnh là điểm có toạ vị bằng 1. Đa giác này nhận 0x làm trục đối xứng, chẳng hạn với n=2, n=3, n=4, biểu diễn hình học các số ω_k cho trên hình 1.2



n=2 n=3 n=4

h.1.2.

Ví dụ 1: Hãy tìm tất cả các ánh xạ $f: \quad C \to C$ sao cho:

$$\forall z \in C, f(z) + zf(-z) = 1 + z$$

Giải:

Nếu tồn tại f thì f(-z) – zf(z)=1-z đúng

suy ra $(1+z^2)f(z) = 1 + z^2$

chứng tỏ f(z)=1 nếu $z \neq \pm i$.

Đặt $f(i) = \alpha + i\beta \in C, \alpha, \beta \in R$ thì $f(-i) = 1 - i + i\alpha - \beta$

Kiểm tra

$$f: C \to C$$
$$z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{khi } z \neq \pm i \\ \alpha & \text{khi } z = i \\ 1 - \beta + i(\alpha - 1) & \text{khi } z = -i \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in R$$

Sẽ thấy thoả mãn điều kiện đặt ra.

Ví dụ 2. Tính a. $(1-i)(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)$

b. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

c. $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

Giải:

a. Đặt $z = z_1 z_2 z_3$ trong đó $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$

Ta đi tìm môđun và acgumen của các số phức này

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \ \theta_1 = \arg z_1 \text{ trong đó } \begin{cases} tg\theta_1 = -1 \\ \cos\theta_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Tương tự nhận được $r_2 = 2, \theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}, r_3 = 2, \theta_3 = \dfrac{\pi}{6}$

Vậy $z = 4\sqrt{2}.e^{-i.\frac{5\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{5\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{12})\right]$

b. Đặt $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ trong đó $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 1 + i$

$$r_1 = |z_1| = 2, \theta_1 = Argz_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{2}, \theta_2 = Argz_2 = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

c. Đặt $\xi_k = \sqrt[4]{z}, k = 0,1,2,3$

Trong đó $z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = |z| = 2 \\ \varphi = Argz = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Vậy $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$$\xi_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(\sqrt{3} + i)$$

$$\xi_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(-1 + i\sqrt{3})$$

$$\xi_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt[4]{\frac{1}{8}}(\sqrt{3} + i)$$

$$\xi_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}(1 - i\sqrt{3})$$

Ví dụ 3. Tìm môđun và acgumen của số phức $z = \dfrac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{200}}$

Giải: Đặt $z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} + i$

Từ đó có: $z = z_1^{100}.z_2^{-200}$. Ta có môđun và acgumen của các số phức trên là:

$$|z_1| = \sqrt{2}, \theta_1 = Argz_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = 2, \theta_2 = Argz_2 = \frac{\pi}{6}$$

Vậy $|z_1^{100}| = 2^{50}, Argz_1^{100} = -25\pi = -\pi, [2\pi]$

$$|z_2^{-200}| = 2^{-200}, Argz_2^{-200} = -\frac{200\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi, [2\pi]$$

Cuối cùng $|z| = 2^{50}.2^{-200} = 2^{-150}$

$$Arg|z| = -\frac{\pi}{3}$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $\forall z \in C$ thì $\left[\begin{array}{l} |1+z| \geq \frac{1}{2} \\ |1+z^2| \geq 1 \end{array}\right.$

Giải:

Giả sử $\exists z = x + iy \in C$ sao cho $\begin{cases} |1+z| < \frac{1}{2} \\ |1+z^2| < 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 2(x^2-y^2) < 0 \\ x^2+y^2+2x+\frac{3}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < y^2 \\ x^2+y^2+2x+\frac{3}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+\frac{3}{4} < 0$$

$$\Delta'_x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Chứng tỏ mâu thuẫn.

Ví dụ 5: Cho a,b,c$\in C$ và $|a| = |b| = |c| = 1,\quad a \neq c, b \neq c$

Chứng minh

$$\text{Arg}\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{2}Arg\frac{b}{a} \qquad [\pi]$$

Giải:

Hãy xét số phức dưới đây, để ý đến $\frac{1}{a} = \bar{a},\quad \frac{1}{b} = \bar{b},\quad \frac{1}{c} = \bar{c}$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{b-c}{a-c}.\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b}{a} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow Arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \frac{a}{b} = k\pi = 0 \qquad [\pi]$$

$$\Rightarrow 2Arg\frac{c-b}{c-a} + Arg\frac{a}{b} = 0$$

$$\Rightarrow Arg\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{2}Arg\frac{b}{a} \qquad [\pi]$$

Ví dụ 6: Cho $a \in R$ hãy tính căn bậc 4 trong tập C của số phức:

$$z = 8a^2 - \left(1 + a^2\right)^2 + 4a(1 + a^2)i$$

Giải:

Nhận xét $\qquad z = \left[2a + (1 - a^2)i\right]^2$

Vậy $\qquad \sqrt{z} = \pm\left[2a + (1 - a^2)i\right]$

Tiếp tục nhận xét thấy:

$$2a + (1 - a^2)i = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1 + a) + (1 - a)i\right]\right\}^2$$

$$-2a - (1 - a^2)i = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1 - a) - (1 + a)i\right]\right\}^2$$

Suy ra các giá trị của $\sqrt[4]{z}$ sẽ là:

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(1 + a) + (1 - a)i\}, \qquad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(1 - a) - (1 + a)i\}$$

Ví dụ 7: Giải phương trình với ẩn số $z \in C$:

$$z^4 = z + \bar{z}$$

Giải:

Nhận xét z_1=0 là nghiệm

Xét z≠0,đặt $z = \varsigma e^{i\theta}, \varsigma \in R_+^*, \theta \in R$

$$z^4 = z + \bar{z} \Leftrightarrow \varsigma^3(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varsigma^3\cos 4\theta = 2\cos\theta \\ \sin 4\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\theta = 0 \quad [2\pi] \\ \cos\theta > 0 \\ \varsigma^3 = 2\cos\theta \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4\theta = \pi \quad [2\pi] \\ \cos\theta < 0 \\ \varsigma^3 = -2\cos\theta \end{cases}$$

Lấy $\theta = 0 \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{3}}$

Lấy $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{6}}$

Lấy $\theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \varsigma = 2^{\frac{1}{6}}$

Vậy các nghiệm $z \neq 0$ là:

$$z_2 = 2^{\frac{1}{3}}$$
$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1+i)$$
$$z_4 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1-i)$$

1.2.3*. Áp dụng số phức vào lượng giác

A. Khai triển $\cos n\theta, \sin n\theta, tgn\theta$

Cho $\theta \in R, n \in N^*$. Áp dụng công thức Moivre và công thức nhị thức Newton

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\theta . i^k \sin^k\theta$$

Tách phần thực và phần ảo, nhận được

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots +$$
$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \cdots$$

Sau khi thay $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ vào các công thức trên sẽ có:

1. $\cos n\theta$ biểu diễn dưới dạng một đa thức của $\cos\theta$, gọi đó là công thức Chebyshev loại 1.

2. $\sin n\theta$ bằng tích của $\sin\theta$ với một đa thức của $\cos\theta$, gọi là đa thức Chebyshev loại 2.

3. $tgn\theta = \dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \dfrac{\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}}{\frac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}} = \dfrac{C_n^1 tg\theta - C_n^3 tg^3\theta + \cdots}{1 - C_n^2 tg^2\theta + C_n^4 tg^4\theta - \cdots}$

B. Tuyến tính hoá $\cos^p\theta, \sin^p\theta, \cos^p\theta.\sin^q\theta$

Cho $\theta \in R, p \in N^*, \omega = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\theta = \omega + \overline{\omega} = \omega + \dfrac{1}{\omega} \\ 2i\sin\theta = \omega - \overline{\omega} = \omega - \dfrac{1}{\omega} \end{cases}$

Vậy $2^p\cos^p\theta=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^p$ và $(2i)^p\sin^p\theta=\left(\omega-\dfrac{1}{\omega}\right)^p$

Sử dụng công thức nhị thức Newton và xét các trường hợp sau đây:

a. Trường hợp $p=2m, m\in N^*$

1.

$$2^{2m}\cos^{2m}\theta=\left(\omega^{2m}+\frac{1}{\omega^{2m}}\right)+C_{2m}^1\left(\omega^{2m-2}+\frac{1}{\omega^{2m-2}}\right)+\cdots+C_{2m}^m$$
$$=2\cos 2m\theta+2C_{2m}^1\cos 2(m-1)\theta+\cdots+2C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta+C_{2m}^m$$
$$\cos^{2m}\theta=2^{-(2m-1)}\left(\frac{1}{2}C_{2m}^m+\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\cos 2(m-k)\theta\right)$$

2.

$$2^{2m}(-1)^m\sin^{2m}\theta=\left(\omega^{2m}+\frac{1}{\omega^{2m}}\right)-C_{2m}^1\left(\omega^{2m-2}+\frac{1}{\omega^{2m-2}}\right)+\cdots+(-1)^mC_{2m}^m$$
$$=2\cos 2m\theta-2C_{2m}^1\cos 2(m-1)\theta+\cdots+(-1)^mC_{2m}^m$$
$$\sin^{2m}\theta=2^{-(2m-1)}(-1)^m\left(\frac{(-1)^m}{2}C_{2m}^m+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{2m}^k\cos 2(m-k)\theta\right)$$

b. Trường hợp $p=2m+1, m\in N$

1.

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\theta=\left(\omega^{2m+1}+\frac{1}{\omega^{2m+1}}\right)+C_{2m+1}^1\left(\left(\omega^{2m-1}+\frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)\right)+\cdots+C_{2m+1}^m\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$$
$$=2\cos(2m+1)\theta+2C_{2m+1}^1\cos(2m-1)\theta+\cdots+2C_{2m+1}^m\cos\theta$$
$$\cos^{2m+1}\theta=2^{-2m}\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^k\cos(2m+1-2k)\theta$$

2.

$$2^{2m+1}i(-1)^m\sin^{2m+1}\theta=\left(\omega^{2m+1}+\frac{1}{\omega^{2m+1}}\right)-C_{2m+1}^1\left(\omega^{2m+-}-\frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)+\cdots$$
$$=2i\sin(2m+1)\theta-2i.C_{2m+1}^1\sin(2m-1)\theta+\cdots+2i(-1)^mC_{2m+1}^m\sin\theta$$
$$\sin^{2m+1}\theta=2^{-2m}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_{2m+1}^k\sin(2m+1-2k)\theta$$

Để tuyến tính hoá $\cos^p\theta.\sin^q\theta$ trước hết tuyến tính hoá từng thừa số $\cos^p\theta,\sin^q\theta$, sau đó thực hiện phép nhân rồi cùng tuyến tính hoá các số hạng thu được.

Ví dụ 7: Cho $(n,a,b)\in N\times R\times R$, tính các tổng:

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb),\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$$

Giải:

Xét $C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ib}\right)^k$ Nếu $b \in 2\pi Z$

$$C_n = (n+1)\cos a, \qquad S_n = (n+1)\sin a$$

Nếu $b \notin 2\pi Z$

$$C_n + iS_n = e^{ia}\frac{\left(e^{ib}\right)^{n+1}-1}{e^{ib}-1} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)b}{2}}2i\sin\frac{n+1}{2}b}{e^{i\frac{b}{2}}2i\sin\frac{b}{2}} = e^{i.\left(a+\frac{nb}{2}\right)}.\frac{\sin\frac{n+1}{2}.b}{\sin\frac{b}{2}}$$

$$C_n = \cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}, \qquad S_n = \sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}$$

Ví dụ 8: Chứng minh $\forall n \in N^*$, $\sum_{k=1}^{n}|\sin k| \ge \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$

Giải:

Vì $\sin 0 = 0$ và $|\sin k| \le 1$ nên

$$\sum_{k=1}^{n}|\sin k| = \sum_{k=0}^{n}|\sin k| \ge \sum_{k=0}^{n}\sin^2 k = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}(1-\cos 2k)$$

$$= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n}\cos 2k = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sin(n+1)}{\sin 1}.\cos n$$

Vì $\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin 1}.\cos n\right| \le \frac{1}{\sin 1}$

nên $\sum_{k=1}^{n}|\sin k| \ge \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$

1.3. DÃY SỐ THỰC

Sau khi xem xét dãy số thực,chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng cho dãy số phức vì rằng một dãy số phức tương đương với một cặp dãy số thực.

1.3.1. Các khái niệm cơ bản của dãy số thực

A. Định nghĩa

Một dãy số thực là một ánh xạ từ N vào R, kí hiệu:

$$u : N \to R$$

hay đơn giản nhất,kí hiệu (u_n)

Với $n = n_0 \in N$ xác định, u_{n_0} gọi là số phần tử thứ n_0 của dãy, u_n thường là một biểu thức phụ thuộc vào n gọi là phần tử tổng quát của dãy, chẳng hạn cho các dãy sau đây: (1), $\left((-1)^{n+1}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

B. Sự hôi tụ, sự phân kì của dãy số

1. Dãy (u_n) hội tụ về $a \in R$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, rõ ràng $(u_n\text{-}a)$ hội tụ về 0.

2. Dãy (u_n) hội tụ nếu có số $a \in R$ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

3. Dãy (u_n) phân kì nếu nó không hội tụ, nghĩa là:

$$\forall a \in R, \exists \varepsilon > 0, \forall n \in N, \exists n_0 \in N, n_0 > n, |u_n - a| \geq \varepsilon$$

4. Dãy (u_n) nhận $+\infty$ làm giới hạn nếu

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > A$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, đôi khi nói rằng (u_n) tiến tới $+\infty$

5. Dãy (u_n) nhận $-\infty$ làm giới hạn nếu

$$\forall B < 0 \quad \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n < B.$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Dãy có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng gọi là phân kỳ.

C. Dãy số bị chặn

1. Nói rằng (u_n) bị chặn trên bởi số $A \in R$ nếu $\forall n \in N, u_n \leq A$.

2. Nói rằng (u_n) bị chặn dưới bởi số $B \in R$ nếu $\forall n \in N, u_n \geq B$.

3. Nói rằng (u_n) là dãy bị chặn nếu tồn tại $M \in R_+$ sao cho $\forall n \in N, |u_n| \leq M$.

1.3.2. Tính chất của dãy hội tụ

A. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí: Dãy (u_n) hội tụ về a thì a là duy nhất

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} = a_1, \lim\limits_{n\to\infty} = a_2, a_1 \neq a_2$

Đặt $\varepsilon = \frac{1}{3}|a_1 - a_2|$

$$\exists n_1, n_2 \in N, \quad \forall n > n_1 \Rightarrow |u_n - a_1| < \varepsilon$$
$$\forall n > n_2 \Rightarrow |u_n - a_2| < \varepsilon$$

Gọi $n_0 = Max(n_1, n_2), \forall n > n_0$ sẽ có:

$|a_1 - a_2| \le |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a_1 - a_2|$ mâu thuẫn.

B. Tính bị chặn

1. Dãy (u_n) hội tụ thì bị chặn trong R.
2. Dãy (u_n) tiến đến $+\infty$ thì bị chặn dưới.
3. Dãy (u_n) tiến đến $-\infty$ thì bị chặn trên.

Chứng minh:

1. Giả sử $\lim_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < 1$

$$\Rightarrow |u_n| \le |u_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Đặt $M = Max\{|u_0|, ..., |u_{n_0}|, 1 + |a|\} \Rightarrow \forall n \in N, |u_n| \le M$.

2. Giả sử $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty, \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > 1$

Đặt m = $Min\{u_0, ..., u_{n_0}, 1\} \Rightarrow u_n \ge m$

3. Quy về 2. bằng cách xét $(-u_n)$.

Chú ý:

1. Tồn tại các dãy số bị chặn nhưng không hội tụ, chẳng hạn

$$(u_n) = ((-1)^{n+1}).$$

2. Mọi dãy không bị chặn sẽ phân kỳ.

3. Một dãy tiến tới $+\infty$ thì không bị chặn trên, điều ngược lại không đúng, chẳng hạn: $(u_n) = ((-1)^n n)$.

C. Tính chất đại số của dãy hội tụ

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

4. $\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda a$.

5. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, ($v_n$) bị chặn $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = 0$.

6. $\lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = ab$.

7. $\lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} v_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

Chứng minh:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

mà $\big||u_n| - |a|\big| \le |u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|u_n| = |a|$.

2. Vì ta có $\big||u_n| - 0\big| = |u_n| = |u_n - 0|$.

3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1, n_2 : \quad \forall n > n_1 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\forall n > n_2 \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Đặt $n_0 = Max(n_1, n_2), \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n + v_n - (a+b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|\lambda|}$

$$\Rightarrow |\lambda u_n - \lambda a| = |\lambda||u_n - a| \le \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\varepsilon < \varepsilon$$

5. $\exists M \in R_+$ sao cho $\forall n \in N, |v_n| \le M$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{1+M}$

$\Rightarrow |u_n v_n| = |u_n|.|v_n| < \frac{\varepsilon M}{1+M} < \varepsilon$

6. Gọi $\alpha_n = u_n - a$. Vậy (α_n) hội tụ về 0

Ta có $u_n v_n = (a + \alpha_n) v_n = a v_n + \alpha_n v_n$

mà $\lim_{n\to\infty} a v_n = ab$ vì (v_n) bị chặn nên $\lim_{n\to\infty} \alpha_n v_n = 0$.

7. Trước hết ta sẽ chỉ ra $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n}=\frac{1}{b}$

Vì $\lim_{n\to\infty}|v_n|=|b|\neq 0$ nên $\exists n_1\in N,\forall n>n_1\Rightarrow \big||v_n|-|b|\big|<\frac{|b|}{2}\Rightarrow |v_n|>\frac{|b|}{2}$

Ta có $0\le\left|\frac{1}{v_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|v_n-b|}{|v_n|.|b|}\le\frac{2}{b^2}|v_n-b|$

suy ra $\forall\varepsilon>0\quad \exists n_2\in N,\forall n>n_2\Rightarrow |v_n-b|<\frac{|b|^2}{2}\varepsilon$

Lấy $n_0=\mathrm{Max}(n_1,n_2),\forall n>n_0\Rightarrow\left|\frac{1}{v_n}-\frac{1}{b}\right|<\varepsilon$

Ta thấy $\frac{u_n}{v_n}=u_n\frac{1}{v_n}$,theo 6. ta nhận được $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$.

D. Tính chất về thứ tự và nguyên lý kẹp

1. Giả sử $\lim_{n\to\infty}u_n=l\in(a,b)$ .Khi đó $\exists n_0,\forall n>n_0\Rightarrow a<u_n<b$
2. Giả sử $\lim_{n\to\infty}u_n=l$ và $\exists\, n_0,\forall n>n_0$ có $a\le u_n\le b$ khi đó $a\le l\le b$
3. Giả sử 3 dãy (u_n), (v_n), (w_n) thoả mãn:

   $\exists n_0,\forall n>n_0\Rightarrow u_n\le v_n\le w_n$ và $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}w_n=a$

   Khi đó $\lim_{n\to\infty}v_n=a$
4. Giả sử $\forall n>n_0$ mà $u_n\le v_n$ và $\lim_{n\to\infty}u_n=+\infty$ .Khi đó $\lim_{n\to\infty}v_n=+\infty$

Chứng minh:

1.

$\exists n_1,\forall n>n_1\Rightarrow |u_n-l|<l-a\Rightarrow a<u_n$

$\exists n_2,\forall n>n_2\Rightarrow |u_n-l|<b-l\Rightarrow u_n<b$

Lấy $n_0=\mathrm{Max}(n_1,n_2)\Rightarrow\forall n>n_0$ có $a<u_n<b$

2. Lập luận phản chứng và theo 1.
3. $\forall\varepsilon>0,\exists n_1,n_2\in N$

$\forall n>n_1\Rightarrow |u_n-a|<\varepsilon$

$\forall n>n_2\Rightarrow |w_n-a|<\varepsilon$

Lấy n_3=Max(n_0,n_1,n_2), $\forall n > n_3$ sẽ có:

$$-\varepsilon < u_n - a \le v_n - a \le w_n - a < \varepsilon$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

4. Lấy $A \in R_+^*, \exists n_1, \forall n > n_1 \Rightarrow u_n > A$

Gọi n_2=Max(n_0,n_1), $\forall n > n_2 \Rightarrow v_n > A$

Chứng tỏ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Chú ý:

1. Để chứng minh dãy (u_n) hội tụ về a, thông thường chỉ ra dãy (ε_n) hội tụ về 0 và thoả mãn $|u_n - a| \le \varepsilon_n$

2. Bằng cách chuyển qua phần tử đối, nhận được kết quả sau đây:

Nếu $\exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n \ge v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$

Ví dụ 1: Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

Giải:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ hay } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Vậy chọn $n_0 = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ Kí kiệu E(x) là phần nguyên của x.

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$, $\quad n \in N^*$

Giải:

$$\forall n \in N^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} = v_n$$

$$u_n \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} = w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

Ví dụ 3: Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & khi\,|a| < 1 \\ 1 & khi\, a = 1 \\ +\infty & khi\, a > 1 \end{cases}$

Giải:

Xét $a > 1, \exists h \in R_+^*$ để a =1+h

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i h^i \geq 1 + nh$$

$$\lim_{n\to\infty}(nh) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+nh) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$$

Xét $|a| < 1, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Với a=0 rõ ràng $a^n = 0, \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$

Xét a=1 $\Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 1$

Ví dụ 4: Tìm $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad a \in R_+^*$

Giải:

Xét a=1 rõ ràng $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Xét a>1, áp dụng công thức nhị thức Newton

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left\{1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right\}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad a \geq \sum_{k=0}^{1} C_n^k \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^k = 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in N^* \text{ thì } 0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} = \varepsilon_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Xét $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

mà $\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{-1}$ nên $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Kết luận $\forall a \in R^*, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ví dụ 5: Tính $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right), \quad a > 1, \alpha \in N^*$

Giải:

Vì $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$ nên $\exists h \in R_+^*$ để $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + h$, áp dụng công thức nhị thức Niutơn (Newton)

$\forall n \in N \setminus \{0,1\}$

$$\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} \geq \frac{n-1}{2}h^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n} = +\infty$$

Suy ra $\frac{a^n}{n^\alpha} = \left\{\frac{(a^n)^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\right\}^\alpha = \left(\frac{a^{\frac{n}{\alpha}}}{n}\right)^\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$

Áp dụng nguyên lí kẹp dễ dàng thấy được kết quả vẫn đúng $\forall \alpha \in R$

Người ta nói rằng hàm mũ tăng nhanh hơn hàm luỹ thừa.

Ví dụ 6: Tinh $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$, $\quad a \in R$

Giải:

Đặt $n_0 = E(|a|) + 1, \forall n > n_0$ sẽ có:

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}...\frac{|a|}{n_0}\right)\left(\frac{|a|}{n_0+1}...\frac{|a|}{n}\right) \leq \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}...\frac{|a|}{n_0}\right)\frac{|a|}{n} = \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

Người ta nói rằng giai thừa tăng nhanh hơn hàm số mũ.

1.3.3. Tính đơn điệu của dãy số

A. Dãy đơn điệu

1. Dãy (u_n) tăng nếu $\forall n \in N, u_n \leq u_{n+1}$,

   Dãy (u_n) tăng ngặt nếu $\forall n \in N, u_n < u_{n+1}$.

2. Dãy (u_n) giảm nếu $\forall n \in N, u_n \geq u_{n+1}$,

   Dãy (u_n) giảm ngặt nếu $\forall n \in N, u_n > u_{n+1}$.

3. Dãy (u_n) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

   Dãy (u_n) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt

Định lí 1:

1. Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

2. Mọi dãy giảm và chặn dưới thì hội tụ.

Chứng minh:

1. (u_n) bị chặn trên $\Rightarrow \exists l = Sup(u_n) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ sao cho $l - \varepsilon \le u_{n_\varepsilon} \le l < l + \varepsilon$

   Vì (u_n) tăng $\Rightarrow \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$,

   Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l = Sup(u_n), n \in N$.

2. Áp dụng kết quả 1 đối với dãy $(-u_n)$.

Định lí 2:

1. Dãy (u_n) tăng và không bị chặn trên thì dần đến $+\infty$.
2. Dãy (u_n) giảm và không bị chặn dưới thì dần đến $-\infty$.

Chứng minh:

1. (u_n) không bị chặn trên $\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_0$ sao cho $u_{n_0} > A$

   Vì (u_n) tăng nên $\forall n > n_0 \Rightarrow u_n \ge u_{n_0} > A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$.

2. Áp dụng kết quả 1. với dãy $(-u_n)$

Chú ý

1. Nếu (u_n) tăng thì hoặc (u_n) hội tụ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
2. Nếu (u_n) tăng và hội tụ đến l thì $l = Sup(u_n, n \in N)$ và $\forall n \in N \Rightarrow u_n \le l$.
3. Nếu (u_n) tăng thì dãy bị chặn dưới bởi u_0.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng $(u_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)$ hội tụ

Giải:

$\forall n \in N^*$ có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$$u_n \le n\frac{1}{n+1} \le 1$$

Vậy (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Ví dụ 8: Tìm giới hạn của dãy số cho dưới dạng ẩn sau:

$$x_n = \frac{5 + x_{n-1}{}^2}{2x_{n-1}}, x_1 > 5$$

Giải: Trước hết dùng qui nạp chứng minh $x_n > 0 \quad \forall n$

- $x_1 > 5$ đúng với $n = 1$

Giả sử $x_k > 0$ ta sẽ chứng minh $x_{k+1} > 0$

Thật vậy $x_{k+1} = \dfrac{5 + x_k{}^2}{2x_k} > 0$ (do tử số và mẫu số đều dương)

Chứng tỏ $x_n > 0 \quad \forall n$

Mặt khác, dựa vào bất đẳng thức Côsi (Cauchy) thì

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right) \geq \sqrt{5}, \quad \forall n$$

Suy ra $x_n{}^2 \geq 5$ hay $x_n \geq \dfrac{5}{x_n}$

Cộng vào các vế với x_n ta có:

$$2x_n \geq \frac{5}{x_n} + x_n \text{ hay } 2x_n \geq 2x_{n+1}$$

Chứng tỏ dãy (x_n) đơn điệu giảm.

Kết hợp hai kết quả trên ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq \sqrt{5}$

Vì $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}{}^2}{2x_{n-1}}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 + x_{n-1}{}^2}{2x_{n-1}}$

Từ đó ta có $a = \dfrac{5 + a^2}{2a}$ và $a \geq \sqrt{5}$

Giải phương trình đối với a nhận được $a = \sqrt{5}$.

Ví dụ 9: Cho 2 dãy $(u_n),(v_n)$ thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0, \ (v_n) \text{ giảm ngặt, } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = l$$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$

Giải:

Cho $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} - l \right| < \varepsilon$, Lấy p, $n \in N$ sao cho p >n > n_0 sẽ có:

$$\left|(u_{n+1} - lv_{n+1}) - (u_n - lv_n)\right| < \varepsilon(v_n - v_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$\left|(u_p - lv_p) - (u_{p-1} - lv_{p-1})\right| < \varepsilon(v_{p-1} - v_p)$$

Cộng lại các vế với vế sẽ có:

$$\left|(u_p - l.v_p) - (u_n - l.v_n)\right| < \varepsilon.(v_n - v_p)$$

Cho $p \to +\infty$ và n cố định,n > n_0 từ trên nhận được

$|u_n - lv_n| \le \varepsilon v_n$. Hay $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - l\right| \le \varepsilon$

Vì (v_n) giảm ngặt và dần về 0 nên v_n>0 , $\forall n > n_1$.

B. Dãy kề nhau

Hai dãy (u_n), (v_n) gọi là kề nhau khi và chỉ khi (u_n) tăng (v_n) giảm và $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

Định lí: Hai dãy kề nhau thì hội tụ và có chung một giới hạn l,ngoài ra

$$\forall n \in N, u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} < v_n$$

Chứng minh:

$\forall n \in N$ gọi $w_n = v_n - u_n \Rightarrow (w_n)$ giảm vì $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \le 0$

(w_n) giảm và hội tụ về 0 $\Rightarrow w_n \ge 0$ $\forall$n hay $u_n \le v_n$.

Chứng tỏ (u_n) tăng và bị chặn trên bởi v_0, (v_n) giảm và bị chặn dưới bởi u_0

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l_2$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$

Theo chú ý 2 ở mục A suy ra $u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $(e_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ hội tụ.

Giải:

Trước hết chỉ ra (e_n) tăng

Theo công thức nhị thức Newton sẽ có

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1.2...n}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Suy ra

$$e_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

e_{n+1} nhiều hơn e_n một số hạng dương và từ số hạng thứ 3 trở đi mọi số hạng của e_n nhỏ hơn số hạng tương ứng của e_{n+1} vì $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$. Suy ra $e_{n+1} > e_n$.

Ngoài ra $e_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$,

suy ra $e_n<2+\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3, \quad \forall n$

Gọi giới hạn của (e_n) là số e, rõ ràng $e>0$.Sau đây dùng số e làm cơ số của logarit.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng $(e'_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ hội tụ về e

Giải:

$\forall n\in N^*$,đặt $v_n=e'_n+\frac{1}{n.n!}$. rõ ràng (e_n') tăng ngặt và $\lim_{n\to\infty}(v_n-e'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n.n!}=0$

Hơn nữa ta có:

$$v_{n+1}-v_n=e'_{n+1}-e'_n+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n..n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}=-\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$\Rightarrow (v_n)$ giảm ngặt. Trước hết chứng minh $e\notin Q$ bằng phương pháp phản chứng:

Thật vậy, nếu $e=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ mà $e\in Q$ tức là $e=\frac{p}{q}$, $\quad p,q\in N^*$, ta sẽ có:

$$e_q' = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} = \frac{a}{q!}, \qquad a \in N^*$$

$$e_q' < e < v_q \Leftrightarrow \frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{q.q!}$$

Hay a < p(q-1)! < a + $\frac{1}{q} \le a+1$. Điều này mâu thuẫn vì (a,p(q-1)!,a+1) $\in (N^*)^3$.

Sau đây ta sẽ chứng minh $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$: Rõ ràng khi k cố định và n > k thì

$$e_n > 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

Cho n $\to \infty$ suy ra $e \ge 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k'$

Như vậy $e \ge e_n' > e_n$. Theo định lí kẹp suy ra $e_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.

Hệ quả: (Định lí về các đoạn lồng nhau)

Cho hai dãy (a_n), (b_n) thoả mãn $:\forall n \in N, a_n \le b_n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Khi đó tồn tại duy nhất số l sao cho $\bigcap_{n\in N}[a_n, b_n] = \{l\}$

Chứng minh:

Vì (a_n),(b_n) kề nhau nên cùng hội tụ và $\forall n$ có $a_n < a_{n+1} < l < b_{n+1} < b_n$.

1.3.4. Dãy con

Cho (u_n),từ các số hạng của nó lập một dãy mới (u_{n_k}) với $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.

Gọi (u_{n_k}) là một dãy con của (u_n).Chẳng hạn:

(u_{2n}) và (u_{2n+1}) là các dãy con của (u_n)

(u_{n^2}) là các dãy con của (u_n)

(u_{n^2-n}) không phải là dãy con của (u_n) vì số hạng u_0 xuất hiện 2 lần ứng với n=0,n=1

Định lí : Nếu (u_n) hội tụ về $a \in R$ thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a

Chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Vì $n_k \to \infty$ khi $k \to \infty$, nên $\exists k_0, \forall k > k_0 : n_k > n_0 \Rightarrow |u_{n_k} - a| < \varepsilon$ suy ra $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.

Chú ý:

• Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = +\infty$

• Từ định lí trên, chúng ta nhận được điều kiện đủ cho dãy số phân kì: Nếu tồn tại hai dãy con hội tụ về hai số khác nhau thì dãy số phân kì. Chẳng hạn $(-1)^n$ phân kì vì có dãy con $((-1)^{2n}$)hội tụ về 1 và dãy con ($(-1)^{2n+1}$) hội tụ về -1

Hệ quả: Để (u_n) hội tụ đến l điều kiện cần và đủ là hai dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) đều hội đến l .

Chứng minh:

Điều kiện cần suy từ định lí 1.

Điều kiện đủ:

$:\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_1, n_2, \forall p > n_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| < \varepsilon$

$\forall p > n_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$

Đặt n_0=Max($2n_1$,$2n_2$+1) lấy $n \in N$ sao cho n=2p hoặc n=2p+1

Trường hợp n=2p $\Rightarrow p > n_1 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon$.

Trường hợp n=2p+1 $\Rightarrow p > n_2 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$.

Trong mọi trường hợp có $|u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Định lí: (Định lí Bônzanô – Vâyoxtrase), (Bolzano -Weierstrass): Từ mọi dãy (u_n) bị chặn đều có thể lấy ra một dãy con hội tụ

Chứng minh: Dùng phương pháp chia đôi .

Ta sẽ xây dựng bằng qui nạp hai dãy thực (a_n), (b_n) kề nhau và một dãy con

$$u_{n_k} \in [a_n, b_n], \qquad \forall k \in N$$

Vì (u_n) bị chặn nên tồn tại a_0,b_0 sao cho $\forall n \in N$ có $a_0 \le u_n \le b_0$,rõ ràng

$$u_{n_k} \in [a_0, b_0], \forall k \in N$$

Cho $n \in N$ giả sử $(a_n, b_n) \in R^2$ sao cho $a_n \le b_n$. Tập $\{u_{n_k} \in [a_n, b_n], k \in N\}$ là vô hạn và

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

Xét điểm giữa $\frac{a_n + b_n}{2}$ của $[a_n, b_n]$, rõ ràng ít nhất một trong hai khoảng chứa u_{n_k} là vô hạn. Do đó tồn tại $(a_{n+1},b_{n+1})\in R^2$ sao cho $a_{n+1}\le b_{n+1}$. Tập $\{u_{n_k}\in[a_{n+1},b_{n+1}],k\in N\}$ là vô hạn và $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n-a_n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$

Rõ ràng các đoạn $[a_n,b_n]$ lồng nhau. Vậy $\forall n$ tồn tại l sao cho $|u_{n_k}-l|\le b_n-a_n$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=l$

Ví dụ 12: Chứng minh rằng mọi dãy (u_n) tuần hoàn và hội tụ là dãy dừng

Giải:

(u_n) tuần hoàn nên $\exists T\in N^*,\forall n\in N,u_{n+T}=u_n$

Lấy $n_0\in N,\quad \forall k\in N$ có $u_{n_0+kT}=u_{n_0}$

(u_{n_0+kT}) là một dãy con và là dãy dừng nên $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_0+kT}=u_{n_0}$

Vì (u_n) hội tụ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u_{n_0}$ vì n_0 bất kì vậy $(u_n)=(u_{n_0})\quad\forall n$,đó là dãy dừng.

Ví dụ 13: Cho dãy (u_n) thoả mãn $\forall m,n\in N^*,\qquad 0\le u_{m+n}\le\dfrac{m+n}{mn}$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

Giải:

$\forall n\in N$ có

$$0\le u_{2n}\le\frac{2n}{n^2}\to 0$$

$$0\le u_{2n+1}\le\frac{2n+1}{n(n+1)}\to 0$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

CHƯƠNG II: HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

2.1.1. Các định nghĩa cơ bản

A. Định nghĩa hàm số

Cho X là tập không rỗng của R. Một ánh xạ f từ X vào R gọi là một hàm số một biến số

$$f : X \to R$$
$$x \mapsto f(x)$$

X gọi là tập xác định của f, $f(X)$ gọi là tập giá trị của f. Đôi khi ký hiệu

$y = f(x),\ x \in X$ x gọi là đối số, y gọi là hàm số.

B. Hàm chẵn, lẻ

Cho X đối xứng với 0 tức là $\forall x \in X, -x \in X$

Hàm số f (x) chẵn khi và chỉ khi $f(x) = f(-x)$.

Hàm số f (x) lẻ khi và chỉ khi $f(x) = -f(-x)$.

C. Hàm số tuần hoàn

Hàm số f (x) gọi là tuần hoàn trên X nếu tồn tại $\tau \in R_+^*$ sao cho $\forall x \in X$ thì

$x+\tau \in X$ và f (x+τ)= f (x).

Số T dương bé nhất trong các số τ gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

D. Hàm số đơn điệu

Cho f (x) với $x \in X$.

1. Nói rằng f (x) tăng nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

   và f (x) tăng ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. Nói rằng f (x) giảm nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

   và f (x) giảm ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3. Nói rằng f (x) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

   Nói rằng f (x) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt.

E. Hàm số bị chặn

1. Hàm số f (x) bị chặn trên trong X nếu tồn tại số A sao cho: $\forall x \in X, f(x) \le A$.

2. Hàm số f (x) bị chặn dưới trong X nếu tồn tại số B sao cho:

$$\forall x \in X, f(x) \ge B$$

3. Hàm số f (x) bị chặn trong X nếu tồn tại các số A,B sao cho:

$$\forall x \in X, B \le f(x) \le A.$$

Hệ quả: Nếu A là số chặn trên của f (x) trong X thì

$$\underset{X}{Sup}\, f(x) = Sup\{f(x), x \in X\} \le A$$

Nếu B là số chặn dưới của f (x) trong X thì

$$\underset{X}{Inf}\, f(x) = Inf\{f(x), x \in X\} \ge B$$

F. Hàm số hợp

Cho $f: X \to R$ và g: $Y \to R$ với $f(X) \subset Y$ gọi ánh xạ

$$g_0 f: X \to R$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Hay y = g(f (x)) là hàm số hợp của hai hàm f và g.

Định lí:

Nếu $f, g: X \to R$ bị chặn trên thì $f + g$ cũng bị chặn trên và

$$\underset{X}{Sup}(f(x) + g(x)) \le \underset{X}{Sup}\, f(x) + \underset{X}{Sup}\, g(x)$$

1. Nếu $f, g: X \to R$ bị chặn trên và không âm thì $f \,.\, g$ bị chặn trên và

$$\underset{X}{Sup}(f(x).g(x)) \le \underset{X}{Sup}\, f(x).\underset{X}{Sup}\, g(x)$$

2. Nếu $f: X \to R$ bị chặn trên và $\lambda \in R_*$ thì λf bị chặn trên đồng thời

$$\underset{X}{Sup}\, \lambda.f(x) = \lambda \underset{X}{Sup}\, f(x)$$

3. Để $f: X \to R$ bị chặn dưới, điều kiện cần và đủ là - f bị chặn trên và khi đó

$$\underset{X}{Inf}\, f(x) = -\underset{X}{Sup}(-f(x))$$

Chứng minh:

1. Rõ ràng $f(x) + g(x) \le \underset{X}{Sup}\, f(x) + \underset{X}{Sup}\, g(x)$ chứng tỏ f (x)+ g (x) bị chặn trên.

Theo hệ quả suy ra $\underset{X}{Sup}(f(x)+g(x)) \le \underset{X}{Sup}\, f(x) + \underset{X}{Sup}\, g(x)$

2. $\forall x \in x, 0 \le f(x) \le \underset{X}{Sup}\, f(x), 0 \le g(x) \le \underset{X}{Sup}\, g(x)$

$$\Rightarrow \forall x \in X, 0 \le f(x).g(x) \le \underset{X}{Sup}\, f(x).\underset{X}{Sup}\, g(x)$$

Tương tự như trên.

3. Coi λ như hàm hằng. Ap dụng 2 sẽ có $\underset{X}{Sup}\, \lambda f(x) \le \lambda.\underset{X}{Sup}\, f(x)$

Với λ =0. Đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên

Với λ >0. áp dụng bất đẳng thức ứng với hằng số $\frac{1}{\lambda}$ và hàm số $\lambda f(x)$

$$\underset{X}{Sup}(\frac{1}{\lambda}.\lambda f(x)) \le \frac{1}{\lambda}\underset{X}{Sup}\, \lambda f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \underset{X}{Sup}\, \lambda f(x) \ge \lambda\, \underset{X}{Sup}\, f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \underset{X}{\text{Sup}}\, \lambda f(x) = \lambda\, \underset{X}{Sup}\, f(x)$$

4. Giả sử $f(x)$ bị chặn dưới, đặt $m = \underset{X}{Inf}\, f(x) \le f(x) \Rightarrow \forall x \in X, -f(x) \le -m.$

Vậy - $f(x)$ bị chặn trên và rõ ràng $\underset{X}{Sup}(-f(x)) \le -\underset{X}{Inf}\, f(x).$

Mặt khác

$$f(x) \le \underset{X}{Sup}(-f(x)) \Rightarrow f(x) \ge -\underset{X}{Sup}(-f(x)) \Rightarrow \underset{\text{X}}{\text{Inf}}\ f(x) \ge -\underset{X}{Sup}(-f(x))$$

Sau khi so sánh hai bất đẳng thức suy ra $\underset{X}{Inf}\, f(x) = -\underset{X}{Sup}(-f(x)).$

Phần đảo chứng minh tương tự.

G. Hàm số ngược

Cho song ánh $f : X \to Y, \quad X, Y \subset R$

Ánh xạ ngược $\quad f^{-1} : Y \to X$ gọi là hàm số ngược của f

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Thông thường đối số kí hiệu là x, hàm số kí hiệu là y, vậy hàm ngược của $y = f(x)$ là hàm số $y = f^{-1}(x)$. Vì thế trên cùng mặt phẳng toạ độ 0xy, đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} là đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.

Ví dụ 1: Cho $f, g : R \to R$ thoả mãn $\forall x, y \in R, \quad (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) = 0$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai hàm số là hằng số.

Giải:

Giả sử $a, b \in R$ và $f(a) \neq f(b)$ ta sẽ chỉ ra $g(x)$ là hằng số. Trước hết có

$$\forall x \in R: \begin{cases} (f(a)-f(x))(g(a)-g(x))=0 \\ (f(b)-f(x))(g(a)-g(x))=0 \end{cases}$$

Trừ từng vế và để ý đến g(a)=g(b) suy ra:

$$(f(a)-f(b))(g(a)-g(x))=0 \Rightarrow g(x)=g(a)$$

Ví dụ 2: Tìm hàm $f(x)$ trên R sao cho $x.f(x)+f(1-x)=x^3+1 \quad \forall x \in R$

Giải: Giả sử tồn tại $f(x)$,thay x bởi 1-x vào hệ thức đã cho:

$$(1-x).f(1-x)+f(x)=2-3x+3x^2-x^3$$

Suy ra $\quad (x^2-x+1)f(x)=(x^2-x+1)^2$

$$\Rightarrow \quad f(x)=x^2-x+1$$

Kiển tra $f(x)=x^2-x+1$ thoả mãn.

Ví dụ 3: Cho $f(x)=x$ và $g(x)=1-x$ trong [0,1]. Kiểm tra tính ngặt của bất đẳng thức:

$$\sup_{[0,1]}(f(x)+g(x)) < \sup_{[0,1]} f(x) + \sup_{[0,1]} g(x)$$

$$\sup_{[0,1]}(f(x)g(x)) < \sup_{[0,1]} f(x) \sup_{[0,1]} g(x)$$

Giải:

$\sup_{[0,1]} f(x)=\sup_{[0,1]} g(x)=1;\ \sup_{[0,1]}(f(x)+g(x))=\sup_{[0,1]} 1=1;\ \sup_{[0,1]}(\mathrm{f(x)g(x)})=\sup_{[0,1]}(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)=\frac{1}{4}$ Chứng tỏ tính ngặt thoả mãn (do $1<2, \frac{1}{4}<1$)

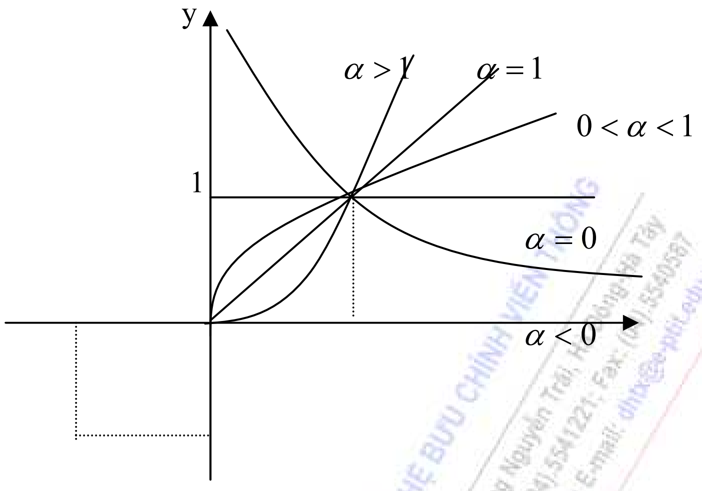
2.1.2. Các hàm số thông dụng

A. Hàm luỹ thừa

Cho $\alpha \in R$. Hàm luỹ thừa với số mũ α ,được kí hiệu là P_α, là ánh xạ từ R_+^* vào R, xác định như sau $\forall x \in R_+^*, P_\alpha(x)=x^\alpha$

Nếu $\alpha>0$, coi rằng $P_\alpha(0)=0$ Nếu $\alpha=0$, coi rằng $P_0(0)=1$

Đồ thị của $P_\alpha(x)$ cho bởi h.2.1



H.2.1

B. Hàm mũ cơ số a

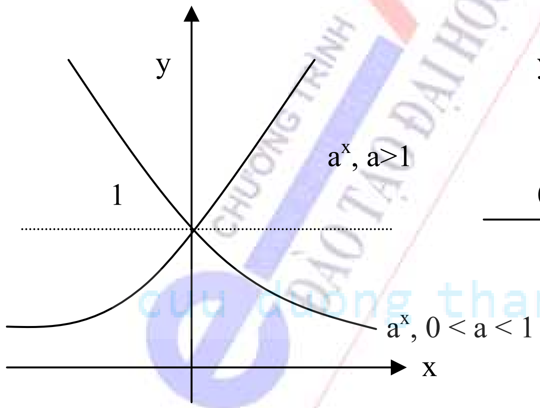
Xét $a \in R_+^* \setminus \{1\}$. Hàm mũ cơ số a, kí hiệu là $\exp_a x$, là ánh xạ từ R vào R_+^*, xác định như sau: $\forall x \in R, \qquad \exp_a x = a^x$. Đồ thị của $y = a^x$ cho bởi h.2.2.

C. Hàm lôgarit cơ số a

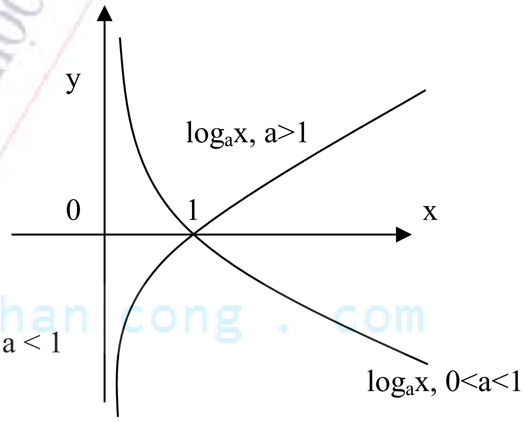
Xét $a \in R_+^* \setminus \{1\}$. Hàm lôgarit cơ số a, kí hiệu là $\log_a$,là ánh xạ ngược với ánh xạ $\exp_a$, như vậy $\forall (x,y) \in R_+^* \times R, \qquad y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ cho bởi hình h.2.3.

Chú ý: Hàm luỹ thừa có thể mở rộng khi miền xác định là R.



H.2.2



H.2.3

Tính chất của hàm số lôgarit

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\forall x, y \in R_+^*$,
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$\forall \alpha \in R \qquad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

3. $\forall a, b \in R_+^*$, $\log_b x = \log_b a . \log_a x$

4. $\forall x \in R_+^*$, $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Chú ý: Sau này người ta thường lấy cơ số a là số e và gọi là lôgarit nêpe hay lôgarit tự nhiên của x, kí hiệu y = lnx và suy ra $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

D. Các hàm số lượng giác

Các hàm số lượng giác: sinx, cosx, tgx, cotgx đã được xét kỹ trong chương trình phổ thông trung học. Dưới đây chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất cơ bản của chúng.

Tính chất:

1. sinx xác định trên R, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in R$$

2. cosx xác định trên R, là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn:

$$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in R$$

3. tgx xác định trên R\{$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$}, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

4. cotgx xác định trên R\{$k\pi, k \in Z$}, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

E. Các hàm số lượng giác ngược

1. Hàm arcsin là ánh xạ ngược của sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

Kí hiệu là arcsin: $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy ta có: $\forall x \in [-1,1], \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

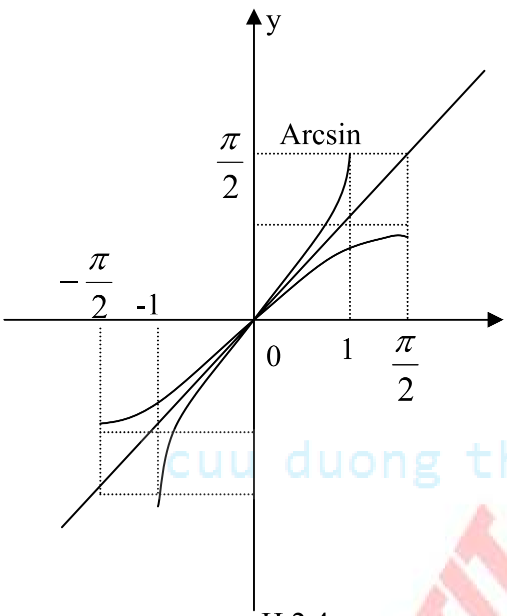
Chú ý:

- $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x$

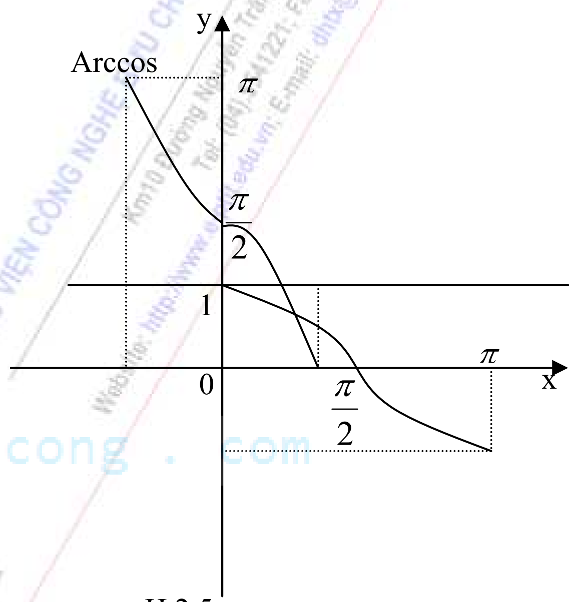
• $f(x) = \arcsin(\sin x)$ là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và cho dưới dạng:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{nếu } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Đồ thị của y=arcsinx cho trên hình 2.4



H.2.4



H.2.5

2. Hàm arccos là ánh xạ ngược của $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ kí hiệu:

$$\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$$
$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in [0, \pi], \; y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

Đồ thị hàm số y=arccosx cho trên hình 2.5

Chú ý:

• $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$

• $g(x) = \arccos(\cos x)$ là hàm số chẵn tuần hoàn với chu kỳ 2π và biểu diễn dưới dạng: $g(x) = x$ nếu $x \in [0, \pi]$

• Vì $\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \in [0, \pi]$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x$

Vậy $\quad \arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

3. Hàm actang là ánh xạ ngược của $tg:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to R$, kí hiệu:

$$arctg: R \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\forall x \in R, \forall y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \quad y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$

Đồ thị của y=arctgx cho trên hình 2.6

Chú ý:

- $\forall x \in R \qquad tg(arctgx) = x$
- $h(x) = arctg(tgx)$ xác định trên $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi Z\right\}$ là hàm số lẻ tuần hoàn với chu kỳ π và

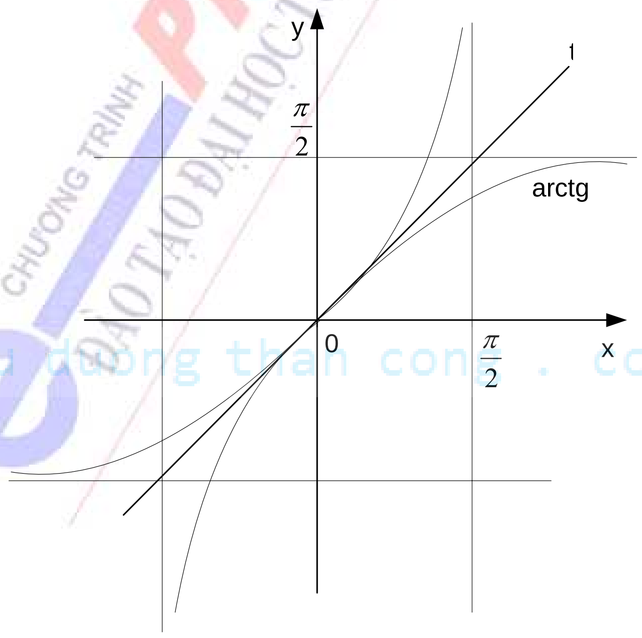
$h(x) = x, \quad x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Hàm accôtang là ánh xạ ngược của cotg: $(0,\pi) \to R$ kí hiệu:

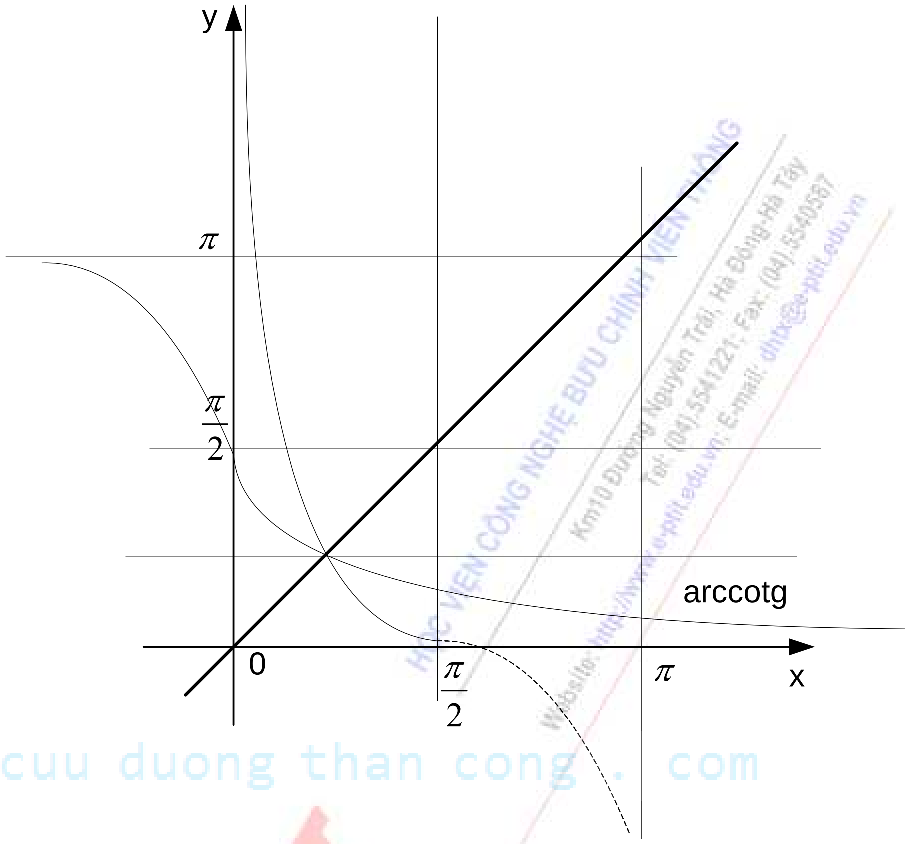
$$arc\cot g: R \to \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\quad \forall x \in R, \forall y \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \quad y = arc\cot gx \Leftrightarrow x = \cot gy$

Đồ thị hàm y=arccotgx cho trên hình 2.7



H.2.6



H.2.7

Chú ý:

- $\forall x \in R, \qquad \cot g(arc\cot gx) = x$
- $k(x) = arc\cot g(tgx)$ xác định trên $R \setminus \pi Z$, tuần hoàn với chu kỳ π và $k(x) = x, x \in (0,\pi)$
- Vì $\left(\frac{\pi}{2} - arc\cot g(\cot gx)\right) \in (0,\pi)$ và $\cot g\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right) = tg(arctgx)$

Vậy $\quad arctgx + arc\cot gx = \frac{\pi}{2}$

Người ta gọi hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp cơ bản.

F. Các hàm hypebôlic thuận

1. Hàm sinhypebôlic là ánh xạ $sh : R \to R$ xác định như sau:

$$\forall x \in R, \qquad shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

2. Hàm côsinhypebôlic là ánh xạ $ch: R \to R$ xác định như sau:

$$\forall x \in R, \qquad chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

3. Hàm tanghypebôlic là ánh xạ $th: R \to R$ xác định như sau:

$$\forall x \in R, \qquad thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

4. Hàm cotanghypebôlic là ánh xạ $\coth: R^* \to R$, xác định như sau:

$$\forall x \in R^*, \qquad \coth x = \frac{chx}{shx} = \frac{1}{thx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Tính chất:

1. Shx,thx,cothx là các hàm số lẻ còn chx là chẵn và $\forall x \in R, chx > 0$
2. $\forall x, a, b, p, q \in R$, các hàm hypebôlic thoả mãn công thức sau đây

- $ch^2x - sh^2x = 1 \Rightarrow Hyperbon \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ biểu diễn tham số sẽ là:

$$\begin{cases} x = acht \\ y = bsht \quad t \in R \end{cases}$$

- $ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$; $\quad sh(a+b) = sha.chb + shb.cha$

  $ch(a-b) = cha.chb - sha.shb$; $\quad sh(a-b) = sha.chb - shb.cha$

  $th(a+b) = \dfrac{tha + thb}{1 + tha.thb}$; $\quad th(a-b) = \dfrac{tha - thb}{1 - tha.thb}$

- $ch2a = ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a$.

  $sh2a = 2sha.cha$.

  $th2a = \dfrac{2tha}{1 + th^2a}$.

  $ch^2a = \dfrac{1}{2}(ch2a + 1)$; $sh^2a = \dfrac{1}{2}(ch2a - 1)$.

- $chp + chq = 2ch\dfrac{p+q}{2}ch\dfrac{p-q}{2}$

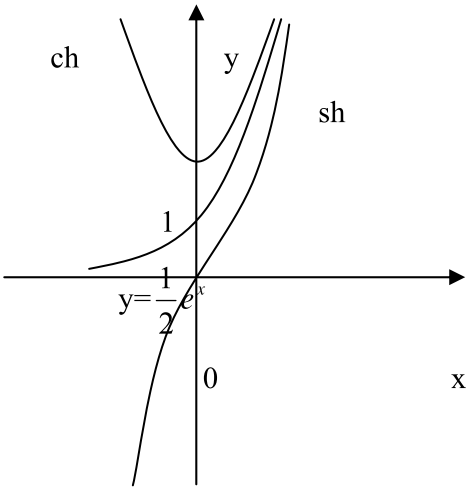
  $chp - chq = 2sh\dfrac{p+q}{2}sh\dfrac{p-q}{2}$

  $shp + shq = 2sh\dfrac{p+q}{2}ch\dfrac{p-q}{2}$

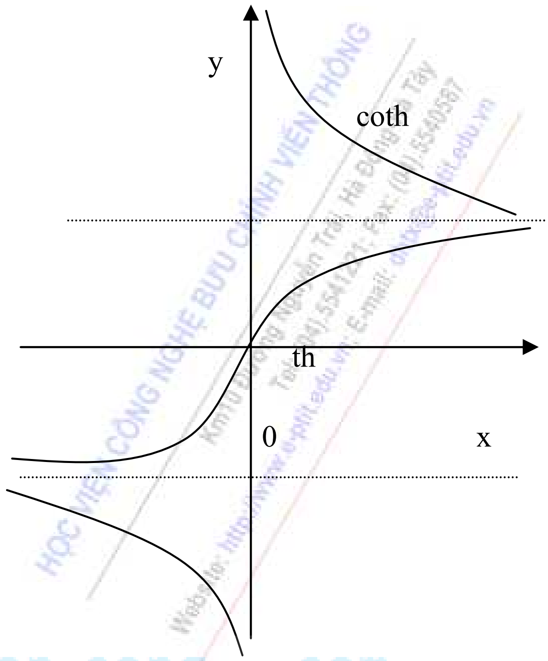
  $shp - shq = 2ch\dfrac{p+q}{2}sh\dfrac{p-q}{2}$

Tính chất đã nêu lý giải tên gọi sinhypebôlic, ...

Đồ thị của các hàm shx, chx cho trên hình 2.8, còn đồ thị các hàm thx, cothx cho trên hình 2.9



H.2.8



H.2.9

G. Các hàm hypebôlic ngược

1. Hàm Acsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $sh : R \to R,$ kí hiệu:

$$Argsh : R \to R \text{ haylà } \forall (x, y) \in R^2, y = Argshx \Leftrightarrow x = shy$$

2. Hàm Accôsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $ch : R \to [1,+\infty]$, kí hiệu:

$$Argch : [1,+\infty) \to R_+, \text{ tức là } \forall x \in [1,+\infty), \forall y \in R_+, y = Argchx \Leftrightarrow x = chy$$

3. Hàm Actanghypebôlic là ánh xạ ngược của $th : R \to (-1,1)$, kí hiệu:

$$Argth : (-1,1) \to R, \text{ tức là } \forall x \in (-1,1), \forall y \in R, y = Argthx \Leftrightarrow x = thy$$

4. Hàm Accôtanghypebôlic là ánh xạ ngược của $\coth : R^* \to R \setminus [-1,1]$, kí hiệu:

$$Arg\coth : R \setminus [-1,1] \to R^*, \text{tức là}$$

$$\forall x \in R \setminus [-1,1], \forall y \in R^*, y = Arg\coth x \Leftrightarrow x = \coth y$$

Biểu thức logarit của hàm hypebôlic ngược:

1. Trước hết thấy ngay rằng Argshx là hàm số lẻ và vì:

$$y = Argshx \Leftrightarrow x = shy \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

Hay $a^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ và do $e^y > 0$ nên $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$

Cuối cùng $\forall x \in R, \quad Argshx = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

2. $\forall x \in [1,+\infty), \forall y \in R_+, y = Argchx \Leftrightarrow x = chy$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Vì $e^y \geq 1$ nên lấy $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow \forall x \in [1,+\infty) \quad Argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3.

$$\forall x \in (-1,1), \forall y \in R, y = Argthx \Leftrightarrow x = thy$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Cuối cùng $\forall x \in (-1,1) \quad \text{Argthx} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

4. $\forall x \in R \setminus [-1,1], \quad Arg\coth x = Argth\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$

H. Đa thức, hàm hữu tỉ.

1. Ánh xạ P: $X \to R$ được gọi là đa thức khi và chỉ khi tồn tại $n \in N$ và $(a_0, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$ sao cho $\forall x \in X$, $\quad P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Nếu $a_n \neq 0$, gọi n là bậc của đa thức, kí hiệu degP(x)=n

2. Ánh xạ $f: \ X \to R$ được gọi là hàm hữu tỉ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức

P,Q: $X \to R$ sao cho $\forall x \in X, Q(x) \neq 0, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi: degP(x)<degQ(x)

3. Hàm hữu tỉ tối giản là các phân thức có dạng:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ hoặc } \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}$$

Trong đó $k \in N^*$, a, p, q, A, B, C là các số thực và $p^2 - 4q < 0$

Dưới đây ta đưa ra các định lí được chứng minh trong lí thuyết đại số

Định lí 1: Mọi đa thức bậc n với các hệ số thực đều có thể phân tích ra thừa số trong dạng:
$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}...(x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_m}$

Trong đó $\alpha_i \ (i = \overline{1,l})$ là các nghiệm thực bội k_i của đa thức còn $p_j, q_j, \beta_j \in R$

với $j=1,2,...,m$ và $\sum_{i=1}^{l} k_i + 2\sum_{j=1}^{m}\beta_j = n$, $\quad p_j{}^2 - 4q_j < 0$; $j=\overline{1,m}$

Định lí 2: Mọi hàm hữu tỉ thực sự đều có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm hữu tỉ tối giản.

Ví dụ 4: Cho $a \in R_+^* \setminus \{1\}$, giải phương trình $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$

Giải:

Điều kiện $x \in R_+^*$

$$\ln x\left(\frac{1}{\ln a} - \frac{1}{2\ln a} + \frac{1}{4\ln a}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln a \Leftrightarrow x = a$$

Ví dụ 5: Cho $n \in N, x \in R$ hãy tính $\prod_{k=0}^{n}\left(2ch2^k x - 1\right) = P$

Giải:

$$ch2t = 2ch^2t - 1 \quad \forall t \Rightarrow 4ch^2t - 1 = 2ch2t + 1$$

$$\Rightarrow 2cht - 1 = \frac{2ch2t+1}{2cht+1}$$

$$P = \prod_{k=0}^{n}\left(2ch2^k x - 1\right) = \prod_{k=o}^{n}\frac{2ch2^{k+1}x+1}{2ch2^k x+1} = \frac{2ch2^{n+1}x+1}{2chx+1}$$

Ví dụ 6: Cho $x, y \in (-1,1)$ hãy biến đổi biểu thức $Argthx + Argthy$.

Áp dụng hãy biến đổi $f(x) = Argth\dfrac{1+3thx}{3+thx}$

Giải:

$$Argthx + Argthy = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}{1-\dfrac{x+y}{1+xy}} = Argth\frac{x+y}{1+xy}$$

$$f(x) = Argth\frac{\dfrac{1}{3}+thx}{1+\dfrac{1}{3}thx} = Argth\frac{1}{3} + Argth(thx) = \frac{1}{2}\ln 2x$$

Ví dụ 7: Giải phương trình: arcsin(tgx)=x

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ tgx \in [-1,1] \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

$$\arcsin(tgx) = \arcsin(\sin x)$$

$$\Rightarrow \quad tgx = \sin x$$

$$\Rightarrow \sin x\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow x = k\pi\,, \qquad k \in Z.$$

Vì $k\pi \notin \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên phương trình vô nghiệm.

2.1.3. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

2.2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.2.1. Khái niệm về giới hạn

A. Định nghĩa giới hạn

Ta gọi $\delta-$lân cận của điểm $a \in R$ là tập $\Omega_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$

Gọi A- lân cận của $+\infty$ là tập $\Omega_A(+\infty) = (A, +\infty)$ với A>0 và khá lớn.

Gọi B- lân cận của $-\infty$ là tập $\Omega_B(-\infty) = (-\infty, -B)$ với B>0 và khá lớn.

Cho f xác định ở lân cận điểm a (có thể không xác định tại a)

1. Nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến a (gọi tắt: có giới hạn là l tại a) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại a nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > A\,.$$

3. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại a nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại a

4. Nói rằng f có giới hạn là l tại $+\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_A(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_A(+\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

5. Nói rằng f có giới hạn là l tại $-\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_B(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_B(-\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

6. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_M(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(+\infty) \Rightarrow f(x) > A .$$

7. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $+\infty$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$

8. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ nếu $\forall A > 0, \exists \Omega_M(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(-\infty) \Rightarrow f(x) > A$.

9. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $-\infty$ khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ Khi $f(x)$ có giới hạn là l tại a hoặc tại $\pm\infty$ nói rằng $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại a hoặc tại $\pm\infty$. Ngược lại $f(x)$ có giới hạn là $\pm\infty$, nói rằng nó có giới hạn vô hạn.

B. Định nghĩa giới hạn một phía.

1. Nói rằng f có giới hạn trái tại a là l_1 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\, (\exists \Omega_\eta(a) \subset X), \forall x, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon.$$

2. Nói rằng f có giới hạn phải tại a là l_2 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \ \ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

Kí hiệu f có giới hạn là l tại a thường là:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{hoặc} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

Tương tự có các kí hiệu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, -\infty; \qquad \lim_{x \to \pm\infty} = l, +\infty, -\infty$$

Kí hiệu f có giới hạn trái tại a là l_1, thường dùng $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = l_1$

Tương tự $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = l_2$

Hệ quả: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ là $f(a^-) = f(a^+) = l.$

2.2.2. Tính chất của hàm có giới hạn.

A. Sự liên hệ với dãy số

Định lí: Để $f(x)$ có giới hạn là l tại a điều kiện cần và đủ là mọi dãy (u_n) trong X hội tụ về a thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = l$

Chứng minh:

Cho $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} l$ và $u_n \to a$. Khi đó

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \exists n_0(\eta), \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \eta$

Như vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |f(u_n) - l| < \varepsilon$ nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = l$.

Ngược lại, cho $(u_n) \to a$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = l$ sẽ có $\lim\limits_{n\to a} f(x) = l$

Nếu không, tức là $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0,$ $\exists x$ để $|x-a| < \eta$ và $|f(x) - l| \geq \varepsilon$, tức là $\forall n \in N^*$ lấy $\eta = \frac{1}{n}, \exists u_n$ để $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ và $|f(u_n) - l| \geq \varepsilon$. Rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ nhưng $\lim\limits_{x\to\infty} f(u_n) \neq l$ vô lý. Chứng tỏ phải xảy ra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

B. Tính duy nhất của giới hạn

Định lí: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ thì l là duy nhất.

Chứng minh:

Là hệ quả của định lí về tính duy nhất của giới hạn của dãy số và định lí vừa phát biểu ở trên.

C. Tính bị chặn

Định lí: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận của a.

Chứng minh:

Lấy $\varepsilon = 1$, $\exists \eta > 0, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < 1$.

Hay $|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|$

Chú ý:

- Trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$ cũng chứng minh tương tự.

• Định lí đảo: Hàm $f(x)$ không bị chặn trong lân cận của a thì không có giới hạn hữu hạn tại a.

Chẳng hạn $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ không có giới hạn hữu hạn tại 0.

D.Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.

Định lí 1: Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. Khi đó:

1. Nếu $c<l$ thì trong lân cận đủ bé của $a: c<f(x)$
2. Nếu $l<d$ thì trong lân cận đủ bé của $a: f(x)<d$
3. Nếu $c<l<d$ thì trong lân cận đủ bé của a: $c<f(x)<d$

Chứng minh:

1. $\varepsilon=l-c>0, \exists\eta_1, \forall x\in\Omega_{\eta_1}(a)\setminus\{a\}\Rightarrow |f(x)-l|<l-c\Rightarrow c<f(x)$
2. $\varepsilon=d-l \quad ,\exists\eta_2, \forall x\in\Omega_{\eta_2}(a)\setminus\{a\}\Rightarrow |f(x)-l|<d-l\Rightarrow f(x)<d$
3. $\exists\eta=Min(\eta_1,\eta_2), \forall x\in\Omega_{\eta}(a)\setminus\{a\}\Rightarrow c<f(x)<d$

Chú ý: Định lí trên không còn đúng khi thay các bất đẳng thức ngặt bằng các bất đẳng thức không ngặt.

Định lí 2: Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, khi đó

1. Nếu $c\le f(x)$ trong lân cận của a thì $c\le l$
2. Nếu $f(x)\le d$ trong lân cận của a thì $l\le d$
3. Nếu $c\le f(x)\le d$ trong lân cận của a thì $c\le l\le d$

Nhờ vào lập luận phản chứng, chúng ta thấy định lí trên thực chất là hệ quả của định lí 1.

Định lí 3: Nguyên lí kẹp:

Cho ba hàm số f,g,h thoả mãn: $f(x)\le g(x)\le h(x)$ trên X; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$

Chứng minh: $\forall\varepsilon>0, \exists\eta_1,\eta_2, \forall x:\quad 0<|x-a|<\eta_1\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

$$0<|x-a|<\eta_2\Rightarrow |h(x)-l|<\varepsilon$$

Lấy $\eta=Min(\eta_1,\eta_2)$ thì $\forall x\in X:\quad 0<|x-a|<\eta\Rightarrow\begin{cases}|f(x)-l|<\varepsilon\\ |h(x)-l|<\varepsilon\end{cases}$

$\Rightarrow -\varepsilon<f(x)-l\le g(x)-l\le h(x)-l<\varepsilon$. Tức là $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$

Chú ý: Định lí đúng với các trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$

Định lí 4: Nếu trong lân cận của a có $f(x) \le g(x)$ và $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ thì:

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Chứng minh:

$$\forall A > 0, \exists \eta_1, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \eta_1 \Rightarrow f(x) > A$$

Mặt khác $\exists \eta_2, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \eta_2 \Rightarrow f(x) \le g(x)$

Lấy $\eta = Min(\eta_1, \eta_2), \forall x: 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow g(x) > A$ chứng tỏ $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$

Chú ý:

- Định lí đúng với trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$
- Tương tự có định lí khi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$

E. Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

Định lí 1 (Trường hợp giới hạn hữu hạn):

1. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$
2. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$
3. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 + l_2$
4. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \Rightarrow \lambda . f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l, \quad \lambda \in \mathrm{R}$
5. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ và $g(x)$ bị chặn trong lân cận của $a \Rightarrow f(x).g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
6. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2 \Rightarrow f(x).g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 . l_2$
7. $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{l_1}{l_2}$

Chứng minh:

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

   Mà $\big||f(x)| - |l|\big| \le |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$
2. Hiển nhiên vì $\big||f(x)| - 0\big| = |f(x)| = |f(x) - 0|$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\exists \eta_2 > 0, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Gọi $\eta = Min(\eta_1, \eta_2), \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta$ sẽ có:

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Chứng tỏ $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 + l_2$

4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{1+|\lambda|}$ với $\lambda \in R$

Suy ra $\forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda l| \le \dfrac{|\lambda|\varepsilon}{1+|\lambda|} < \varepsilon$

Chứng tỏ $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l$

5. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{1+M}$

Trong đó $g(x)$ bị chặn bởi số M trong lân cận $\Omega_{\eta_2}(a)$. Tức là

$$\forall x, \exists M, \exists \eta_2: \quad 0 < |\text{x - a}| < \eta_2 \Rightarrow |g(x)| \le M$$

Đặt $\eta = Min(\eta_1, \eta_2)$ thì

$$\forall x: \; 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x).g(x)| = |f(x)|.|g(x)| < \frac{M\varepsilon}{1+M} < \varepsilon \Rightarrow f(x).g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

6. Đặt $h(x) = f(x) - l_1 \Rightarrow h(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \Rightarrow f(x).g(x) = l_1.g(x) + h(x).g(x)$

Vì $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2$ nên bị chặn trong lân cận của a.

Theo 4. thì $l_1.g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1.l_2$, theo 5. thì $h(x).g(x) \to 0$

Vậy $f(x).g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1.l_2$

7. Trước hết ta chỉ ra $\dfrac{1}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{l_2}$

Vì $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2 \ne 0 \Rightarrow |g(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l_2| > 0$. Theo định lí 1 về tính thứ tự của giới hạn thì $\exists \eta_1 > 0, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |g(x)| > \dfrac{|l_2|}{2}$

$$\forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta_1 \Rightarrow 0 < \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)|.|l_2|} \le \frac{2|g(x) - l_2|}{|l_2|^2}$$

Vì $|g(x)-l_2| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Vậy $\dfrac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{l_2}$.

Áp dụng 6. với $\dfrac{f}{g} = f.\dfrac{1}{g}$

Định lí 2 (Trường hợp giới hạn vô hạn):

1. Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và $g(x) \geq m$ trong lân cận của a thì $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$
2. Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và $g(x) \geq m > 0$ trong lân cận của a thì $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Chứng minh:

1. $\forall A > 0, \exists \eta, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A - m$

$\Rightarrow f(x)+g(x) > A$. Tức là $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

2. $\forall A > 0, \exists \eta, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \dfrac{A}{m}$

$\Rightarrow f(x).g(x) > \dfrac{A}{m}.m = A$. Tức là $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Chú ý: - Định lí trên đúng cho trường hợp $a = +\infty, a = -\infty$

- Có sự tương tự cho định lí 2 khi $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

F. Giới hạn của hàm hợp

Cho $f: \quad X \to R, \quad g: \quad Y \to R$ và $f(X) \subset Y$

Định lí: Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ và $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l$ thì $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} l$

Chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall y: \quad 0 < |y-b| < \eta \Rightarrow |g(y)-l| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_\eta, \forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta_\eta \Rightarrow |f(x)-b| < \eta$$

Chứng tỏ: $\forall x: \quad 0 < |x-a| < \delta_\eta \Rightarrow |g(f(x))-l| < \varepsilon$.

Vậy $\quad g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} l$

G. Giới hạn của hàm đơn điệu

Định lí 1: Cho $f: \ (a,b) \to R, \quad a,b \in R$ hoặc $a,b \in \overline{R}$ và là hàm tăng.

1. Nếu f bị chặn trên thì $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$

2. Nếu f không bị chặn trên thì $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

Chứng minh:

1. Gọi $l = \underset{(a,b)}{Sup} f(x)$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi \in (a,b)$ để $l - \varepsilon < f(\xi) \le l$

Do $f(x)$ tăng nên:

$\forall x \in (a,b):\quad \xi \le x \Rightarrow f(\xi) \le f(x) \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \le l \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Hay $|f(x) - l| < \varepsilon$

Giả sử $b \in R$. Đặt $\eta > b - \xi > 0, \forall x:\quad 0 < b - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Chứng tỏ $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} l$

Giả sử $b = +\infty$. Lấy $A > \xi, \forall x > A > \xi \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Chứng tỏ $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} l$

2. $\forall A \in R, \exists \xi \in (a,b) \Rightarrow f(\xi) > A$.

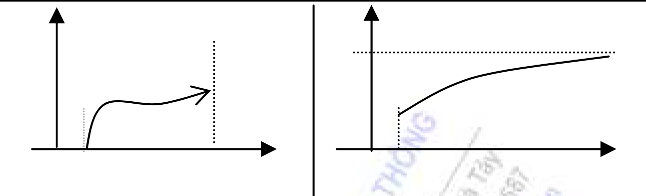
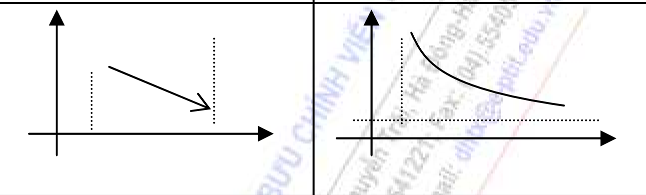
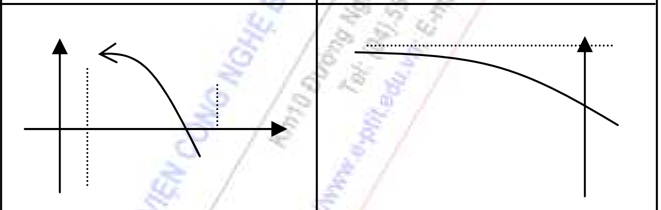
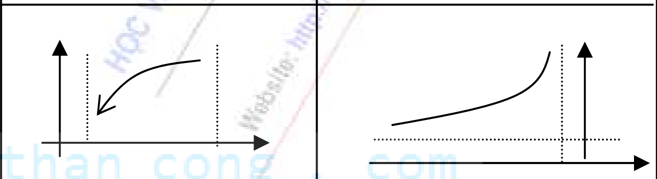
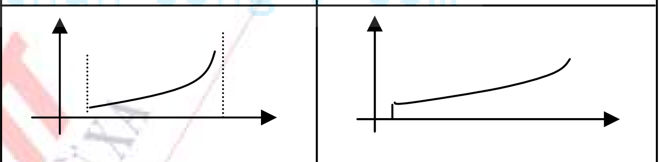
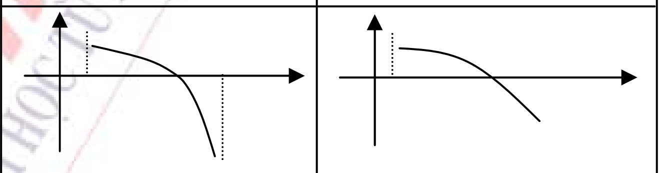
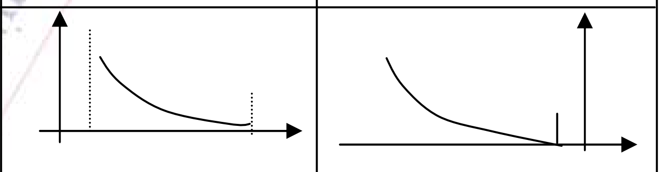
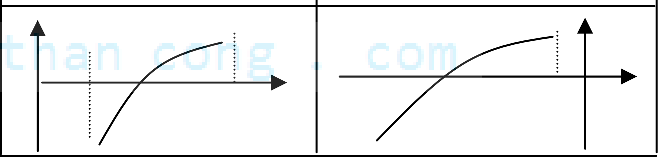
Vậy $\forall x \in (a,b)$ sao cho $x \ge \xi \Rightarrow f(x) \ge f(\xi) > A$.

$f(x) > A$ chứng tỏ $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$

Với $b = +\infty$, xét tương tự như trên

Chú ý:

- Nếu b hữu hạn, định lí trên nói về giới hạn trái tại b.
- Từ định lí suy ra: mọi hàm tăng trên (a,b) luôn có giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn tại b.
- Định lí 1 có thể suy diễn cho trường hợp $f(x)$ giảm trên (a,b). Kết quả trong các trường hợp được mô tả trên hình 2.10.

$f:(a,b)\to R$	Kết luận	Đồ thị
Tăng và bị chặn trên	$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} \underset{(a,b)}{Sup} f(x)$	
Giảm và bị chặn dưới	$f(x)\xrightarrow[x\to b]{} \underset{(a,b)}{Inf} f(x)$	
Giảm và bị chặn trên	$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} \underset{(a,b)}{Sup} f(x)$	
Tăng và bị chặn dưới	$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} Inf f$	
Tăng và không bị chặn trên	$f(x)\xrightarrow[x\to b]{} +\infty$	
Giảm và không bị chặn dưới	$f(x)\xrightarrow[x\to b]{} -\infty$	
Giảm và không bị chặn trên	$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} +\infty$	
Tăng và không bị chặn dưới	$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} -\infty$	

H.2.10

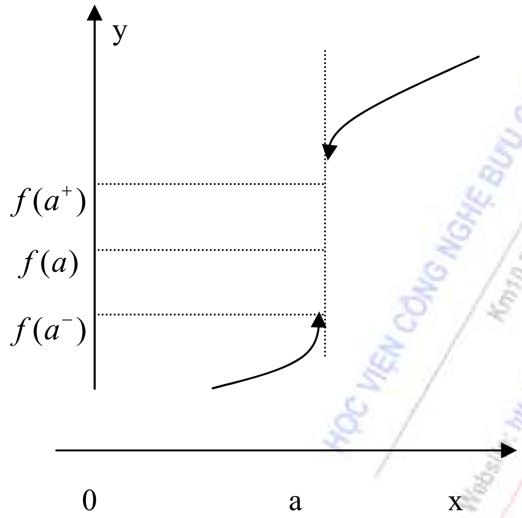
Định lí 2: Nếu $f(x)$ xác định tại a và tăng ở lân cận của a thì luôn tồn tại một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn tại a và: $\lim_{x\to a} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x)$

Chứng minh:

Rõ ràng: $f(x)$ tăng và bị chặn trên bởi $f(a)$ ở lân cận bên trái của a.

$f(x)$ tăng và bị chặn dưới bởi $f(a)$ ở lân cận bên phải của a.

Theo định lí 1, chúng ta nhận được kết quả cần chứng minh. Ta có kết quả tương tự khi f giảm. Hình 2.11. mô tả định lí 2.



H.2.11

2.2.3. Các giới hạn đáng nhớ

A. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad (2.1)$$

Chứng minh: Dễ dàng thấy được $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$

thì có bất đẳng thức kép: $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Dùng định nghĩa chứng minh được $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Vậy suy ra công thức (2.1)

B. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (2.2)$$

Chứng minh:

$$\forall x\in R_+^*\setminus\{0,1\},\exists n\in N^* \text{ sao cho } n\le x\le n+1\Rightarrow \frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

Suy ra $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Theo ví dụ 10. ở chương 1 và tính chất đại số của dãy hội tụ thì:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\to e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)\to e$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}e$. Thực hiện phép biến đổi $x=-y$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=e$$

Tổng quát nếu $u(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$ thì $(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\xrightarrow[x\to a]{}e$ và $\frac{\sin u(x)}{u(x)}\to 1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ (2.3)

Chứng minh: Vì lnx tăng trên R_+^* nên tại $+\infty$ hàm số có giới hạn hữu hạn hoặc là $+\infty$.

Giả sử có giới hạn hữu hạn l thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=l=\lim\limits_{x\to\infty}\ln 2x$.

Tuy nhiên $\ln 2x=\ln 2+\ln x\to l=l+2$ vô lý.

Vậy $\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.\quad \forall x\in R_+^*,\quad \ln x=-\ln\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}-\infty$

Ví dụ 1: Chứng minh: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0,\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

Giải:

$\forall\varepsilon>0$ (ε bé) $\forall x\in\Omega_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ có $|\sin x|<|x|$.

Lấy $\eta=\varepsilon,\forall x:\quad 0<|x|<\varepsilon\Rightarrow|\sin x|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ để $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|x|>\frac{1}{\varepsilon}=A$

Vậy $\exists A\in R_+^*,\forall x:\quad |x|>A\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Chứng tỏ $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}},\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Giải:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\frac{2(x-4).(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4).(\sqrt{2x+1}+3)}\xrightarrow[x\to 4]{}\frac{2.2\sqrt{2}}{2.3}=\frac{2}{3}.\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x\;+1}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

Giải:

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\frac{(\cos x-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{9}{2}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4$$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x\;-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Giải:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)^{\left(-\frac{1+x^2}{2}\right).\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)}\xrightarrow[x\to\infty]{}\mathrm{e}^{-2}$$

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e$$

D. Sự tồn tại giới hạn của các hàm sơ cấp

Định lí: Hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

2.3. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ (VCB) VÀ ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG LỚN (VCL)

2.3.1. Đại lượng VCB

A. Định nghĩa:

Ánh xạ α : $X\to R$, gọi là đại lượng VCB tại a nếu như $\alpha(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$, a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$

Hệ quả: Để tồn tại $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ điều kiện cần và đủ là hàm số $\alpha(x)=f(x)-l$ là VCB tại a.

B. Tính chất đại số của VCB

Dựa vào tính chất đại số của hàm có giới hạn, nhận được tính chất đại số của các VCB sau đây:

1. Nếu $\alpha_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCB tại a thì tổng $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$, tích $\prod_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ cũng là VCB tại a

2. Nếu $\alpha(x)$ là VCB tại a, $f(x)$ bị chặn trong lân cận của a thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB tại a.

C. So sánh các VCB

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB tại a.

1. Nếu $\frac{\alpha}{\beta}\xrightarrow[x\to a]{}0$ thì nói rằng α là VCB cấp cao hơn β tại a, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$ tại a, cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α tại a.

2. Nếu $\frac{\alpha}{\beta}\xrightarrow[x\to a]{}c \neq 0$ thì nói rằng α, β là các VCB ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$ thì nói rằng α, β là các VCB tương đương tại a. Khi đó kí hiệu $\alpha \sim \beta$ tại a.

Rõ ràng nếu α, β ngang cấp tại a thì $\alpha \sim c\beta$ tại a.

3. Nếu $\gamma = o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α tại a

4. Nếu $\gamma \sim c\alpha^k$ $(c \neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α tại a

Hệ quả 1: Nếu $\gamma \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$ tại a thì $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Hệ quả 2: Nếu $\alpha = o(\beta)$ tại a thì $\alpha + \beta \sim \beta$ tại a .

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao:

Nếu α^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB α_i, $\left(i = \overline{1,m}\right)$

và β^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB β_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ tại a . Khi đó:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

Chú ý: Các VCB đáng nhớ là:

1. $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \alpha > 0$

2. $a^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0, (a>1)$ $\quad$ $a^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0, (0<a<1)$

3. $shx \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$ $\quad$ $thx \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$ $\quad$ $Argthx \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

4. $Sinx \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$ $\quad$ $tgx \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$ $\quad$ $\arcsin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

5. $arctg \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

2.3.2. Đại lượng VCL

A. Định nghĩa

Ánh xạ A: $X \to R$ gọi là đại lượngVCL tại a nếu như $A(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ hoặc $-\infty$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Hệ quả: Để $A(x)$ là VCL tại a thì cần và đủ là $\alpha(x) = \dfrac{1}{A(x)}$ là VCB tại a.

B. Tính chất của VCL

1. Nếu $A_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL cùng dấu $(+\infty)$ hay $(-\infty)$ tại a thì tổng $\sum_{i=1}^{n} A_i(x)$ là VCL mang dấu đó tại a.

Nếu $B_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL tại a thì tích $\prod_{i=1}^{n} B_i(x)$ là VCL tại a

2. Nếu $A(x)$ là VCL tại a và $f(x)$ giữ nguyên dấu tại a và lân cận của nó thì $A(x).f(x)$ là VCL tại a.

C. So sánh các VCL

Cho $A(x), B(x)$ là các VCL tại a

1. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \infty$ thì nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a, hay B là VCL có cấp thấp hơn A tại a

2. Nếu $\dfrac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x\to a]{} c \neq 0$ thì nói rằng A, B là VCL ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương tại a, kí hiệu $A \sim B$ tại a.

Hệ quả 1: Nếu $A \sim A_1, B \sim B_1$ tại a thì $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Hệ quả 2: Nếu $A(x)$ làVCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a thì $A + B \sim A$.

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ cácVCL cấp thấp:

Nếu A^* là các CVL cấp cao nhất trong số các VCL $A_i(x), i = 1,2,...,m$ và B^* là VCL cấp cao nhất trong số các VCL $B_j(x), j = 1,2,...,n$ tại a thì ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum_{i=1}^{m} A_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} B_j(x)} = \lim_{x\to a}\frac{A^*(x)}{B^*(x)}$$

Chú ý: Các VCL sau đây thường hay dùng:

1. $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \quad (\alpha > 0)$
2. $a^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, (a > 1)$ $\qquad a^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty, (0 < a < 1)$
3. $\log_a x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, (a > 1)$ $\qquad \log_a x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty, (0 < a < 1)$
4. $\log_a x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty, (a > 1)$ $\qquad \log_a x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty, (0 < a < 1)$
5. $chx \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$ $\qquad \text{shx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$ $\qquad shx \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
6. $\coth x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty,$ $\qquad \coth x \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x\to 0}\left(\sin x.\cos\frac{1}{x}\right)$, $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

Giải:

$$Sinx \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x.\cos\frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, |\sin x| \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x - x^3}{\sin^2 x}$

Giải:

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2x \sim 2x\\ \sin 4x \sim 4x\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$tg^2 x \sim x^2, \sin^2 x \sim x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x - x^3}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ví dụ 3: Tìm $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2}$, $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}$, $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Giải: $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

2.4. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

2.4.1. Các khái niệm cơ bản

A. Hàm liên tục tại một điểm

Cho $f: \quad X\to R$ và $a\in X$. Nói rằng $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \text{hay} \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)$$

Tức là $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x: \qquad |x-a|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

B. Hàm liên tục một phía tại a

Cho $f: \quad X\to R, a\in X$. Nói rằng hàm f liên tục bên trái tại a nếu

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a^-)=f(a)$$

Hàm f liên tục bên phải tại a nếu

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a^+)=f(a)$$

Hệ quả: Để hàm $f(x)$ liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:

$$f(a^-)=f(a^+)=f(a)$$

C. Hàm liên tục trên một khoảng

1. Hàm $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x\in X$ thì nói rằng nó liên tục trên tập X.

2. Hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b,liên tục phải tại a nói rằng nó liên tục trên [a,b]

D. Hàm liên tục từng khúc

Hàm $f: \qquad [a,b]\to R, \qquad a,b\in R.$

Nói rằng hàm f liên tục từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi $\exists n\in N^*$ và $(a_0,a_1,...,a_n)\in[a,b]^{n+1}$ sao cho $a=a_0<a_1<...<a_n=b$ và f liên tục trên tất cả các khoảng mở $(a_i,a_{i+1}), i=0,1,...,n-1$ và có giới hạn phải hữu hạn tại a_i, có giới hạn trái hữu hạn tại a_{i+1}

E. Điểm gián đoạn của hàm số

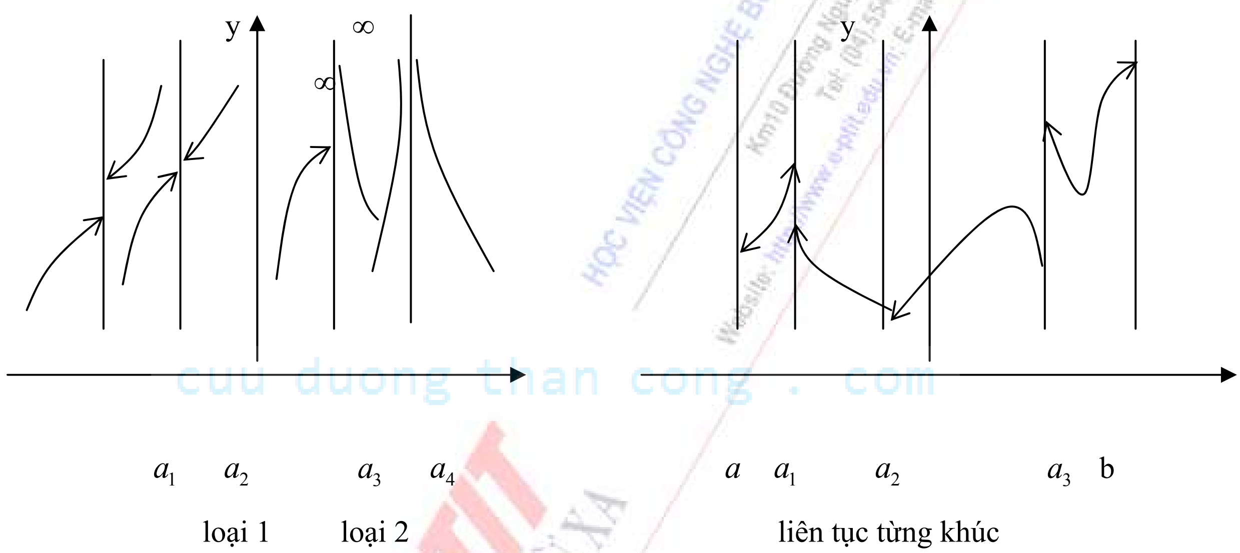
1. Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x=a$.

2. Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Hệ quả: Nếu $f(x)$ tăng (giảm) ở lân cận điểm a khi đó $f(x)$ liên tục tại a khi và chỉ khi $h_f(a) = 0$. Điều này suy ra từ định lí 2 của hàm số đơn điệu.

3. Nếu a là điểm gián đoạn của $f(x)$ và không phải là điểm gián đoạn loại 1 thì nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $x = a$.

Các định nghĩa trên được mô tả trên hình 2.12.



H.2.12

2.4.2. Các phép toán đại số của hàm liên tục

Định lí 1: Cho $f, g: \quad X \to R, \qquad a \in X, \lambda \in R$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $|f(x)|$ liên tục tại a.

2. Nếu $f(x), g(x)$ cùng liên tục tại a thì $f(x) + g(x)$ liên tục tại a.

3. Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $\lambda f(x)$ liên tục tại a.

4. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a thì $f(x).g(x)$ liên tục tại a.

5. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a và $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại a.

Chú ý:

- Định lí trên được phát biểu tương tự cho các hàm liên tục trên cùng khoảng X

- Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại a thì $Sup(f,g)$ và $Inf(f,g)$ cũng liên tục tại a.

Với $Sup(f,g): X \to R$ $\quad\quad$ $Inf(f,g): X \to R$

$$x \mapsto Sup(f(x), g(x)) \quad\quad x \mapsto Inf(f(x), g(x))$$

Thật vậy $\quad Sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f + g|)$

$$Inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f + g|)$$

Chứng minh định lí 1 tương tự như chứng minh định lí về các phép toán đại số của hàm có giới hạn hữu hạn.

Định lí 2: Cho $f: X \to R; a \in X$, $g: Y \to R$ và $f(X) \subset Y$. Nếu $f(x)$ liên tục tại a và $g(y)$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại a.

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí về giới hạn của hàm hợp.

Chú ý:

- Định lí 2 cũng được phát biểu tương tự cho f liên tục trên X và g liên tục trên Y.
- Sử dụng định lí 2, nhận được các giới hạn quan trọng dưới đây:

Vì khi thỏa mãn định lí 2 thì $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$ do đó:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad\quad (2.4)$$

Đặc biệt $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad\quad (2.5)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (0 < a \neq 1) \quad\quad (2.6)$$

Thật vậy gọi $y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(y+1)$. Theo (2.4) sẽ có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad\quad (2.7)$$

Gọi $y = (x+1)^\alpha - 1 \Rightarrow \alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{y}{\ln(y+1)} \frac{\alpha \ln(x+1)}{x} \right) = \alpha$$

Từ trên dễ dàng nhận được định lý sau:

Định lý 3: Mọi hàm số sơ cấp xác định tại $x = a$ thì liên tục tại a.

2.4.3 Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Cho $f: \ [a,b] \to R$ là liên tục, $a < b$.

A. Tính trù mật của hàm số liên tục

Định lí 1: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = 0$

Chứng minh: Thực hiện phương pháp chia đôi đoạn $[a,b]$. Nếu trong quá trình chia đôi tìm được điểm c sẽ dừng lại. Nếu không tìm được c thì nhận được dãy các đoạn lồng nhau $([a_n,b_n])$ trong đó $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ và $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(c) \le 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(c) \ge 0$

trong đó $c \in (a,b)$. Vậy $f(c) = 0$.

Định lí 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ khi đó $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ nghĩa là:

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a,b], f(c) = \gamma$$

Chứng minh :

Định lí là đúng với $\gamma = f(a)$ hoặc $\gamma = f(b)$.

Giả sử $f(a) < f(b)$ và xét $f(a) < \gamma < f(b)$. Đặt $g(x) = f(x) - \gamma$ liên tục trên $[a,b]$ và $g(a) < 0, g(b) > 0$. Theo định lí 1 thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $g(c) = 0$ hay $f(c) = \gamma$.

B. Tính bị chặn của hàm số liên tục

Định lí 3: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$ nghĩa là:

$$\exists x_m, x_M \in [a,b], \quad \forall x \in [a,b] \text{ có } f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

Chứng minh :

Trước hết chứng minh $f(x)$ bị chặn trong $[a,b]$. Giả sử $f(x)$ không bị chặn, tức là: $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b] \Rightarrow |f(x_n)| \ge n$

(x_n) bị chặn nên theo định lí Bolzano-Weierstrass tồn tại dãy con của nó

$$(x_{n_k}) \to x_0 \in [a,b] \Rightarrow \left|f(x_{n_k})\right| \ge n_k.$$

Chuyển qua giới hạn sẽ có $|f(x_0)| = +\infty$. Vô lí vì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Gọi $m = \mathop{Inf}\limits_{[a,b]} f(x)$ và $M = \mathop{Sup}\limits_{[a,b]} f(x)$.

Lấy $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in N^*, \exists x_n \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{n} > f(x_n) - m \geq 0$ .Theo định lí Bolzano-Weierstrass

$\exists (x_{n_k})$ là dãy con của (x_n) và $\begin{cases} x_{n_k} \to x_m \in [a,b] \\ \frac{1}{n_k} > f(x_{n_k}) - m \geq 0 \end{cases}$

Qua giới hạn sẽ có $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_m) = m$

Tương tự $\exists x_M$ để $f(x_M) = \underset{[a,b]}{Sup} f(x) = M$

Hệ quả: Nếu $f: \ [a,b] \to R$ liên tục thì $f([a,b]) = [m,M] \subset R$

Trong đó $m = \underset{[a,b]}{Inf} f(x), \qquad M = \underset{[a,b]}{Sup} f(x)$

2.4.4 Tính liên tục đều

A. Định nghĩa: Cho $f: \ X \to R$. Nói rằng f liên tục đều trên X nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x'') \in X^2 : \quad |x' - x''| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Chú ý rằng trong định nghĩa này số $\eta \in R$ không phụ thuộc vào x' và x'', nó khác với tính liên tục của hàm f tại a, ở đó η có thể phụ thuộc vào a.

Hệ quả: Nếu $f(x)$ liên tục đều trên X thì liên tục trên X.

Điều này là hiển nhiên, vì lấy $a = x'$ bất kì thì điều kiện $f(x)$ liên tục tại a là thoả mãn.Tuy nhiên, một hàm số $f(x)$ liên tục trên X có thể không liên tục đều trên X

chẳng hạn xét hàm số $f: \ R \to R$ cho bởi $f(x) = x^2$. Thật vậy

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x', x'') \in R^2 \text{ sao cho } |x' - x''| < \eta \text{ và } |x'^2 - x''^2| \geq \varepsilon$$

Lấy $x'' \in R_+, x' = x'' + \frac{1}{2}\eta$ khi đó $|x' - x''| = \frac{1}{2}\eta$ và $|x'^2 - x''^2| = \eta x'' + \frac{1}{4}\eta^2 \geq \varepsilon$

nếu lấy $x'' = \frac{\varepsilon}{\eta}$. Cụ thể chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}, x'' = \frac{1}{2\eta}$ và $x' = \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{2}\eta$

Định lí Hâyne (Heine)

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$, $a,b \in R$ thì liên tục đều trên $[a,b]$.

Chứng minh :

Chúng ta lập luận phản chứng như sau: Giả sử $f(x)$ không liên tục đều , tức là

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x', x'') \in [a,b]^2 \text{ để có } |x' - x''| < \eta \text{ và } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

$\forall n \in N^*$, lấy $\eta = \frac{1}{n}, \exists (x'_n, x''_n) \in [a,b]^2$

sao cho $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(x'_n) - f(x''_n)| \ge \varepsilon$

Vì (x'_n) bị chặn nên tồn tại dãy con (x'_{n_k}) hội tụ về $c \in [a,b]$, có tương ứng dãy con (x''_{n_k}) đương nhiên bị chặn.

Vậy tồn tại một dãy con của nó $(x''_{n_{k_j}})$ hội tụ về $c \in [a,b]$.

Rõ ràng $\left|x'_{n_{k_j}} - x''_{n_{k_j}}\right| < \frac{1}{n}$ và qua giới hạn suy ra c=d đồng thời:

$\left|f(x'_{n_{k_j}}) - f(x''_{n_{k_j}})\right| \ge \varepsilon$ .Qua giới hạn, do tính liên tục suy ra

$|f(c) - f(c)| \ge \varepsilon$. Vô lý.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục đều trên khoảng $[0,+\infty)$

Giải:

Lấy $x_0 > 0$, hàm số liên tục đều trên $[0, x_0]$

Lấy x_1, x_2 tuỳ ý trên $[x_0,+\infty)$, $x_1 < x_2$

Ta có $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{x_0}} < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 2\varepsilon\sqrt{x_0}, \quad \forall x_1, x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Vậy liên tục đều trên $[x_0,+\infty)$.

Hợp hai khoảng lại ta nhận được $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục đều trên $[0,+\infty)$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = \cos^2 x$ không liên tục đều trên $[0,+\infty)$

Giải: Ta phải chỉ ra

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta, \exists x_1, x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| < \delta$ mà $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$

Thật vậy: $\forall \delta > 0, \exists k_\delta, x_{1_k} = \sqrt{2k\pi}, x_{2_k} = \sqrt{(2k+1)\pi} \in R$

$$x_{2_k} - x_{1_k} = \sqrt{(2k+1)\pi} - \sqrt{2k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(2k+1)\pi} + \sqrt{2k\pi}} < \frac{\pi}{\sqrt{2k\pi}} < \delta$$

(Lấy $k > \frac{\pi}{2\delta^2}$) $\Rightarrow \left|\cos x_{2_k}^2 - \cos x_{1_k}^2\right| = 2$ (lấy $\varepsilon = 2$).

CHƯƠNG III: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.1. ĐẠO HÀM

Từ nay về sau (đến hết mục 3.8) luôn kí hiệu $f: X \to R$, $X \neq \phi$ và X không thu về một điểm, tức là X là khoảng nào đó trên R, và R^X là tập các ánh xạ đã nói ở trên, còn C_f là đồ thị của hàm số f.

3.1.1. Đạo hàm tại một điểm

3.1.1.1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho $a \in X, a+h \in X, f \in R^X$. Nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này thường kí hiệu $f'(a)$ hay $\frac{df}{dx}(a)$ gọi là đạo hàm của f tại a.

Tỉ số $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ gọi là tỉ số của các số gia hàm số và số gia đối số.

3.1.1.2. Định nghĩa đạo hàm một phía

1. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_p'(a)$, gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Giới hạn này kí hiệu là $f_t'(a)$, gọi là đạo hàm trái của f tại a.

Hệ quả 1: Để f khả vi tại a điều kiện cần và đủ là f khả vi trái và phải tại a đồng thời $f_t'(a) = f_p'(a) = f'(a)$

Hệ quả 2: (điều kiện cần của hàm khả vi)

Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a

Chứng minh: Lấy $h \in R^*$ để $a+h \in X$

rõ ràng $f(a+h) = f(a) + h.\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

mà $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a) \Rightarrow f(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(a)$

chứng tỏ f liên tục tại a.

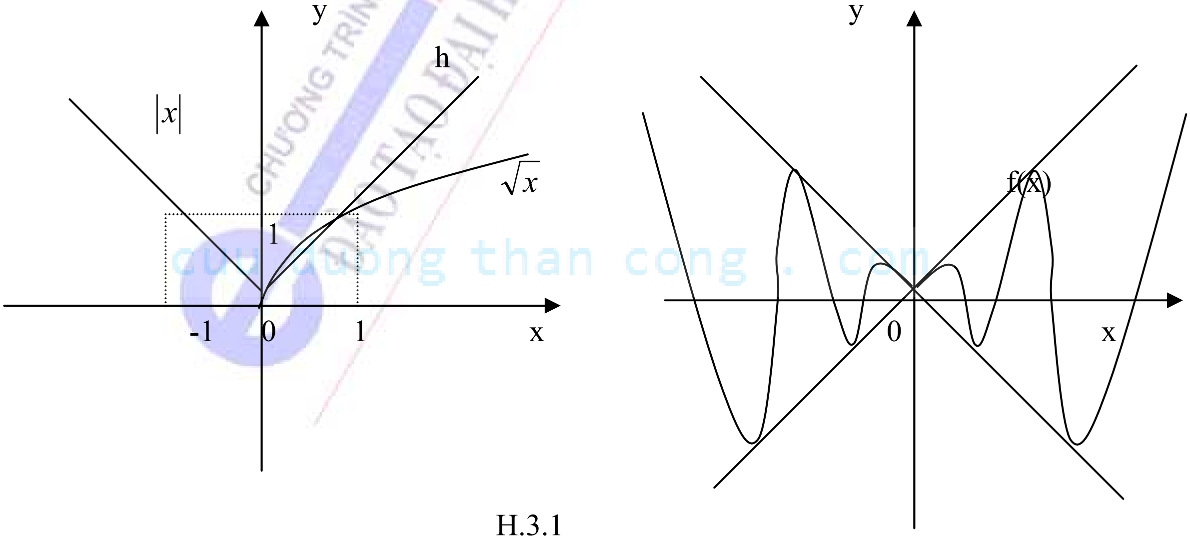
Chú ý:

1. f có thể liên tục tại a nhưng không khả vi tại a chẳng hạn các hàm dưới đây và đồ thị của chúng trên hình 3.1. mô tả điều đó

- $f \in R^R$ cho bởi $f(x) = |x|$. liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì $\dfrac{|h|}{h}$ không có giới hạn khi $h \to 0$, ở đây ta thấy $f_t'(0) = -1 \neq 1 = f_p'(0)$
- $f \in R^{R_+}$ cho bởi $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 vì với $h \in R_+^*$ $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$
- $f \in R^R$ cho bởi $f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

liên tục tại 0 vì $|f(x)| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ nhưng không khả vi vì

$$\frac{h.\sin\frac{1}{h}}{h} = \sin\frac{1}{h} \text{ không có giới hạn khi } h \to 0$$



H.3.1

2. Nếu f khả vi phải (hoặc trái) tại a thì f liên tục phải (hoặc trái) tại a.

3. Nếu f khả vi phải và trái tại a thì f liên tục tại a.

3.1.1.3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu f khả vi tại a thì tồn tại tiếp tuyến của đồ thị C_f tại điểm $A(a, f(a))$. Tiếp tuyến này không song song với trục 0y và có hệ số góc là $f'(a)$.

Trường hợp f không khả vi tại a mà tồn tại $f_t'(a)$ và $f_p'(a)$. Lúc đó gọi điểm $A(a, f(a)) \in C_f$ là điểm góc của C_f,và hai bán tiếp tuyến tại A không song song với nhau.

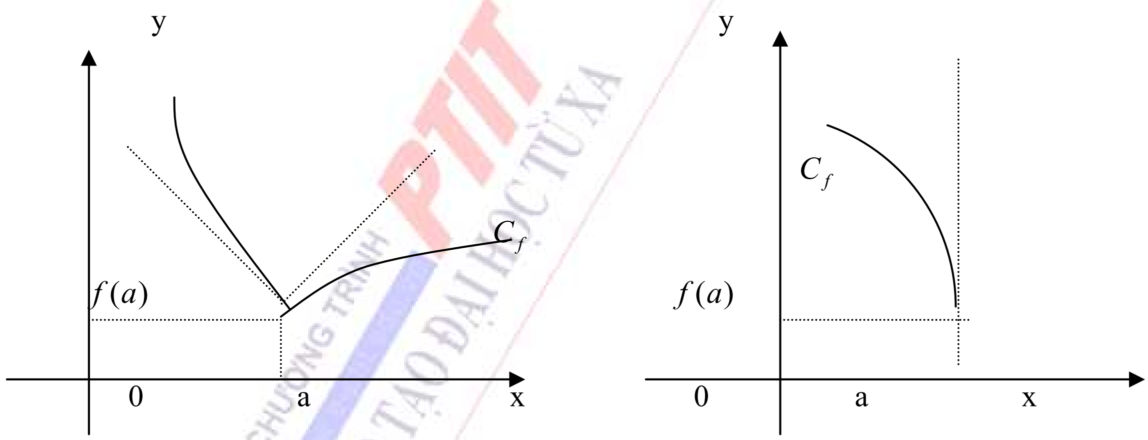
Trường hợp f không khả vi tại a nhưng có

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty \text{ hoặc } -\infty$$

hoặc $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} +\infty \text{ hoặc } -\infty$$

thì tại $A(a, f(a))$ đường cong C_f có một bán tiếp tuyến song song với 0y.

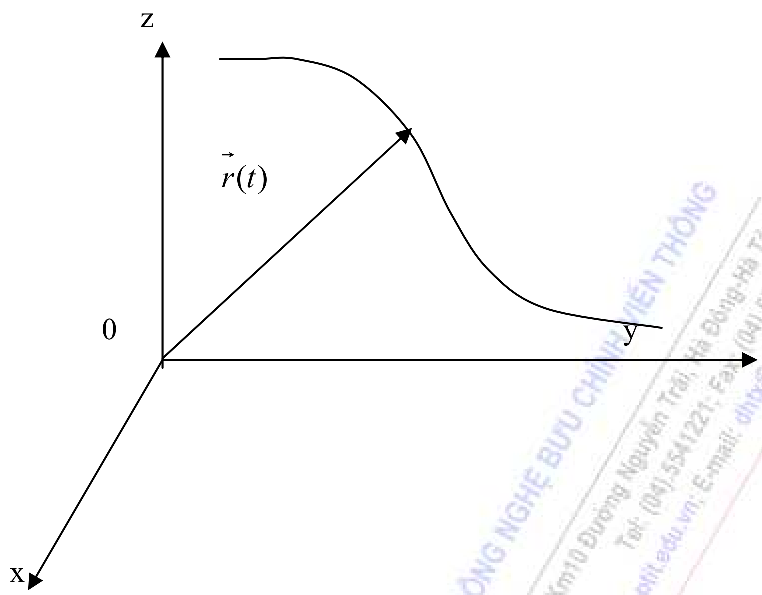
Hình 3.2. mô tả các nội dung trên.



H.3.2

3.1.1.4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Cho chất điểm chuyển động tại thời điểm t được định vị bởi véc tơ bán kính $\vec{r}(t)$ (Xem hình 3.3.)



H.3.3

Gọi $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là phương trình chuyển động của chất điểm.

Giả sử tại thời điểm t_1, t_2 véc tơ bán kính của chất điểm là $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$

Gọi $\overrightarrow{v_{TB}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$ là vận tốc trung bình từ thời điểm t_1 đến t_2

Vận tốc tức thời $\vec{v}(t_1)$ của chất điểm tại thời điểm t_1 sẽ là giới hạn của tỉ số trên khi $t_2 - t_1 \to 0$

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{\vec{r}}(t_1)$$

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm chính bằng đạo hàm của véc tơ bán kính theo thời gian t.

3.1.2. Các phép tính đại số của các hàm khả vi tại một điểm

Định lí 1: Cho f và g khả vi tại a khi đó

1. $f + g$ khả vi tại a và $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $\forall \lambda \in R, \lambda f$ khả vi tại a và $(\lambda f)'(a) = \lambda . f'(a)$
3. $f.g$ khả vi tại a và $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$
4. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}$

Chứng minh :

1.
$$\frac{1}{h}\big((f+g)(a+h)-(f+g)(a)\big)=\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)+\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big)\xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)+g'(a)$$

2. $$\frac{1}{h}\big((\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)\big)=\lambda\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)\xrightarrow[h\to 0]{}\lambda f'(a)$$

3. $$\frac{1}{h}\big((fg)(a+h)-(fg)(a)\big)=\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big).g(a+h)+f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)$$

$$=\left(\frac{1}{h}\big(f(a+h)-f(a)\big)\right).g(a+h)+f(a)\left(\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big)\right)\xrightarrow[h\to 0]{} f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$$

do $g(a+h)\xrightarrow[h\to 0]{} g(a)$ vì g khả vi tại a.

4. Trước hết chứng minh $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$g(x)$ liên tục tại a và $g(a)\neq 0$ vậy g khác không trong một lân cận của a, do đó tồn tại hàm $\frac{1}{g}$ xác định ở lân cận của a, với h đủ bé thì

$$\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}\right)=-\frac{1}{h}\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$=-\frac{1}{h}\big(g(a+h)-g(a)\big).\frac{1}{g(a+h)g(a)}\to -g'(a).\frac{1}{g^2(a)}$$

suy ra

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a).\frac{1}{g(a)}+f(a).\frac{-g'(a)}{g^2(a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Định lí 2: (Đạo hàm của hàm hợp).

Cho $a\in X,\ f:X\to R,\ g:Y\to R$ với $f(X)\subset Y$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì hàm hợp gof khả vi tại a và

$$(gof)'(a)=g'\big(f(a)\big).f'(a). \qquad (3.1)$$

Chứng minh:

Lấy $h\in R$ tuỳ ý sao cho $a+h\in X$. Đặt

$$\varepsilon_1(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{nếu } h \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } h = 0 \end{cases}$$

suy ra $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$

$$\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Lấy $k \in R$ tuỳ ý sao cho $f(a) + k \in Y$. Đặt

$$\varepsilon_2(k) = \begin{cases} \dfrac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} - g'(f(a)) & \text{nếu } k \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } k = 0 \end{cases}$$

suy ra $g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + k\varepsilon_2(k)$

$$\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$$

$\forall h \in R$ sao cho $a + h \in X$ sẽ có

$$(gof)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$$

$$= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$$

$$= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon(h)$$

trong đó $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(h)).\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h))$

vì $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$ suy ra $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Dẫn đến

$$\frac{(gof)(a+h) - (gof)(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(a).g'(f(a))$$

Định lí 3: (Đạo hàm của hàm ngược).

Giả sử $f : X \to R$ đơn điệu ngặt và liên tục trên X khả vi tại $a \in X$ và $f'(a) \neq 0$

Khi đó hàm ngược của f là $f^{-1} : f(X) \to R$ khả vi tại $f(a)$ và

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad (3.2)$$

Chứng minh: Theo giả thiết tồn tại song ánh f vậy tồn tại hàm ngược f^{-1} liên tục trên $f(X)$.

$\forall y \in f(X) \setminus \{f(a)\}$ chúng ta xét

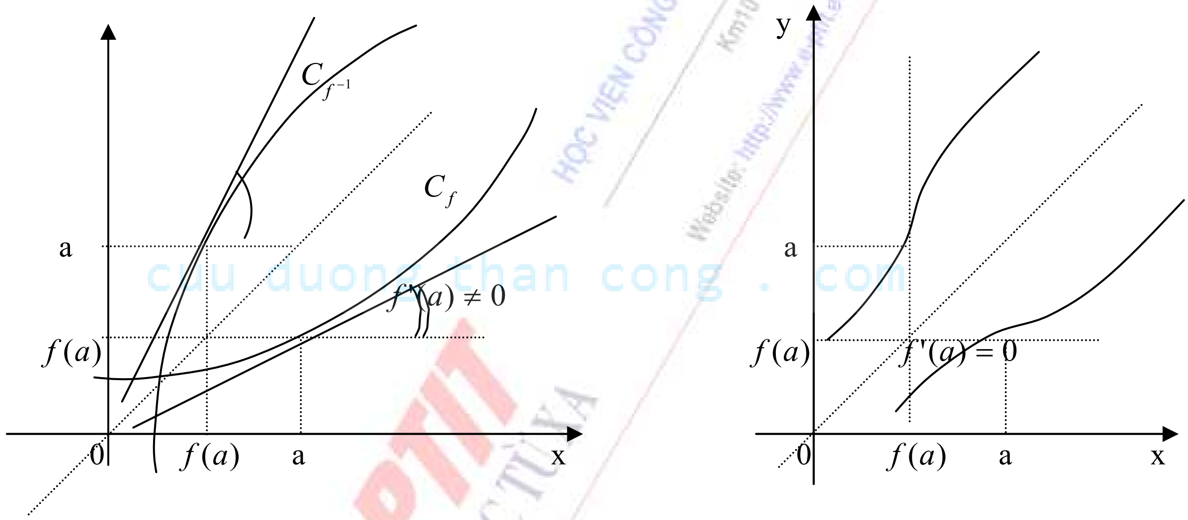
$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}\big(f(a)\big)}{y-f(a)}=\frac{1}{\dfrac{y-f(a)}{f^{-1}(y)-a}}\to\frac{1}{f'(a)}$$

nếu $f'(a)\neq 0$

Chứng tỏ f^{-1} khả vi tại $f(a)$ và $\left(f^{-1}\right)'\big(f(a)\big)=\dfrac{1}{f'(a)}\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'\big(f(a)\big).f'(a)=1$

Nếu gọi $C_{f^{-1}}$ là đồ thị của hàm f^{-1} thì các tiếp tuyến tại $A\big(a,f(a)\big)\in C_f$ và $A'\big(f(a),a\big)\in C_{f^{-1}}$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III

Hình 3.4. mô tả điều đó



H.3.4

3.1.3. Đạo hàm trên một khoảng (ánh xạ đạo hàm)

A. Định nghĩa: Cho $f\in R^X$ khả vi tại mỗi điểm $x\in(a,b)\subseteq R$

Kí hiệu ánh xạ $f':(a,b)\to R$

$$x\mapsto f'(x)$$

là ánh xạ đạo hàm hay đạo hàm của $f(x)$ trên (a,b) thường kí hiệu $f'(x)$ hay $\dfrac{df}{dx}(x),\forall x\in(a,b)$. Cũng nói rằng $f(x)$ khả vi trên $(a,b)\subseteq X$

B. Các tính chất

Các định lí dưới đây suy ra một cách dễ dàng từ các định lí ở mục 3.12.

Định lí 1: Cho $f, g : X \to R$ khả vi trên X, (tức là $(a,b) = X$) khi đó.

1. $f + g$ khả vi trên X và $(f+g)' = f' + g'$
2. $\forall \lambda \in R, \lambda f$ khả vi trên X và $(\lambda f)' = \lambda f'$
3. $f.g$ khả vi trên X và $(f.g)' = f'g + fg'$
4. $g(x) \neq 0$ trên X thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi trên X và $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Bằng một phép qui nạp đơn giản, nhận được:

Nếu $n \in N^*$ và $f_1, f_2, ..., f_n$ khả vi trên X thì

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \text{ khả vi trên } X \text{ và } \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'$$

$$\prod_{i=1}^{n} f_i \text{ khả vi trên } X \text{ và } \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 ... f_{k-1} f_k' f_{k+1} ... f_n$$

Định lí 2: Cho $f \in R^X$ và $g \in R^Y$. Nếu f khả vi trên X và g khả vi trên $f(X)$ thì gof khả vi trên X và

$$(gof)' = (g'of)f'$$

Mở rộng $(hogof)' = (h'ogof)(g'of)f'$

Định lí 3: Cho $f \in R^X$ đơn điệu ngặt trên X, khả vi trên X và $f'(x) \neq 0$ trên X khi đó f^{-1} khả vi trên $f(X)$ và

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

3.1.4. Đạo hàm của các hàm số thông thường

A. Hàm số mũ

Cho $f(x) = a^x$, $f : R \to R$

$$\frac{f(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a \text{ (nhờ vào công thức (2.6))}$$

Vậy hàm mũ khả vi trên R. Đặc biệt $(e^x)' = e^x$

B. Hàm số lôgarit

Cho $f(x) = \log_a x = y, f \in R^{R_+^*}$. Hàm ngược $x = a^y$

$$x' = a^y \ln a \Rightarrow y' = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Đặc biệt $y = \ln x$ thì $y' = \dfrac{1}{x}$

C. Hàm luỹ thừa

Cho $f(x) = x^{\alpha} = y, \alpha \in R, f \in R^{R_+^*}$ lấy logarit cả 2 vế sẽ có

$$\ln y = \alpha \ln x$$

Sử dụng đạo hàm của hàm hợp ta có

$$\frac{y'}{y} = \alpha \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Trường hợp $x \le 0$ tuỳ theo α để biểu thức $x^{\alpha-1}$ xác định thì ta vẫn có $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

D. Hàm lượng giác

Cho $f(x) = \sin x, f \in [-1,1]^R$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

Theo công thức (2.1) suy ra $\dfrac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1, \quad \dfrac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Vậy $\quad (\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in R$

Tương tự có thể chỉ ra $f(x) = \cos x$ cũng khả vi trên R

và $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow (\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

suy ra tgx khả vi trên $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ và

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

cotgx khả vi trên $R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$ và

$$(\cot gx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x).$$

E. Hàm lượng giác ngược

Cho $f(x) = \arccos x = y, f \in [0, \pi]^{[-1,1]}$ ta sẽ chứng minh $f(x)$ khả vi trên $(-1,1)$.

Thật vậy hàm ngược của nó $x = \cos y$. $x' = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y}$ vì $y \in (0,\pi)$

Vậy $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tương tự $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

F. Hàm cho theo tham số

Cho $f \in R^X$ dưới dạng tham số

$$x:(\alpha,\beta) \to X, \qquad y:(\alpha,\beta) \to R$$

Cụ thể $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad \text{với } t \in (\alpha,\beta) = T \end{cases}$

Nếu x, y khả vi trên T, tồn tại hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$ khả vi và $\varphi'(t)$ khác không trên T, thì theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược và hàm số hợp sẽ nhận được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{3.3}$$

G. Đạo hàm lôgarit

Nếu f có dạng tích của các nhân tử với số mũ cố định hoặc $f = u^v, u = u(x) > 0, v = v(x)$, thì ta có thể xét đạo hàm logarit của f tương tự như hàm luỹ thừa trong mục C hoặc hàm số mũ trong mục A Sau đó sử dụng định lí đạo hàm của hàm hợp.

Thật vậy $f(x) = u^\alpha v^\beta \omega^\gamma$ trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in R$ còn các hàm $u(x), v(x), \omega(x)$ khả vi trên X và luôn dương trên X. Khi đó.

$$\ln f(x) = \alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln \omega$$

$$\frac{f'}{f} = \alpha\frac{u'}{u} + \beta\frac{v'}{v} + \gamma\frac{\omega'}{\omega}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\alpha\frac{u'}{u} + \beta\frac{v'}{v} + \gamma\frac{\omega'}{\omega}\right) f(x)$$

Hoặc có thể biểu diễn

$$f(x) = e^{\alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln w}$$

Các cách tính đạo hàm thông qua công thức đạo hàm của hàm lôgarit gọi là đạo hàm lôga.

H. Bảng các đạo hàm của các hàm số thông dụng

$y = C = const \quad \forall x \in R \qquad y' = 0 \quad \forall x \in R$

$y = x^\alpha, \alpha \in R \quad \forall x \in X \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in X_1 \subset X$

$y = \sin x \quad \forall x \in R \qquad y' = \cos x \quad \forall x \in R$

$y = \cos x \quad \forall x \in R \qquad y' = -\sin x \quad \forall x \in R$

$y = tgx \quad \forall x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\} \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \quad \forall x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$

$y = \cot gx \quad \forall x \in R \setminus \{k\pi, k \in Z\} \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x) \quad \forall x \in R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$

$y = a^x \quad \forall x \in R \qquad y' = a^x \ln a \quad \forall x \in R$

$y = \log_a x \quad \forall x \in R_+^* \qquad y' = \frac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in R_+^*$

$y = \arcsin x \quad \forall x \in [-1,1] \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

$y = \arccos x \quad \forall x \in [-1,1] \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

$y = arctgx \quad \forall x \in R \qquad y' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R$

$y = arc\cot gx \quad \forall x \in R \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R$

$y = shx \quad \forall x \in R \qquad y' = chx \quad \forall x \in R$

$y = chx \quad \forall x \in R \qquad y' = shx \quad \forall x \in R$

$y = thx \quad \forall x \in R \qquad y' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x \quad \forall x \in R$

$y = \coth x \quad \forall x \in R \setminus \{0\} \qquad y' = -\frac{1}{sh^2 x} = 1 - \coth^2 x \quad \forall x \in R \setminus \{0\}$

Ví dụ 1: Hãy tính đạo hàm tại 0 của các hàm số sau (nếu có)

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$

3. $f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Giải:

1. $\dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h}=\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=h\sin\dfrac{1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0=f'(0)$

2. $\dfrac{f_2(h)-f_2(0)}{h}=\dfrac{h^{\frac{1}{3}}}{h}=\dfrac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\xrightarrow[h\to 0]{}+\infty$, $f_2(x)$ không khả vi tại 0

3. $\dfrac{f_3(h)-f_3(0)}{h}=\dfrac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\dfrac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\xrightarrow[h\to 0^+]{}+\infty$

$\xrightarrow[h\to 0^-]{}-\infty$, $f_3(x)$ không khả vi tại 0

Ví dụ 2: Cho $f\in R^X$ khả vi tại $a\in X$. Hãy tìm

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$$

Giải:

$$\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}=h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\to -f'(a)$$

Ví dụ 3: Chứng tỏ rằng $f\in R^R$ cho bởi biểu thức dưới đây không khả vi tại mọi $x\in R$

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{nếu } x\in Q\\ 3-x & \text{nếu } x\in R\setminus Q\end{cases}$$

Giải: Nhận thấy tập Q và R\Q đều trù mật lấy $x_0\in R$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in Q}}f(x)=x_0+1,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in R\setminus Q}}f(x)=3-x_0$$

Để liên tục tại x_0 thì $x_0+1=3-x_0\Leftrightarrow x_0=1$

Vậy hàm không khả vi tại $x\neq 1$

Xét $1+h\in Q$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h}{h}\xrightarrow[\substack{h\to 0\\ h\in Q}]{}1$

Xét $1+h\in R\setminus Q$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=-\dfrac{h}{h}\xrightarrow[\substack{h\to 0\\ h\in R\setminus Q}]{}-1$

Vậy không tồn tại $f'(1)$

Ví dụ 4: Cho f và g khả vi tại a tính

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$$

Giải:

Lập hàm số $h(x) = f(x)g(a) - f(a)g(x)$ khả vi tại a và $h(a) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a)$$

$$= f'(a)g(a) - g'(a)f(a)$$

Ví dụ 5: Vẽ đồ thị của hàm số và đạo hàm của hàm số sau đây.

1. $y = x|x|$
2. $y = \ln|x|$

Giải:

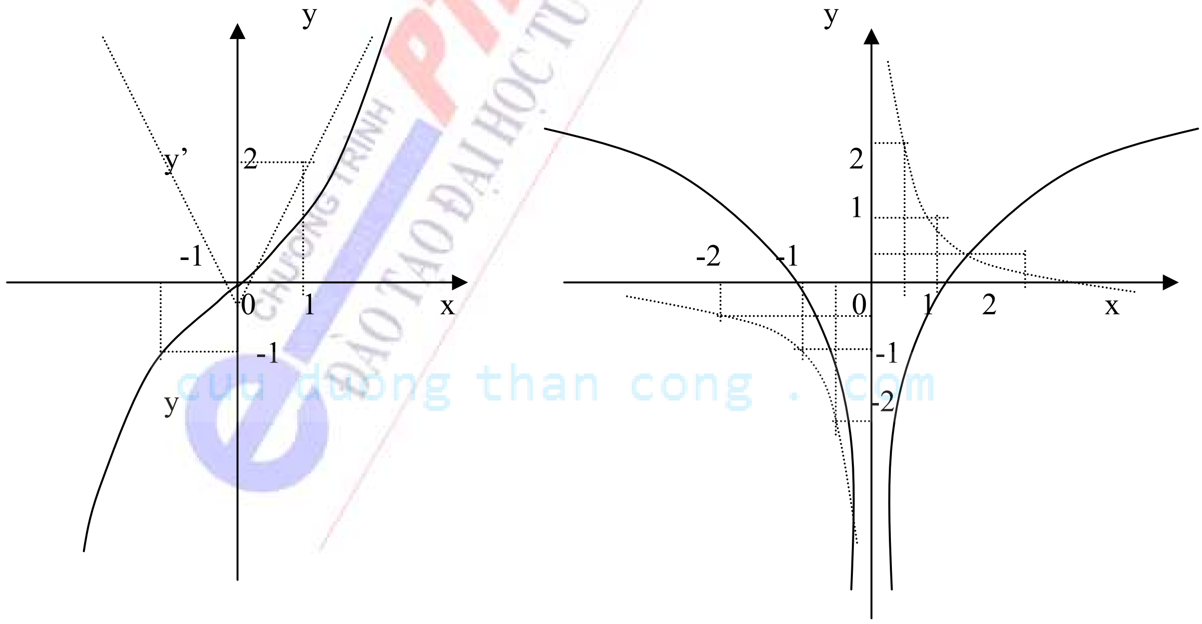
Trước hết ta hãy tính $y'(x)$

1. $y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

$y_t'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2}{x} = 0$, $y_p'(0) = 0$. $y_t'(0) = y_p'(0) = 0 \Rightarrow y' = 2|x|$ trên R

2. $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & x < 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{1}{-x}(-1) & x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$ với $x \in R^*$

Hình 3.5. mô tả các đồ thị của y và y’



H.3.5

Ví dụ 6 : Tính đạo hàm y_x' của hàm số

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$$

Giải: $$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t - arctgt)}{d\ln(1+t^2)} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

3.2. VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

3.2.1. Định nghĩa vi phân tại một điểm

Cho $f \in R^X, f$ khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a kí hiệu $df(a)$ xác định bởi công thức

$$df(a) = f'(a).h \quad \text{với } h \in R$$

Vậy $df(a)$ là một hàm tuyến tính của h

Xét hàm số $f(x) = x$ trên R, $f'(x) = 1, \forall x \in R$ vậy $dx = 1.h$

Từ đó cũng thường kí hiệu $df(a) = f'(a).dx$

Hệ quả: Để $f(x)$ khả vi tại a điều kiện cần và đủ là tồn tại hằng số $\lambda \in R$ và một VCB $\alpha(h)$ tại 0 sao cho

$$f(a+h) - f(a) = \lambda h + h\alpha(h) \text{ đồng thời } \lambda = f'(a).$$

Thật vậy $f(x)$ khả vi tại a khi và chỉ khi tồn tại $f'(a)$

Nghĩa là $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Hay là $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a).h + h\alpha(h)$$

Vậy $f'(a) = \lambda$

Tương tự như đạo hàm tại một điểm, ta nhận được tính chất đại số của vi phân.

Định lí : Nếu $f, g \in R^X$ và khả vi tại $a \in X$ thì

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$
2. $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$ với $\lambda \in R$

3. $d(f.g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$

4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{1}{g^2(a)}\big(g(a)df(a) - f(a)dg(a)\big)$ khi $g(a) \neq 0$

Chú ý:

- $f(a+h) - f(a) = \Delta f(a)$ là số gia của hàm số ứng với số gia đối số $\Delta x = h$. Vậy nếu $f(x)$ khả vi tại a thì với h khá bé sẽ có công thức tính gần đúng số gia của hàm số

$$\Delta f(a) \approx df(a).$$

- Xét hàm hợp gof. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ theo định lí 2 thì gof khả vi tại a. Tức là

$$d(gof)(a) = (gof)'(a).h = g'(f(a)).f'(a).h = g'(f(a)).df(a).$$

Như vậy dù x là biến độc lập hay biến phụ thuộc thì dạng vi phân đều giống nhau. Người ta nói vi phân cấp 1 có tính bất biến.

3.2.2. Vi phân trên một khoảng

Cho $f \in R^X$ khả vi trên $(a,b) \subseteq X$. Vi phân của hàm số trên (a,b) được xác định theo công thức

$$df(x) = f'(x).h \text{ với } x \in (a,b).$$

Tương tự như định lí trên, ta nhận được định lí sau đây.

Định lí: Nếu f, g khả vi trên (a,b) thì trên khoảng đó cũng thoả mãn các hệ thức sau.

1. $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$
2. $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$
3. $d(f.g)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$
4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g^2(x)}\big(g(x)df(x) - f(x)dg(x)\big)$ khi $g(x) \neq 0$

Ví dụ 1: Tính gần đúng $\sin 60^o 40'$

Giải:

Đặt $f(x) = \sin x$, ta có $f'(x) = \cos x$

Chọn $x_o = 60^o = \dfrac{\pi}{3}$, khi đó $h = 40' = \dfrac{40.\pi}{60.180} = \dfrac{\pi}{270}$

Theo công thức xấp xỉ ta có:

$$\sin 60^o 40' \approx \sin 60^o + \cos 60^o.\frac{\pi}{270}$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{270} = 0,866 + 0,006 = 0,872$$

Ví dụ 2: Một hình cầu bằng kim loại bán kính R, khi nóng lên bán kính nở thêm một đoạn ΔR. Tính thể tích mới của hình cầu một cách chính xác và gần đúng.

Áp dụng bằng số $R = 5cm, \Delta R = 0,1cm$

Giải:

Công thức tính thể tích V của hình cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sau khi giãn nở, bán kính hình cầu là $R + \Delta R$, thể tích mới của hình cầu tính chính xác là:

$$V + \Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 = \frac{4}{3}\pi (5 + 0,1)^3 = 176,868\pi \ cm^3$$

Nếu tính gần đúng, ta xem: $\Delta V \approx dV$ (Số gia của thể tích gần bằng vi phân) và khi đó thể tích $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ xem như hàm số của đối số R. Vậy:

$$dV = V_R'.\Delta R = 4\pi R^2.\Delta R$$
$$= 4\pi.5^2.0,1 = 10\pi \ cm^3$$

Thể tích ban đầu của hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = 166,666\pi \ cm^3$$

Vậy thể tích mới của hình cầu tính gần đúng là:

$$V + \Delta V \approx V + dV = 176,666\pi \ cm^3$$

Sai số tuyệt đối trong bài toán này là:

$$176,868\pi \ cm^3 - 176,666\pi \ cm^3 = 0,202\pi \ cm^3$$

Như vậy sai số tương đối là:

$$\delta = \frac{0,202\pi}{176,868\pi} = 0,0011$$

3.3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

3.3.1. Đạo hàm cấp cao

A. Định nghĩa

1. Cho f khả vi trên X, nếu $f'(x)$ khả vi tại $a \in X$ thì nói rằng f có đạo hàm cấp 2 tại a và kí hiệu đạo hàm đó là $f''(a)$. Tương tự đạo hàm cấp n của $f(x)$ tại a, kí hiệu là $f^{(n)}(a)$ chính là đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}(x)$ tại a.

2. Nói rằng $f(x)$ khả vi đến cấp n (hay n lần) trên X khi và chỉ khi tồn tại $f^{(n)}(x)$ trên X, $n \in N^*$ trong đó $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm của $f^{(n-1)}(x)$

3. Nói rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên X khi và chỉ khi $f(x)$ khả vi n lần trên X, $\forall n \in N$. Sau đây thường kí hiệu $f^{(0)}(x) = f(x)$

Chú ý:

- Nếu f khả vi n lần trên X thì $\forall p,q \in N$ sao cho $p+q \le n$ ta có

$$\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$$

- Tập xác định của $f^{(n)}$ thường chứa trong tập xác định của $f^{(n-1)}$

B. Định lí

Cho $\lambda \in R, n \in N^*$, $f,g \in R^X$ khả vi n lần trên X, khi đó trên X có các hệ thức sau đây:

$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

1. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

2. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ gọi là công thức Leibnitz

3. $g(x) \ne 0$ trên X thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi n lần trên X

Chứng minh:

1. và 2. được chứng minh dễ dàng bằng qui nạp

3. chứng minh qui nạp theo n như sau:

Với n =1, công thức đúng theo định lí 2 trong 3.1.3.

Giả sử f,g khả vi (n+1) lần trên X và công thức Leibnitz đã đúng với n tức là:

$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ đó là tổng của những $f^{(k)} g^{(n-k)}$ khả vi trên X nên tồn tại $(f.g)^{(n+1)}$ và

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ (vì } C_n^{-1} = 0 \text{ và } C_n^{n+1} = 0\text{)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) f^{(k)}.g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

4. Qui nạp theo n.

Với n =1 ta có công thức $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ chứng tỏ rằng $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ khả vi

Giả sử rằng f, g khả vi (n+1) lần và tính chất đã đúng với n. Vì f', g, f, g' khả vi n lần trên X nên $f'g - fg'$ và g^2 khả vi n lần trên X. Theo giả thiết qui nạp $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ khả vi n lần trên X như vậy $\dfrac{f}{g}$ khả vi (n+1) lần trên X.

3.3.2. Vi phân cấp cao

A. Định nghĩa

1. Nếu f khả vi đến cấp n tại $a \in X$ thì biểu thức $f^{(n)}(a).h^n$ gọi là vi phân cấp n tại a kí hiệu là $d^n f(a)$. Vậy là $d^n f(a) = f^{(n)}(a)h^n$ hay $d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n$

2. Nếu f khả vi đến cấp n trên X thì vi phân cấp n của f trên X được kí hiệu là $d^n f(x), x \in X$ và xác định theo công thức sau

$$\forall x \in X,\quad d^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n = f^{(n)}(x)dx^n$$

B. Công thức tính vi phân cấp cao

Từ định lí về đạo hàm cấp cao, trực tiếp nhận được các công thức tính vi phân cấp cao dưới đây

Định lí: Nếu f, g khả vi đến cấp n trên X thì khi đó

1. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$

2. Với $\lambda \in R$, $d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$

3. $d^n(f.g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f.d^{n-k} g$

4. Nếu $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ có vi phân đến cấp n.

Chú ý:

- Không có công thức đơn giản cho $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ cũng như $d^n\dfrac{f}{g}$.

- Tính bất biến của vi phân bị phá vỡ khi lấy vi phân cấp cao (từ 2 trở lên), Ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều đó. Cho hàm hợp gof, trong đó

$$f(x)=x^3, g(f)=f^2 \Rightarrow g(f(x))=x^6$$

$$\Rightarrow dg(x)=6x^5dx \Rightarrow d^2g(x)=30x^4dx^2$$

Mặt khác $dg(f)=2fdf \Rightarrow d^2g(f)=2(df)^2$

mà $df=3x^2dx \Rightarrow d^2g(f)=18x^4dx^2 \neq 30x^4dx^2$

3.3.3. Lớp của một hàm

A. Định nghĩa

1. Cho $n\in N$, Ta nói f thuộc lớp C^n (kí hiệu $f\in C^n$) trên X nếu f khả vi n lần trên X và $f^{(n)}$ liên tục trên X.

2. Nói rằng $f\in C^\infty$ trên X nếu f khả vi vô hạn lần trên X.

3. Nói rằng $f\in C^0$ trên X nếu f liên tục trên X.

Chú ý: Như vậy, một hàm có thể khả vi n lần trên X nhưng chưa chắc đã thuộc C^n.

Chẳng hạn

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$ khả vi trên R nhưng không thuộc lớp C^1 trên R

Thật vậy

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$ không có $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

4. Nói rằng $f\in C^n$ từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi tồn tại $p\in N^*$, $a_0,...,a_p\in R$ để $f\in C^n$ trên $[a_i,a_{i+1}]$ $(i=0,...,p-1)$

Chẳng hạn $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{nếu } x\in(0,1]\\ 0 & \text{nếu } x\in[-1,0]\end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in (0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \in [-1,0] \end{cases}$$

Vậy $f(x) \in C^1$ trên $[-1,1]$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x \in (0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \in [-1,0] \end{cases}$$

$f \in C^2$ từng khúc trên $[-1,1]$

B. Định lí

Định lí 1: Nếu $f, g \in C^n$ trên X thì

1. $(f+g) \in C^n$ trên X
2. $\lambda f \in C^n$ trên $X, \lambda \in R$
3. $fg \in C^n$ trên X
4. $\dfrac{f}{g} \in C^n$ trên X khi $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$

Định lí này thực chất là hệ quả của định lí trong mục 3.3.1.

Định lí 2: Cho $f \in R^X$ và $g \in R^Y$, $f(X) \subset Y$. Nếu f và g thuộc lớp C^n thì $gof \in C^n$ trên X

Chứng minh : Qui nạp theo n.

Với n =1 định lí đúng (theo định lí 2 trong mục 3.1.3.)

Giả sử định lí đã đúng với n, cho $f, g \in C^{n+1}$ trên X và trên Y. Ta có

$$(gof)' = (g'of)f'$$

Vì $f, g' \in C^n$, từ giả thiết qui nạp chứng tỏ $g'of \in C^n$. Hơn nữa $f' \in C^n$ Vậy tích

$(g'of).f' \in C^n$, chứng tỏ $gof \in C^{n+1}$

Ví dụ 1: Cho $f(x) = x^m$, $m \in N, x \in R$

Tính $f^{(n)}(x)$ với $n \in N$

Giải:

$f'(x) = mx^{m-1}$, $\quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, ...

$f^{(k)}(x) = m(m-1)...(m-k+1)x^{m-k}$

Chứng tỏ

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n} & \text{nếu } n < m \\ m! & \text{nếu } n = m \\ 0 & \text{nếu } n > m \end{cases}$$

Ví dụ 2: Chứng minh nếu $f(x) = \sin x$ thì

$$\forall x \in R, \forall n \in N^* \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Giải:

Trường hợp n =1. Đúng $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Giả sử công thức đúng với n

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Tương tự cũng nhận được

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x, \forall n \in N$$

Ví dụ 3*: Cho $y = arctgx$ hãy tính $y^{(n)}(x)$

Giải:

Vì $x = tgy \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y.\sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = \left[-\sin y.\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y.\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]y'$$

$$= \cos^2 y.\cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y.\sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

Bằng qui nạp suy ra $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y.\sin n\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có $Z = arctg\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - y$ (xét $x \neq 0$)

Vậy $y^{(n)} = (n-1)!\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin n(\pi - Z)$

Hay $y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n.arctg\dfrac{1}{x}\right)$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số $f(x) = x^2 \sin x$

Giải:

Áp dụng công thức Leibnitz

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x^2)^{(k)} (\sin x)^{(100-k)}$$

$$f^{(100)}(x) = C_{100}^0 x^2 (\sin x)^{(100)} + C_{100}^1 (x^2)'(\sin x)^{(99)} + C_{100}^2 (x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$= x^2 \sin(x + 50\pi) + 200x \sin\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) + 9900 \sin(x + 49\pi)$$

$$= x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x$$

Ví dụ 5: Cho $f : (-1,1) \to R$

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} \text{ hãy tính } f^{(n)}(x)$$

Giải: Phân tích $f(x)$ thành các phân thức tối giản

$$f(x) = \frac{5}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{5}{2}.(-1)^n.\frac{(n+1)!}{(x-1)^{2+n}} - \frac{1}{4}.(-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{4}.(-1)^n \frac{n!}{(x+1)^n}$$

Ví dụ 6*: Cho $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ với $x \in (-1,+\infty)$.

Chứng minh $f(x)$ khả vi n lần trên $(-1,+\infty)$ và trên đó có

$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}$$

Giải:

Các hàm x^{n-1} và $\ln(1+x)$ khả vi vô hạn lần trên $(-1,+\infty)$ vậy $f_n(x) \in C^\infty$ trên $(-1,+\infty)$. Chứng minh qui nạp theo n.

+ n =1 $\quad f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ đúng

+ Giả sử công thức đúng với n, theo công thức Leibnitz

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\{x.f_n(x)\} = xf_n^{(n+1)}(x) + C_{n+1}^1 f_n^{(n)}(x)$$

$$= x(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} + (n+1)(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^{k}}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{-k}{(1+x)^{k}} + \frac{k}{(1+x)^{k+1}} + \frac{n+1}{(1+x)^{k}}\right\}$$

$$= (n-1)!\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{(1+x)^{k}} + \sum_{l=2}^{n+1}\frac{l-1}{(1+x)^{l}}\right\}$$

$$= (n-1)!\left\{\frac{n}{1+x} + \frac{n}{(1+x)^{n+1}} + \sum_{k=2}^{n}\frac{n}{(1+x)^{k}}\right\}$$

$$= n!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(1+x)^{k}}$$ Vậy công thức đúng với n+1.

Nếu $x \neq 0$ sẽ có

$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^{k}} = \frac{(n-1)!}{1+x}.\frac{1-\dfrac{1}{(1+x)^{n}}}{1-\dfrac{1}{1+x}} = \frac{(n-1)!\left((1+x)^{n}-1\right)}{x(1+x)^{n}}$$

Ví dụ 7*: Cho các đa thức $P(x), Q(x)$ và hàm số $f \in C^{\infty}$ trên R với

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & x \leq 0 \\ Q(x) & x > 0 \end{cases}$$

chứng minh $P = Q$

Giải:

Vì $f \in C^{\infty} \Rightarrow \forall n$ có: $f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0) = Q^{(n)}(0) \Rightarrow \deg P = \deg Q$

Giả sử $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ với $n \in N$

$Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$

$\forall n = 0,1,...,m$ sẽ có $a_n = b_n$ thật vậy

$$P(0) = a_0 = Q(0) = b_0; \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

$\Rightarrow P(x) = Q(x)$

Ví dụ 8*: Cho $f, g \in C^2$ trên R và $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } g(x) \geq 0 \\ f(x) + \left(g(x)\right)^3 & \text{nếu } g(x) < 0 \end{cases}$

Chứng minh $h \in C^2$ trên R

Giải:

Dễ dàng nhận được $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \geq 0 \\ t^3 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$

Thuộc lớp C^2 trên $R \Rightarrow \varphi o g \in C^2$ trên $R \Rightarrow h = f + \varphi o g \in C^2$ trên R.

3.4. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.4.1. Định lí Phéc ma (Fermat)

A. Điểm cực trị của hàm số

Cho $f \in R^X$. Gọi hàm số đạt cực trị địa phương tại $a \in X$ khi và chỉ khi tồn tại $\Omega_\delta(a) \subset X$, để $\forall x \in \Omega_\delta(a)$ thoả mãn $f(x) - f(a) \geq 0$ hoặc $f(x) - f(a) \leq 0$

Trường hợp thứ nhất xảy ra nói rằng f đạt cực tiểu địa phương tại a, trường hợp sau nói rằng f đạt cực đại địa phương tại a.

Nếu chỉ có $f(x) - f(a) > 0$ hoặc $f(x) - f(a) < 0$ nói rằng hàm số đạt cực trị địa phương ngặt tại a.

B. Định lí Fermat

Định lí: Nếu $f(x)$ khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì $f'(a) = 0$

Chứng minh: Theo giả thiết tồn tại $\Omega_\delta(a)$ sao cho $\forall x \in \Omega_\delta(a)$ ta có $f(x) - f(a) \leq 0$

(Ta đã giả thiết hàm đạt cực đại địa phương)

$\forall h \in R^*$ sao cho $a + h \in \Omega_\delta(a)$ sẽ có

$$\begin{cases} h > 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \\ h < 0 \Rightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \end{cases}$$

Chuyển qua giới hạn khi $h \to 0$ sẽ có

$$\begin{cases} f'(a) \leq 0 \\ f'(a) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(a) = 0$$

Hàm đạt cực tiểu địa phương cũng chứng minh tương tự

Chú ý:

- Sau này thường nói rằng hàm đạt cực trị tại a theo nghĩa là đạt cực trị địa phương tại a.

- Nếu hàm đạt cực trị tại a thì a phải là điểm trong của X. Như vậy nếu $f(x)$ xác định trên [a,b] thì không có khái niệm đạt cực trị tại đầu mút a và b, có chăng chỉ nói về các đạo hàm trái tại b và phải tại a.

- Định lí Fermat có thể phát biểu tổng quát hơn: Nếu $f(x)$ khả vi phải và trái tại a và đạt cực đại (cực tiểu) tại a thì

$$f_t'(a) \geq 0 \text{ và } f_p'(a) \leq 0$$

$$(f_t'(a) \leq 0 \text{ và } f_p'(a) \geq 0)$$

- Hàm số có cực trị tại a chưa chắc khả vi tại a

Chẳng hạn

$$f(x) = \begin{cases} |x|\sin^2\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

có cực tiểu không chặt tại 0 vì $0 \leq |x|\sin^2\dfrac{1}{x}, \forall x \neq 0,\ f\left(\dfrac{1}{k\pi}\right) = 0, \forall k \in Z$.

Tuy nhiên không khả vi tại 0 vì

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|k|\sin^2\dfrac{1}{h}}{h} \text{ không có giới hạn khi } h \to 0$$

- Hàm số khả vi tại a và $f'(a) = 0$ chưa chắc đạt cực trị tại a, chẳng hạn

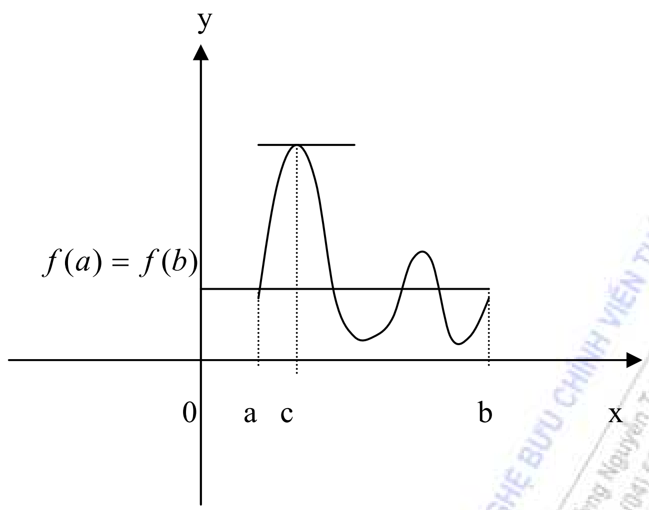
$$f(x) = x^3$$

có $f'(0) = 0$ tuy nhiên $\begin{cases} x^3 \leq 0 & \text{với } x \leq 0 \\ x^3 \geq 0 & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$ Vậy nó không có cực trị tại 0.

3.4.2. Định lí Rôn (Rolle)

Định lí: Cho $f \in R^{[a,b]}$ thoả mãn.

1. f liên tục trên [a,b]
2. f khả vi trên (a,b)
3. $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$



H.3.6

Chứng minh:

Theo tính chất của hàm liên tục trên [a,b] thì $f(x)$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M trên [a,b]

$$m=\underset{[a,b]}{Min}\, f(x)=\underset{[a,b]}{Inf}\, f(x)\ ;\quad M=\underset{[a,b]}{Max}\, f(x)=\underset{[a,b]}{Sup}\, f(x)$$

Nếu m=M thì $f(x)=const \Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$

Nếu m<M, vì $f(a)=f(b)$ nên không có đồng thời $M=f(a)$ và $m=f(b)$ hoặc $m=f(a)$ và $M=f(b)$. Chứng tỏ hàm đạt giá trị nhỏ nhất m hoặc lớn nhất M tại điểm $c\in(a,b)$ Tức là $f(c)\le f(x)$ hoặc $f(c)\ge f(x)$ theo định lí Fermat thì $f'(c)=0$

Chú ý:

- Định lí Rolle có thể minh hoạ hình học như sau :

Tồn tại ít nhất một điểm $M(c,f(c))\in C_f$ với $c\in(a,b)$ tại đó tiếp tuyến của C_f song song với trục 0x. Xem hình 3.6.

- Điểm $c\in(a,b)$ tương ứng số $\theta\in(0,1)$ sao cho $c=a+\theta(b-a)$

3.4.3. Định lí số gia hữu hạn. (định lí Lagơrăng (Lagrange))

Định lí: Cho $f\in R^{[a,b]}$ thoả mãn:

1. Liên tục trên [a,b]
2. Khả vi trên (a,b), khi đó tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Chứng minh:

Xét hàm $\varphi \in R^{[a,b]}$ xác định bởi $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Rõ ràng $\varphi(x)$ liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$. Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Suy ra $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ hay } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Như vậy $$\Delta f(a) = f'(c).h \text{ trong đó } h + a = b$$

$$\theta \in (0,1), \quad c = a + \theta h$$

Chú ý:

- Định lí Lagrange có thể minh hoạ hình học như sau :

Tồn tại ít nhất một điểm $M(c, f(c)) \in C_f$ với $c \in (a,b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng AB, trong đó $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$. Xem hình 3.7.

Hệ quả 1: (Định lí giới hạn của đạo hàm)

Cho $x_0 \in (a,b), f \in R^{(a,b)}$ thoả mãn

1. $f(x)$ liên tục tại x_0
2. $f(x)$ khả vi trên $(a,b)\setminus\{x_0\}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$ khi đó f khả vi tại x_0 và $f'(x)$ liên tục tại x_0

Chứng minh:

Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a,b)\setminus\{x_0\}: \quad 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f'(x) - l| < \varepsilon$$

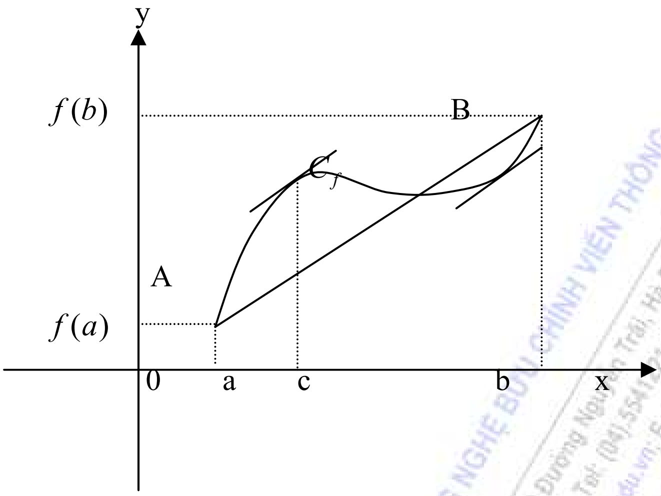
Áp dụng định lí Lagrange trên $[x, x_0]$, như vậy tồn tại $c_x \in (x, x_0)$ sao cho

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c_x) \text{ và đương nhiên}$$

$$|c_x - x_0| < |x - x_0| < \eta$$

Từ đó suy ra $$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l\right| = |f'(c_x) - l| < \varepsilon$$

Điều này chứng tỏ $f'(x_0) = l$ và từ điều kiện của định lí suy ra $f'(x)$ liên tục tại x_0.



H.3.7

Chú ý:

Chúng ta nhận được định lí tương tự đối với đạo hàm trái hoặc phải

Hệ quả 2: Cho $f \in R^{[a,b]}$ thoả mãn

1. f liên tục phải tại a
2. f khả vi trên (a,b)
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l$ khi đó có $f_p'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Hệ quả 3: Cho $f \in R^{(a,b)}$ thoả mãn.

1. f liên tục tại $x_0 \in (a,b)$
2. f khả vi trên $(a,b) \setminus \{x_0\}$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = +\infty, (-\infty)$ khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, (-\infty)$

cuu duong than cong . com

3.4.4. Định lí số gia hữu hạn suy rộng (Định lí Côsi(Cauchy))

Định lí: Cho $f, g \in R^{[a,b]}$ thoả mãn:

1. f, g liên tục trên [a,b]
2. f, g khả vi trên (a,b)
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Chứng minh:

Trước hết thấy ngay $g(a) \neq g(b)$, vì nếu $g(a) = g(b)$, theo định lí Rolle suy ra tồn tại $c \in (a,b)$ để $g'(c) = 0$, vô lí theo giả thiết.

Xét hàm số $\varphi \in R^{[a,b]}$ cho bởi

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$

Hàm φ thoả mãn các điều kiện của định lí Rolle nên tồn tại $c \in (a,b)$ để $\varphi'(c) = 0$,

tức là $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Chú ý:

- Thấy ngay rằng định lí Lagrange là trường hợp riêng của định lí Cauchy (lấy $g(x) = x$ trên [a,b])
- Định lí Rolle là trường hợp riêng của định lí Lagrange (cho $f(a) = f(b)$).

Ví dụ 1: Cho $f \in R^{[a,b]}$ thoả mãn

1. f liên tục trên [a,b]
2. f khả vi phải và trái trên [a,b]
3. $f(a) = f(b)$

Chứng minh rằng $\exists c \in (a,b)$ để $f_t'(c) f_p'(c) \leq 0$

Giải:

Tương tự như chứng minh định lí Rolle

Nếu m =M thì rõ ràng $f(x) = const$ trên [a,b] suy ra

$\forall c \in (a,b)$ có $f'(c) = 0 \Rightarrow f_t'(c) = f_p'(c) = 0 \Rightarrow f_t'(c).f_p'(c) = 0$

Nếu m<M. Giả sử hàm f đạt Maximum tại $c \in (a,b)$

Vậy nếu $h > 0$ thì $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

nếu $h < 0$ thì $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

Qua giới hạn khi $h \to 0$ sẽ có $f_p'(c) \leq 0$ và $f_t'(c) \geq 0$

Cuối cùng suy ra $f_p'(c).f_t'(c) \leq 0$

Ví dụ 2: Cho f khả vi trên (a,b), a<b và thoả mãn

$f(a)=f(b)=0, f_p'(a)>0, f_t'(b)>0$. Chứng minh tồn tại $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$ sao cho $c_1<c_2<c_3, f(c_2)=0, f'(c_1)=f'(c_3)=0$

Giải:

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_p'(a)>0, f(a)=0\Rightarrow \exists\alpha>0$ đủ bé để:

$\forall x\in(a,a+\alpha)$ có $f(x)>0$ chẳng hạn $f\left(a+\dfrac{\alpha}{2}\right)>0$

tương tự $\exists\beta>0$ đủ bé để $f\left(b-\dfrac{\beta}{2}\right)<0$. Vì f liên tục trên $\left[a+\dfrac{\alpha}{2},b-\dfrac{\beta}{2}\right]$ nên $\exists c_2\in\left(a+\dfrac{\alpha}{2},b-\dfrac{\beta}{2}\right)\subset(a,b)$ sao cho $f(c_2)=0$. Áp dụng định lí Rolle cho các đoạn $[a,c_2]$ và $[c_2,b]$ sẽ $\exists c_1,c_2$ để $f'(c_1)=f'(c_3)=0$ trong đó $a<c_1<c_2<c_3<b$.

Ví dụ 3*: Cho f khả vi trên tập X. Chứng minh ảnh $f'((a,b))$ là một khoảng của R trong đó $(a,b)\in X^2$

Giải:

Giả sử a<b và $f'(a)<f'(b)$ lấy $k\in(f'(a),f'(b))$ sẽ chứng minh tồn tại $d\in(a,b)$ để $f'(d)=k$.

Kí hiệu $t_0=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\quad U=[t_0,f'(a)]$, $\quad V=[t_0,f'(b)]$

Xét hàm $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{nếu } x\neq a\\ f'(a) & \text{nếu } x=a\end{cases}$

$\Rightarrow\varphi(x)$ liên tục trên [a,b] và $\varphi(a)=f'(a),\varphi(b)=t_0$ theo định lí về giá trị trung bình chứng tỏ $U\subset\varphi([a,b])$

Tương tự xét $\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{nếu } x\neq b\\ f'(b) & \text{nếu } x=b\end{cases}$

Suy ra $\psi(a)=t_0,\psi(b)=f'(b),\psi(x)$ liên tục trên $[a,b]\Rightarrow V\subset\psi([a,b])$

mà $\left(f'(a),f'(b)\right)\subset U\cup V$. Do đó nếu $k\in\left(f'(a),f'(b)\right)$ thì tồn tại $c\in(a,b)$ chẳng hạn $\varphi(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=k\Rightarrow\exists d\in(a,c)\subset(a,b)$ để $f'(d)=k$

Ví dụ 4*: Cho f liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) trừ ra n điểm trên (a,b). Chứng minh rằng tồn tại n+1 số dương $\alpha_1,...,\alpha_{n+1}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ và n+1 số

$c_i\in(a,b),(i=1,...,n+1)$ sao cho $a<c_1<...<c_{n+1}<b$ thoả mãn

$$f(b)-f(a)=\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f'(c_i)\right)(b-a)$$

Giải:

Giả sử f không khả vi tại các điểm a_i, $i=\overline{1,n}$ và $a<a_1<a_2<...<a_n<b$

Áp dụng định lí Lagrange cho n+1 khoảng ta có

$\exists c_1\in(a,a_1):\quad f(a_1)-f(a)=f'(c_1)(a_1-a)$

$\exists c_2\in(a_1,a_2):\ f(a_2)-f(a_1)=f'(c_2)(a_2-a_1)$

…

. ..

…

$\exists c_{n+1}\in(a_n,b):\ f(b)-f(a_n)=f'(c_{n+1})(b-a_n)$

Đặt $\alpha_1=\dfrac{a_1-a}{b-a},\ \ \alpha_2=\dfrac{a_2-a_1}{b-a},...,\ \ \alpha_{n+1}=\dfrac{b-a_n}{b-a}\Rightarrow\alpha_i\in R_+^*$

và $f(b)-f(a)=\left(f(b)-f(a_n)\right)+...+\left(f(a_1)-f(a)\right)=\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f'(c_i)\right)(b-a)$

3.5. ỨNG DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.5.1. Công thức Taylo (Taylor), công thức Maclôranh (McLaurin)

A. Định nghĩa

1. Cho hàm f khả vi đến cấp (n+1) tại $a\in X$ tức là $f\in C^n$ tại lân cận của a và có đạo hàm cấp n+1 tại a. Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg P_n(x)\le n$ thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)\qquad k=\overline{0,n}$$

là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm a, hay là phần chính qui của khai triển hữu hạn bậc n tại a của $f(x)$

2. Nếu a = 0 thì $P_n(x)$ gọi là đa thức McLaurin của $f(x)$

B. Định lí

Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Chứng minh:

Giả sử tồn tại đa thức thứ hai là $Q_n(x)$ khi đó hiệu $P_n(x) - Q_n(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá n và có nghiệm $x = a$ bội n+1 chứng tỏ $P_n(x) = Q_n(x)$

Đặt $P_n(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n$

$$P_n^{(k)}(a) = k!A_k = f^{(k)}(a) \Rightarrow A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0,1,\ldots,n)$$

Chứng tỏ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n$

C. Công thức Taylor

Cho $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a

1. Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$

Hệ quả: Phần dư $r_n(x)$ có dạng:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ với } c \in (a,x)$$

Hay $c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$, gọi là phần dư trong dạng Lagrange

Chứng minh:

Rõ ràng $r_n(a) = r_n'(a) = \ldots = r_n^{(n)}(a) = 0$

Đặt $G(x) = (x-a)^{n+1} \Rightarrow G(a) = G'(a) = \ldots = G^{(n)}(a) = 0$ và $G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Với $x \neq a$ và $x \in \Omega_\delta(a)$, theo định lý Cauchy sẽ có

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)}, \ c_1 \in (a,x)$$

$$\frac{r_n'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{r_n'(c_1) - r_n'(a)}{G'(x) - G'(a)} = \frac{r_n''(c_2)}{G''(c_2)}, c_2 \in (\mathbf{a}, \mathbf{c_1})$$

Sau (n+1) lần áp dụng định lí Cauchy, kết quả sẽ là

$$\frac{r_n(x)}{G(x)} = \frac{r_n^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)} \text{ với } c \in (a,c_n) \subset (a,c_{n-1}) \subset \ldots \subset (a,x)$$

mà $r_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c), G^{(n+1)}(c) = (n+1)!$

Suy ra $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

2. Gọi công thức $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ là công thức Taylor bậc n , hay khai triển hữu hạn bậc n hàm $f(x)$ tại lân cận của a

3. Gọi công thức $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ là công thức McLaurin bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n của $f(x)$ tại lân cận của 0.

Chú ý:

- Nếu $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì rõ ràng $\dfrac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)$ dần đến 0 khi $x \to a$ nghĩa là $r_n(x) = 0\left((x-a)^n\right)$
- Với giả thiết $f^{(n+1)}$ bị chặn ở lân cận của a thì có thể lấy gần đúng $f(x)$ ở lân cận của a bằng đa thức $P_n(x)$ với sai số là $r_n(x) = 0\left((x-a)^n\right)$.
- Người ta đã chứng minh phần dư viết trong dạng khác, gọi là dạng Cauchy:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

D. Công thức McLaurin của các hàm thường dùng

1. $f(x) = e^x, \quad \forall x \in R$.

Ta thấy $f \in C^\infty$ trên R và $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in N$

Suy ra $e^x = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + 0(x^n)$

2. $f(x) = \sin x, \quad \forall x \in R, \quad f \in C^\infty$

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m, & k = 2m+1 \end{cases}$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + 0(x^{2n+2})$$

Tương tự $\cos x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0(x^{2n+1})$.

3. $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in R,\ x \in X$, X phụ thuộc α. Với x ở lân cận của 0 thì $f \in C^\infty$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$$

Suy ra $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n)$.

Các trường hợp đặc biệt:

- Với $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + 0(x^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + 0(x^n)$$

- Với $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + 0(x^2)$$

- Với $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + 0(x^2)$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$, ở lân cận 0 thì $f \in C^\infty$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = (-1)^n.n!$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$$

5. $f(x) = arctgx,\ \forall x \in R$

$$f \in C^\infty,\ f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k = 2m \\ (-1)^{m-1}(2m-2)!, & \text{nếu } k = 2m+1 \end{cases}$$ (Xem ví dụ ở mục 3.3.3.)

Vậy $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1} + 0(x^{2m})$

6. $f(x) = tgx, \quad f \in C^{\infty}$ ở lân cận của 0.

Ta biểu diễn $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$

3.5.2. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

Cho $a \in X, \ f, g \in R^X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. liên tục tại a và khả vi ở lân cận $\Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$
2. $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Omega_\delta(a) \setminus \{a\}$
3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

Chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x: \quad 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$$

Lấy $x \in \Omega_\alpha(a) \setminus \{a\}$ sao cho $0 < |x - a| < \alpha$. Theo định lí Cauchy sẽ tồn tại

$c_x \in \Omega_\alpha(a) \setminus \{a\}$ sao cho $0 < |c_x - a| < |x - a|$ để có $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

Chứng tỏ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \Omega_\alpha(a) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$

Chú ý:

- Nếu $f(a) = g(a) = 0$ thì rõ ràng qui tắc L'Hospital cho ta điều kiện đủ để tìm giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, thì bằng cách xét các hàm số $\dfrac{1}{f(x)}$ và $\dfrac{1}{g(x)}$ và như vậy cũng nhận được điều kiện để tìm giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- Nhận thấy rằng trong phép chứng minh qui tắc L'Hospital nếu $a = \infty$ hoặc $l = \infty$ kết quả vẫn đúng.

- Cần lưu ý rằng qui tắc L'Hospital chỉ cho điều kiện đủ để tìm giới hạn. Bởi vì khi không tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Chẳng hạn :

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Tuy nhiên $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{2}$ không tồn tại

- Để tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ đương nhiên có thể áp dụng qui tắc L'Hospital trong đó f và g thay bởi f' và g'. Như vậy, trong một bài toán tìm giới hạn , có thể lặp lại qui tắc L'Hospital một số lần.

Ví dụ 1: Hãy phân tích $e^{\sin x}$ đến x^3

Giải:

Vì $x \to 0$ thì $\sin x \to 0$ nên $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \dfrac{1}{2}\sin^2 x + \dfrac{1}{6}\sin^3 x + 0(\sin^3 x)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + 0(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\left(x^2 + 0(x^4)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + 0(x^5)\right) + 0(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0(x^3)$$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$

Giải:

Áp dụng các công thức khai triển hữu hạn sẽ nhận được

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 + 0(x^4)}{x\left(\frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

Giải:

$$\sqrt{1-e^{-x}} = \sqrt{1-\left(1-x+0(x)\right)} = \sqrt{x+0(x)} = \sqrt{x}+0(\sqrt{x})$$

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+0(x^3)\right)} = \sqrt{\frac{x^2}{2}+0(x^3)} = \frac{x}{\sqrt{2}}+0(x)$$

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x-\frac{x^3}{6}+0(x^4)} = \sqrt{x}+0(\sqrt{x})$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^x}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+0(\sqrt{x})-\dfrac{x}{\sqrt{2}}-0(x)}{\sqrt{x}+0(\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

Ví dụ 4. Tìm

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x,\quad (\alpha>0)$

Giải:

a. Nhận xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+\alpha x))'}{(\beta x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha x}}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{\beta x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}} = I$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(\dfrac{1}{x^{\alpha}})'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{\alpha}}{\alpha} = 0$

Vậy I=0.

Ví dụ 5: Tính

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}},\quad (\alpha>0)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}},\quad (a>1,\alpha>0)$

Giải:

a. $\dfrac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'} = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}} \to 0$ khi $x\to+\infty$ chứng tỏ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$

b. $\dfrac{(x^{\alpha})'}{(a^{x})'} = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\ln a}$, lấy đạo hàm hữu hạn n lần sao cho $\alpha-n\le 0$. Khi đó

$$\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x \ln^n a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ chứng tỏ } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$$

Vậy ta cũng so sánh được các VCL $\ln x, x^\alpha, a^x$ tại ∞ với nhau. Kết quả đã có trong mục 1.3.2.

Ví dụ 6: Bằng phương pháp lôga hãy tính các giới hạn sau đây

$$I_1=\lim_{x\to0^+}x^x,\quad I_2=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}},\quad I_3=\lim_{x\to0^+}(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Giải:

$$\ln x^x = x\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ (theo ví dụ 4)}$$

$$\Rightarrow I_1=e^0=1$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}=\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{1-\cos x}$$

$$\frac{(\ln|\sin x|-\ln|x|)'}{(1-\cos x)'}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin^2 x)'}=\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I_2=e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\ln(\cot gx)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{\ln x}\ln\cot gx$$

$$\frac{(\ln\cot gx)'}{(\ln x)'}=\frac{\frac{1}{\cot gx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}=-\frac{x}{\sin x\cos x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-1$$

$$\Rightarrow I_3=e^{-1}$$

3.6. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

3.6.1. Tính đơn điệu của hàm khả vi

Định lí 1: Cho $f\in R^{[a,b]}$ thỏa mãn:

1. f liên tục trên đoạn [a,b]
2. f khả vi trên khoảng (a,b)

3. $f'(x)=0, \forall x \in (a,b)$ khi đó f(x) không đổi trên [a,b]

Chứng minh:

Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in [a,b]$. Theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ vì x_1, x_1 tùy ý vậy f(x) không đổi trên [a,b], tức là f(x)=const trên [a,b]

Định lí 2: Cho f liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b). Để f tăng trên [a,b] thì cần và đủ là $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

Chứng minh:

* Giả sử f tăng trên [a,b]. Cho $x_0 \in (a,b), \forall h \in R^*$ sao cho $x_0 + h \in (a,b)$, ta có:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

Qua giới hạn khi $h \to 0$ nhận được $f'(x_0) \geq 0$

* Ngược lại, giả sử $\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$. Lấy tùy ý $x_1, x_2 \in [a,b]$. Áp dụng định lí Lagrange trên $[x_1, x_2]$ sẽ có $c \in (x_1, x_2)$ sao cho:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$$

$$\Rightarrow (x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ tăng trên [a,b]}$$

Thay f bởi –f sẽ nhận được định lí trong trường hợp hàm giảm.

Định lí 3: Cho f liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b). Để f tăng ngặt trên [a,b], điều kiện cần và đủ là

a. $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

b. Tập $\{x \in (a,b), f'(x)=0\}$ không chứa bất kỳ một khoảng có phần trong không rỗng nào.

Chứng minh:

• Giả sử f tăng ngặt trên [a,b]. Theo định lí 2 ta có:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Nếu $\{x \in (a,b), f'(x)=0\}$ chứa một khoảng có phần trong không rỗng tức là tồn tại $\alpha > 0$ đủ bé , c để f'(c)=0 sao cho $(c-\alpha, c+\alpha) \subset \{x \in (a,b), f'(x)=0\}$ hay là $\forall x \in (c-\alpha, c+\alpha), f'(x)=0$. Theo định lí 1 thì f(x)=const trên $[c-\alpha, c+\alpha]$, điều này mâu thuẫn vì f(x) tăng ngặt trên [a,b]. Chứng tỏ tập các không điểm của f'(x) không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng.

• Ngược lại, giả sử $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ và tập các không điểm của f'(x) không chứa bất kỳ khoảng nào có phần trong không rỗng. Theo định lí 2, rõ ràng f tăng trên [a,b]. Giả sử f tăng không ngặt, tức là $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$ vì f tăng trên [a,b] nên $\forall x \in [x_1, x_2]$ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ trên $[x_1, x_2]$. Vậy $(x_1, x_2) \subset \{x, f'(x) = 0\}$ mâu thuẫn với giả thiết.Chứng tỏ f tăng ngặt trên [a,b]

3.6.2. Điều kiện hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Cho $f \in R^X$. Nếu tồn tại lân cận $\Omega_\delta(a) \subset X$ và $f'(x) \geq 0$ trên $(a-\delta, a)$ và $f'(x) \leq 0$ trên $(a+\delta, a)$ thì f có một cực đại tại a.

Định lí này suy trực tiếp từ định lí 2 trong mục 3.6.1 và định nghĩa cực trị của hàm số.

Định lí 2: Cho $f \in C^n$ tại lân cận $\Omega_\delta(a)$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

a. Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(a) > 0$, đạt cực đại nếu $f^{(n)}(a) < 0$.

b. Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.

Chứng minh:

Trong lân cận đủ bé của a, ta có công thức Taylor tại lân cận đó:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n, \quad \theta \in (a,x)$$

a. Nếu n chẵn thì $(x-a)^n \geq 0$

Giả sử $f^{(n)}(a)>0$, do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ ở lân cận a nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ suy ra trong $\Omega_\delta(a)$. Vậy f đạt cực tiểu tại a.

Giả sử $f^{(n)}(a)>0$, khi đó $f(x) \leq f(a)$ chứng tỏ f đạt cực đại tại a.

b. Nếu n lẻ, $(x-a)^n$ đổi dấu ở lân cận $\Omega_\delta(a)$ trong khi đó $f^{(n)}(a) \neq 0$. Giả sử $f^{(n)}(a) = f_0 > 0$ do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ nên $f^{(n)}(\theta) > 0$ ở lân cận khá bé của a. Lúc đó $f^{(n)}(\theta)(x-a)^n$ có dấu thay đổi khi x đi qua a. Vậy

$$f(x) < f(a) \text{ nếu } x < a$$

$$f(x) > f(a) \text{ nếu } x > a \text{ với } x \text{ khá gần a.}$$

Suy ra f(x) không đạt cực trị tại a.

Ví dụ 1: Cho $f: R \to R,\ g: R_+ \to R$ sao cho

$$\forall x, y \in R, |f(x) - f(y)| \le |x - y|.g(|x - y|) \text{ và } g(0^+) = 0$$

Chứng minh f là hằng số trên R.

Giải:

Lấy x cố định tùy ý trên R

$$\forall y \ne x: \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le g(|x - y|)$$

Qua giới hạn, vì $g(0^+) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0 = f'(x)$

Theo định lí 1 thì f(x)=const trên R.

Ví dụ 2: Cho $f: R_+ \to R$, f bị chặn, khả vi đến cấp 2 và $f''(x) \ge 0$. Chứng minh f là hàm giảm.

Giải:

Vì $f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ tăng. Giả sử $\exists c \in R$ để f'(c)>0 thì theo định lí Lagrange đối với f(x) trên [c,x], $\forall x > c\ \exists c_1 \in (c, x)$ sao cho

$$f(x) - f(c) = f'(c_1)(x - c) \ge f'(c)(x - c)$$

$$f(x) \ge f(c) + f'(c)(x - c) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$$

Chứng tỏ f(x) không bị chặn. Vậy $f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên R.

Ví dụ 3: Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của hàm số: $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$

Giải: Hàm số xác định $\forall x \in R$ và khả vi trên $R \setminus \{0;1\}$

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}\right)$$

$y' = 0$ khi $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{x - 1}$. Giải phương trình này nhận được $x = \dfrac{1}{2}$

Từ biểu thức của y' ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		-	$\Vert$	+	0	-	$\Vert$	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số giảm trong các khoảng $(-\infty;0),(\frac{1}{2};1)$

hàm số tăng trong các khoảng $(0;\frac{1}{2}),(1;+\infty)$

$y_{\min} = y(0) = y(1) = 1$

$y_{\max} = y(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{2}$

3.7. BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ BÉ NHẤT

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập X. Tìm giá trị bé nhất (GTBN) , giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số trên tập đó.

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTBN là m tại $x_1 \in X$ khi và chỉ khi :

$$m = f(x_1) \le f(x), \quad \forall x \in X$$

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTLN là M tại $x_2 \in X$ khi và chỉ khi :

$$M = f(x_2) \ge f(x), \quad \forall x \in X$$

3.7.1. Hàm liên tục trên đoạn kín [a,b]

Theo tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn kín bao giờ cũng tồn tại m,M. Theo định lý Fermat nếu hàm khả vi tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì $f'(x_0)=0$. Vì cực trị có tính địa phương nên các điểm tại đó hàm đạt GTBN, GTLN chỉ có thể là hoặc các điểm tại đó hàm số không khả vi hoặc các điểm làm đạo hàm triệt tiêu hoặc các điểm a,b. Từ đó các quy tắc tìm m, M tương ứng x_1, x_2 như sau:

a. Tìm các giá trị f(a), f(b).

b. Tìm các giá trị của hàm số tại các điểm hàm số không khả vi.

c. Tìm giá trị của hàm số tại các điểm làm triệt tiêu đạo hàm f'(x).

d. So sánh các giá trị tìm được ở trên để tìm ra giá trị bé nhất, đó là m, tìm ra giá trị lớn nhất, đó là M.

3.7.2. Hàm liên tục trên khoảng mở, khoảng vô hạn

Trong trường hợp này, thay vì tính f(a), f(b), ta tìm giới hạn của hàm số khi x dần tới a, dần đến b, hoặc dần đến ∞. Tuy nhiên phải xem xét hàm số có đạt được giới hạn này không. Các bước tiếp theo thực hiệm như mục trên.

Ví dụ 1: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} \quad 0 \le x \le 3$

Giải:

$$y(0) = 0, y(3) = \sqrt[3]{9}$$

Hàm số khả vi trên khoảng $(0,3)\backslash\{2\}$. $y(2) = 0$.

$$y' = \frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}} = 0 \text{ khi } x = 1,\ y(1) = 1$$

$$m = \min\{0,1,\sqrt[3]{9}\} = 0 \text{ đạt được tại } x = 0, x = 2$$

$$M = \max\{0,1,\sqrt[3]{9}\} = \sqrt[3]{9} \text{ đạt được tại } x = 3$$

Ví dụ 2: Tìm GTBN, GTLN của hàm số $y = x^x, \quad 0{,}1 \le x < +\infty$

Giải:

Hàm số khả vi trên khoảng $(0{,}1;+\infty)$.

$$y(0{,}1) = \frac{1}{\sqrt[10]{10}},\quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$$

$$y' = x^x(\ln x + 1) = 0 \text{ khi } x = e^{-1}$$

$$y(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}}$$

Vậy $m = \min\left\{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}, \frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right\} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ đạt được tại $x = e^{-1}$

Hàm số không có GTLN.

3.8*. HÀM LỒI

3.8.1. Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn

A. Định nghĩa

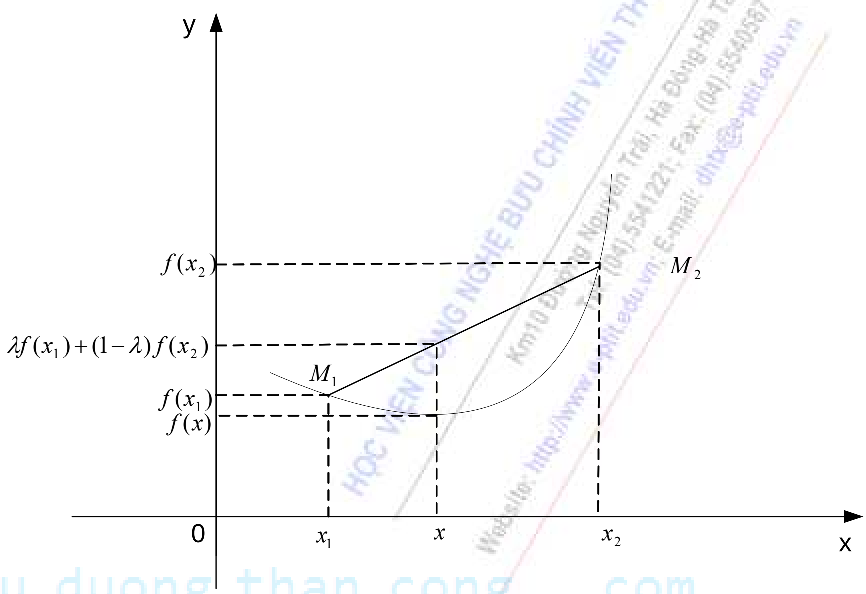
1. Ánh xạ $f: X \to R$ được gọi là lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Nói rằng f là lõm khi và chỉ khi –f là lồi.

Đồ thị của hàm lồi f trên (a,b) được mô tả trên hình 3.8.

Đặt $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)), C_f$ là đồ thị của hàm số f



H.3.8

Như vậy ánh xạ f lồi khi và chỉ khi với bất kỳ cặp điểm (M_1, M_2) của C_f, mọi điểm $M \in C_f$ có hoành độ nằm giữa các hoành độ của M_1 và M_2 đều nằm phía dưới đoạn M_1M_2. Nói cách khác đường cong nằm dưới mọi dây cung tương ứng

2. Cho $f \in R^X$. Giả sử $X = [a,b] \cup [b,c]$ mà f lồi (lõm) trên [a,b], f lõm (lồi) trên [b,c]. Khi đó điểm U(b,f(b)) gọi là điểm uốn của đồ thị C_f của hàm số. Như vậy điểm uốn là điểm phân biệt giữa các cung lồi và cung lõm của đồ thị hàm số.

B. Định lí

Định lí 1: Để f là lồi trên X điều kiện cần và đủ là $\forall a \in X$, tỷ số gia tại a của f tăng trên $X \setminus \{a\}$, tức là

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ tăng trên } X \setminus \{a\}.$$

Chứng minh:

Lấy tùy ý $a, b, c \in X$ sao cho a<b<c. Gọi A(a,f(a)), B(b,f(b)), C(c,f(c)) và P(AB), P(AC), P(BC) là các hệ số góc của các đường AB, AC, BC. Như vậy $\tau_a(b) = P(AB), \tau_a(c) = P(AC)$.

Như vậy định lí được chứng minh khi ta chỉ ra $P(AB) \le P(AC)$ là điều kiện cần và đủ của hàm lồi.

Đặt $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, trong đó $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a} \in [0,1]$

f lồi có nghĩa là:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c)$$

$$\Leftrightarrow (c-a)f(b) \le (c-b)f(a) + (b-a)f(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

hay $P(AB) \le P(AC)$

Định lí 2 : (Bất đẳng thức Jensen)

Nếu $f \in R^X$ lồi , $n \in N^*, x_1, x_2, ..., x_n \in X; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ thì sẽ có $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

Chứng minh: Qui nạp theo n

- Với n=1 đúng, với n =2 đúng theo định nghĩa hàm lồi.
- Giả sử tính chất trên đúng với $\forall n \in N^*$, ta đi chứng minh tính chất đó cũng đúng với n+1.

Cho $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in X$ và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1} \in [0,1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ bất đẳng thức muốn có là hiển nhiên.

Giả sử $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \ne (0,0,...,0)$ gọi $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} > 0$ và $x' = \dfrac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in X$ vì $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ vì f lồi, suy ra

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\mu x' + (1-\mu)x_{n+1}) \le \mu f(x') + (1-\mu)f(x_{n+1}) = \mu f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Theo giả thiết qui nạp:

$$f(x') = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} f(x_k) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Do $\dfrac{\lambda_k}{\mu} \in [0,1]$ và $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} = 1$ suy ra $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \le \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$

3.8.2. Điều kiện hàm lồi

Định lí 1: Giả sử f là lồi trên X khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm trong của X và $\forall a,b,c \in X$ sao cho a<b<c, ta có

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Chứng minh: Theo định lí 1, $\tau_b(x) = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ tăng trên $X \setminus \{b\}$

- Cho $u \in [a,b)$ và $\forall v \in (b,c)$ sẽ có: $\tau_b(a) \le \tau_b(u) \le \tau_b(v) \le \tau_b(c)$. Như vậy $\tau_b(x)$ tăng trên [b,c) và bị chặn dưới bởi $\tau_b(u)$.

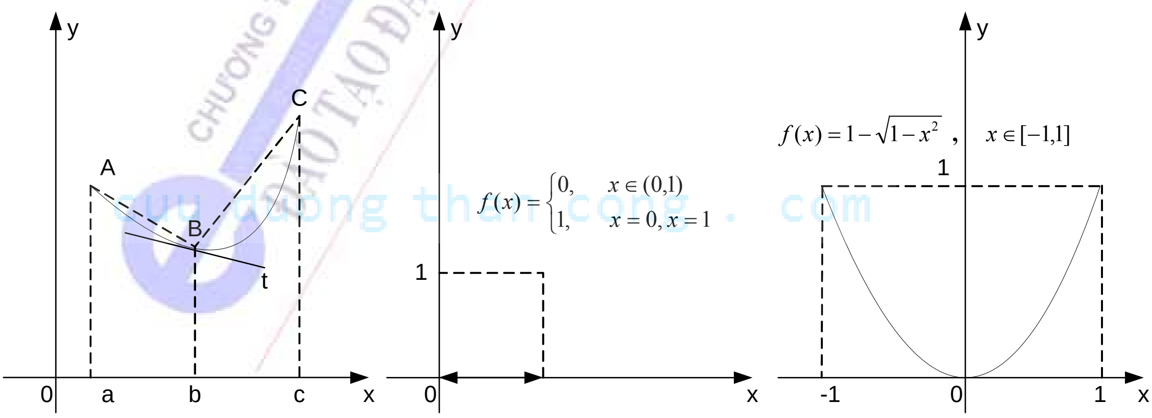
Theo mục G của 2.2.2. $\tau_b(x)$ có giới hạn phải tại b, chính là f'(b) và $\tau_b(a) \le \tau_b(u) \le f_b'(b) \le \tau_b(c)$

- Từ đó suy ra $\tau_b(x)$ tăng trên [a,b) và bị chặn dưới bởi $f_p'(b)$. Vậy nó có giới hạn trái tại b, giới hạn đó là $f_t'(b)$ và $\tau_b(a) \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \tau_b(c)$

Chú ý:

- f lồi trên [a,b] thì liên tục trên (a,b) (Theo mục 3.1)
- f lồi trên [a,b] có thể gián đoạn tại a hoặc liên tục tại a hoặc không khả vi phải tại a.

Định lí 1 và các chú ý được minh họa trên hình 3.9.



H.3.9

Định lí 2: Cho $f \in R^X$ khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên X

Chứng minh:

Giả sử f lồi trên X , lấy $a,b \in X$ sao cho $a < b$. Theo định lí 1 ta có:

$$f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b) \Rightarrow f'(x) \text{ tăng trên X}$$

Ngược lại cho f'(x) tăng trên X, cho $a,b \in X$ sao cho a<b và $\lambda \in [0,1]$, đặt $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ (các trường hợp a=b hoặc $\lambda = 0, \lambda = 1$ là tầm thường). Áp dụng định lí Lagrange cho f trên [a,x], [x,b] thì tồn tại $c \in (a,x), d \in (x,b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(c) = (1-\lambda)(b-a)f'(c)$$

$$f(b) - f(x) = (b-x)f'(d) = \lambda(b-a)f'(d)$$

Vì f' tăng nên $f'(c) \le f'(d) \Rightarrow \lambda(f(x) - f(a)) \le (1-\lambda)(f(b) - f(x))$. Nghĩa là

$$f(x) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Chứng tỏ f lồi trên X.

Hệ quả 1: Cho f khả vi hai lần trên X. Để f là lồi điều kiện cần và đủ là $f''(x) \ge 0$

Hệ quả 2: Để u(a,f(a)) là điểm uốn của đồ thị hàm $f \in R^X$ với $a \in X$, f khả vi hai lần trên X , điều kiện cần và đủ là f''(a)=0 và f''(x) đổi dấu khi x đi qua điểm a.

Ví dụ 1: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}\ln\frac{a}{x}, \quad a > 0$

Giải:

Hàm số khả vi mọi cấp khi $x > 0$.

$$y' = -\frac{a}{x^2}(1 + \ln\frac{a}{x})$$

$$y'' = \frac{a}{x^3}(3 + 2\ln\frac{a}{x})$$

$y'' = 0$ khi $3 + 2\ln\frac{a}{x} = 0$ hay $x = ae^{\frac{3}{2}}$

Ta có $y'' < 0$ khi $x > a.e^{\frac{3}{2}}$ và $y'' > 0$ khi $x < ae^{\frac{3}{2}}$.

Vậy hàm số lõm trong khoảng $\left(0, ae^{\frac{3}{2}}\right)$, lồi trong khoảng $\left(ae^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ và $x_U = ae^{\frac{3}{2}}$ và $y_U = -\frac{3}{2}ae^{-\frac{3}{2}}$

Ví dụ 2: Cho f(x)=xlnx trên $(0,+\infty)$

a. Chứng minh f là lồi trên $(0,+\infty)$

b. Chứng minh $\forall x,y,a,b\in(0,+\infty)$ có $x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geq(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$

Giải:

a. $f'=\ln x+1,\quad f''=\frac{1}{x}\geq 0$. Vậy f lồi trên $(0,+\infty)$

b. Lấy $x_1=\frac{x}{a}, x_2=\frac{y}{b}$ và $\lambda=\frac{a}{a+b}$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right)\leq\frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)$$

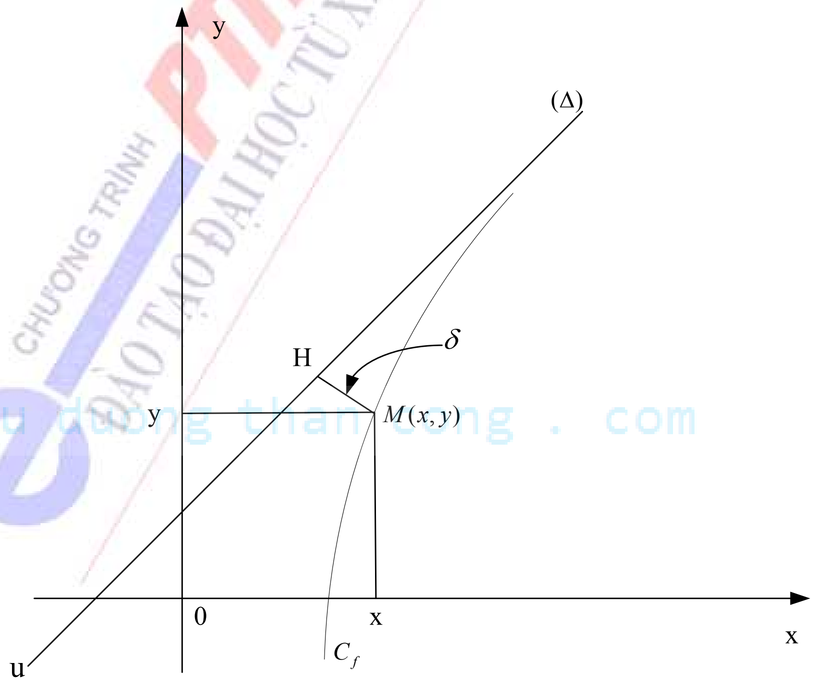
$$\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b}\leq\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}$$

hay $(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}\leq x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}$

3.9. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG

3.9.1. Khái niệm chung về tiệm cận

Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của đường cong C_f nếu như khoảng cách δ từ một điểm $M(x,y)\in C_f$ đến (Δ) dần đến 0 khi $x^2+y^2\to+\infty$ (Tức là M chạy ra vô cùng trên đường cong C_f). Xem hình 3.10



H. 3.10

Như vậy điều kiện cần để đường cong C_f có tiệm cận là đường cong đó có nhánh ra vô cùng. Hơn nữa C_f và tiệm cận của nó vẫn có thể giao nhau.

3.9.2. Phân loại và cách tìm tiệm cận

A. Tiệm cận đứng (Tiệm cận song song với trục tung)

Đường x=a là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Giới hạn trên có thể bao hàm cả trường hợp $x \to a^-, x \to a^+, y \to -\infty$, $y \to +\infty$. Ứng với từng trường hợp sẽ nhận được tiệm cận đứng ở phía trên hoặc phía dưới, bên phải hoặc bên trái đường cong C_f. Số a chính là cực điểm của hàm số.

B. Tiệm cận ngang (Tiệm cận song song với trục hoành)

Đường y=b là tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận ngang bên trái hay bên phải.

C. Tiệm cận xiên (Tiệm cận không song song với các trục toạ độ)

Đường $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ là tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \end{cases}$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận xiên bên trái hay bên phải.

Rõ ràng về phía nào đó khi đã có tiệm cận ngang y=b thì không thể có tiệm cận xiên bởi vì khi đó $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ và ngược lại.

Ví dụ: Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi phương trình

$$y = x \ln(e + \frac{1}{x})$$

Giải: Hàm số xác định khi $e + \dfrac{1}{x} > 0$ hay $(ex + 1)x > 0$. Suy ra $x < -\dfrac{1}{e}$ hoặc x>0.

Vậy tập xác định $X = (-\infty, -\dfrac{1}{e}) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{e}^-} x \ln(e + \frac{1}{x}) = +\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{e}$$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left[\ln(e+\frac{1}{x})-1\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-\frac{1}{x^2}).\frac{1}{e+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$$

Vậy $y=x+\frac{1}{e}$ là tiệm cận xiên cả hai phía.

3.10. BÀI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Những kết quả trong các mục trên dẫn đến việc khảo sát đầy đủ một hàm số về phương diện định lượng và định tính.

Sơ đồ tổng thể để khảo sát hàm số gồm các bước dưới đây

1. Tìm miền xác định f (nếu như chưa cho) và các tính chất đặc biệt của hàm số như: chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có)
2. Xét sự biến thiên của hàm số: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.
3. Tìm cực trị (nếu có)
4. Xét tính lồi, lõm của hàm số, điểm uốn (nếu có)
5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)
6. Lập bảng biến thiên
7. Vẽ đồ thị

Dưới đây ta sẽ minh họa bài toán khảo sát hàm số qua một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1: Khảo sát hàm số $y=f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

Giải:

• Tập xác định : để hàm số xác định thì $\frac{x^3}{x-1}\ge 0$ hay $\frac{x}{x-1}\ge 0$. Vậy $X=R\setminus(0,1]$

• Chiều biến thiên: $y'=(x-\frac{3}{2})\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$ trên X

$y'(x)=0$ khi $x=0, x=\frac{3}{2}$ Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		-	0 |		||	-	0	+	

$\Rightarrow y$ giảm khi x < 0 hoặc $1 < x < \frac{3}{2}$

- Cực trị: Từ bảng xét dấu của y' suy ra $x_{\min} = \frac{3}{2}$

$$y_{\min} = y(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

- Tính lồi, lõm: $y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)^5}} \geq 0, \forall x \in X \setminus \{0\}$ chứng tỏ f(x) lồi trên X.

- Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ Tiệm cận đứng x = 1.

$$f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Áp dụng công thức Taylor cho hàm $(1+x)^{\alpha}$

$$f(x) = |x| + \frac{|x|}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{|x|}{(x-1)^2} + |x|.0\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

Suy ra $\left(f(x) + x + \frac{1}{2}\right) \underset{x \to -\infty}{\to} 0$

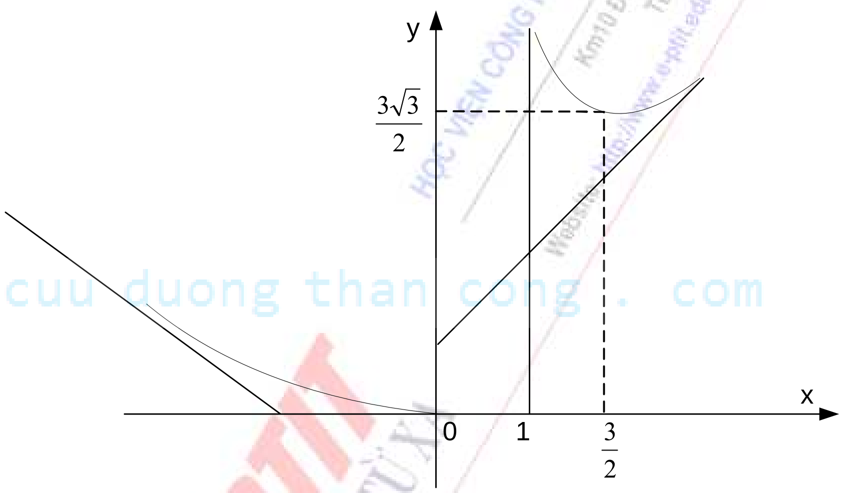
$$\left(f(x) - x - \frac{1}{2}\right) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

Vậy tiệm cận xiên $y = -x - \frac{1}{2}, y = x + \frac{1}{2}$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		-	0		‖	-	0	+	
y''		+			‖	+		+	
y	$+\infty$	↘	0		‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

- Đồ thị



Ví dụ 2: Khảo sát hàm số $y = \dfrac{x}{(1-x)(1+x)^2}$

Giải:

- Tập xác định: $X = R \setminus \{\pm 1\}$

- Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{2x^2 - x + 1}{(1+x)^2(1+x)^3}$ trên X

Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'	-	‖	+	‖	+	

Từ bảng xét dấu của y' suy ra y giảm trên $(-\infty,-1)$ y tăng trên $(-1,1)$ và $(1,+\infty)$

Ngoài ra y không đạt cực trị

- Tính lồi lõm:

$$y''=2.\frac{3x^3-3x^2+5x-1}{(1-x)^3(1+x)^4}$$

Nhận xét: Phương trình $y''=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2+5x-1=0$ có duy nhất nghiệm trong khoảng $(0,\frac{3}{2})$, gọi nghiệm đó là x_0

Vậy y lõm trên $(-\infty,-1),(-1,x_0),(1,+\infty)$

y lồi trên $(x_0,1)$ và U $(x_0,y(x_0))$ là điểm uốn.

- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=-\infty$

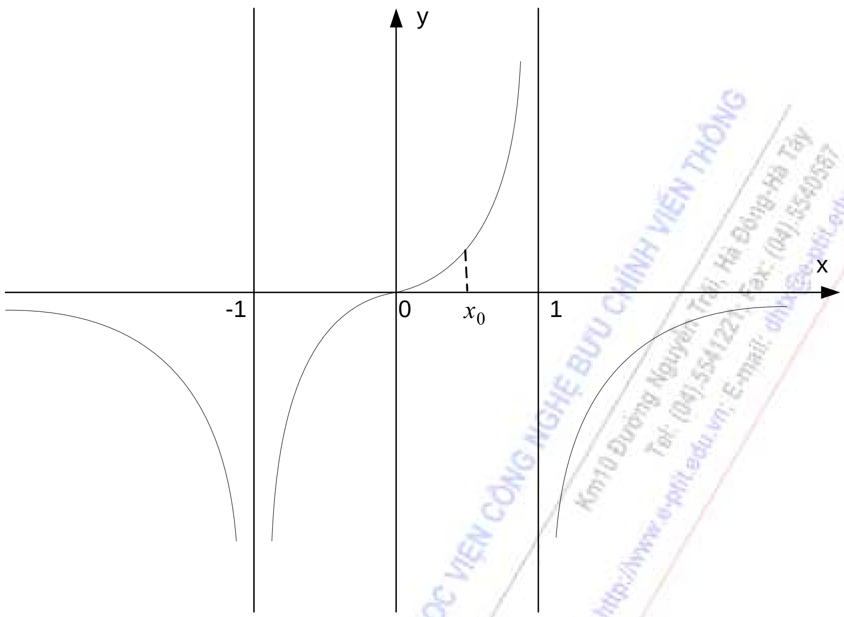
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}=-\infty$$

Nhận được các tiệm cận đứng $x=\pm 1$, ngoài ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ có tiệm cận ngang y=0.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		x_0		1		$+\infty$
y'		-	‖	+		+	‖	+	
y''		-	‖	-	0	+	‖	-	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	y_U	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

• Đồ thị



CHƯƠNG IV: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1.1. Định nghĩa tích phân xác định

Cho $f:[a,b]\to R$, $a<b$

1. Ta gọi một họ hữu hạn các điểm (x_i), $i=\overline{0,n}$ sao cho

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

là một phân hoạch (hay một cách chia) đoạn $[a,b]$ và gọi $\lambda=\underset{0\le i\le n-1}{Max}\,\Delta x_i$, trong đó $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n-1}$ là bước của phân hoạch đã chọn. Tập phân hoạch là $(\wp_n)$

2. Ta gọi một cách chọn ứng với phân hoạch là một cách lấy n điểm ξ_i, sao cho $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$

3. Ta gọi số thực $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ là tổng Rioman (Riemann) của hàm f ứng với một phân hoạch và một cách chọn.Rõ ràng với $f\in R^{[a,b]}$ sẽ có dãy vô hạn tổng Riemann σ Kí hiệu là (σ_n).

4. Nếu $\lambda\to 0$ mà $\sigma_n\to I$ hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a,b] và cách chọn các điểm ξ_i ứng với cách chia đó) thì I gọi là tích phân xác định của f trên $[a,b]$, Kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$, khi đó nói rằng f khả tích trên $[a,b]$.

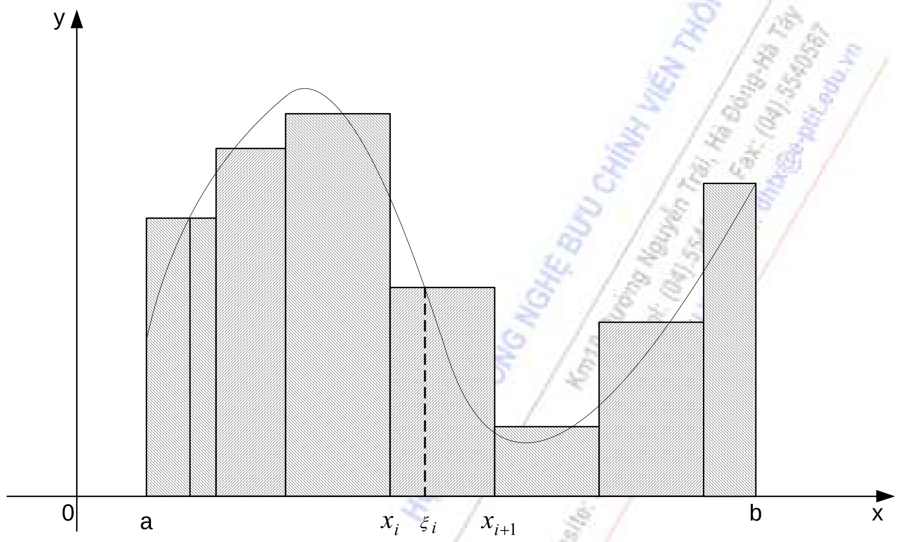
Như vậy
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4.1)$$

Trong kí hiệu trên: $\int$ là dấu lấy tích phân, $\int_a^b$ là lấy tích phân từ a đến b, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến lấy tích phân, $f(x)$ là hàm dưới dấu tích phân, dx là vi phân của biến lấy tích phân.

Chú ý:

- Chúng ta sẽ nhận được ý nghĩa hình học của tích phân xác định như sau: Nếu $f(x)\ge 0$ trên $[a,b]$ thì tổng Riemann chính là tổng diện tích các hình chữ nhật có kích thước tương ứng Δx_i và $f(\xi_i)$, $i=\overline{0,n-1}$. Đó là diện tích của hình thang gần đúng diện tích của hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, đường cong C_f của hàm số, các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Như vậy $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của hình thang cong đã mô tả ở trên, kí hiệu là hình thang $\lfloor a,b,C_f \rfloor$.

Xem hình 4.1.



H.4.1

- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Bởi vì tích phân ở vế phải cũng chính là giới hạn của dãy tổng Riemann $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, vì cả hai đều thực hiện phân hoạch $[a,b]$ với cùng một hàm số f. Như vậy tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân

- Người ta định nghĩa $\int_b^a f(x)dx$ được tính theo công thức

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

Đặc biệt $\int_a^a f(x)dx = 0$ (4.3)

4.1.2. Điều kiện tồn tại

A. Điều kiện cần

Định lí: Nếu f khả tích trên [a,b] thì f bị chặn trên [a,b]

Chứng minh: Lý luận phản chứng:

Giả sử f không bị chặn trên, khi đó lập được dãy con của (σ_n) dần đến $+\infty$ bằng cách lấy các điểm ξ_i trong lân cận không bị chặn trên của f. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn hữu hạn của

σ_n. Vậy f bị chặn trên, tương tự f cũng bị chặn dưới. Tức là tồn tại $m, M \in R$ sao cho $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$

B*. Các tổng Đácbu (Darboux)

Cho $f:[a,b] \to R$ và phân hoạch (x_i) xác định $(i = \overline{0,n})$

Đặt $m_i = \underset{[x_i,x_{i+1}]}{Inf} f$, $M_i = \underset{[x_i,x_{i+1}]}{Sup} f$, $i = \overline{0,n-1}$.

Ta gọi $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ là các tổng Darboux dưới và trên, hay tổng tích phân dưới và tổng tích phân trên của f ứng với một phân hoạch xác định.

Vì rằng $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nên $s \le \sigma \le S$.

Một phân hoạch đã định thì s, S là hằng số, tổng Riemann phụ thuộc vào $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $i = \overline{0,n-1}$. Chứng tỏ các tổng Darboux là cận dưới đúng và cận trên đúng của σ

Hệ quả 1: Nếu thêm vào điểm chia mới thì s tăng và S giảm.

Chứng minh: Giả sử thêm vào phân hoạch điểm $x' \in [x_k, x_{k+1}]$

Gọi S' là tổng Darboux mới, khác với tổng S cũ chỉ trên $[x_k, x_{k+1}]$. Hãy so sánh $M_k(x_{k+1} - x_k)$ và $M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x')$ trong đó $M_k' = \underset{[x_k,x']}{Sup} f$ và $M_k'' = \underset{[x',x_{k+1}]}{Sup} f$.

Đương nhiên $M_k' \le M_k, M_k'' \le M_k$

Vậy $\quad M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x') \le M_k(x_{k+1} - x_k)$

Chứng tỏ S giảm. Tương tự sẽ chứng minh được s tăng.

Hệ quả 2: Mọi tổng Darboux dưới không vượt quá một tổng Darboux trên.

Chứng minh: Gọi s_1, S_1 ứng với $\wp_1$; s_2, S_2 ứng với $\wp_2$. Ta sẽ chứng minh $s_1 \le S_2$. Lập $\wp_3$ gồm họ tất cả các điểm của $\wp_1$ và $\wp_2$. Theo hệ quả 1 sẽ có

$$s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2 \Rightarrow s_1 \le S_2$$

Như vậy tồn tại $I_* = Sup\{s\} \le S$

$$I^* = Inf\{S\} \ge s$$

và $s \le I_* \le I^* \le S$.

C*. Điều kiện cần và đủ để hàm khả tích

Định lí: Để cho hàm f khả tích trên [a,b] điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \qquad (4.4)$$

Chứng minh: Điều kiện trên có thể diễn đạt như sau

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta \Rightarrow S - s < \varepsilon, \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], (i = \overline{0,n-1})$$

Điều kiện cần: Giả sử hàm f khả tích, tức là σ_n dần tới I khi $\lambda \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia [a,b] và cách chọn các điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$. Nói cách khác $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma_n - I| < \varepsilon \quad \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma_n < I + \varepsilon$

Vì s,S là các cận dưới đúng và cận trên đúng của σ_n nên ta có

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon$$

Suy ra $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \lim\limits_{\lambda \to 0} S = I$. Hay là $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$

Điều kiện đủ:

Theo hệ quả 2, $\quad s \le I_* \le I^* \le S$

Nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \Rightarrow I_* = I^* = I$ và $s \le I \le S$

Mặt khác $s \le \sigma_n \le S \Rightarrow |\sigma_n - I| \le S - s \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n = I$

Thường kí hiệu $\omega_i = M_i - m_i$ gọi là dao động của f trên $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}$.

Như thế $S - s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$

Vậy để f khả tích trên [a,b] cần và đủ là

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 \tag{4.5}$$

4.1.3. Lớp các hàm khả tích.

Định lí 1: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó

Chứng minh: Giả sử f liên tục trên [a,b] khi đó f liên tục đều trên [a,b], tức là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta x_i < \delta \Rightarrow \omega_i < \varepsilon.$$

Vậy $\forall \lambda, \lambda < \delta$ sẽ nhận được

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a) \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$$

Định lí 2: Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.

Chứng minh: Giả sử $f(x)$ đơn điệu tăng, vậy $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0, \forall \Delta x_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$$

Hệ quả: Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó. Dưới đây ta đưa ra các định lí và sẽ không chứng minh, về một lớp hàm khả tích, lớp hàm này chứa tất cả các lớp hàm đã xét ở trên.

Định lí 3: Nếu $f(x)$ bị chặn trên [a,b] và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn thì $f(x)$ khả tích trên [a,b].

Định lí 4: Nếu $f(x)$ khả tích trên [a,b] thì $|f(x)|, k.f(x)$ $(k = const)$ cũng khả tích trên [a,b].

Định lí 5: Nếu f, g khả tích trên [a,b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a,b].

Định lí 6: Nếu f khả tích trên [a,b] thì khả tích trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Ngược lại nếu [a,b] được tách ra thành một số đoạn và trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì f khả tích trên [a,b].

4.1.4. Các tính chất của tích phân xác định

A. Tính chất

Cho f, g khả tích trên [a,b] và a<b, λ là hằng số.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a,b)$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. Nếu $f(x) \geq 0$ trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \geq 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ và $f(x_0) > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$

Thật vậy $\exists \Omega_\delta(x_0)$ để $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0), \forall x \in \Omega_\delta(x_0)$

Xét $e(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & x \in \Omega_\delta(x_0) \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \Omega_\delta(x_0) \end{cases}$

Suy ra $f(x) \geq e(x), \forall x \in [a,b]$. Theo 5.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b e(x)dx = \frac{1}{2}f(x_0).2\delta > 0$$

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

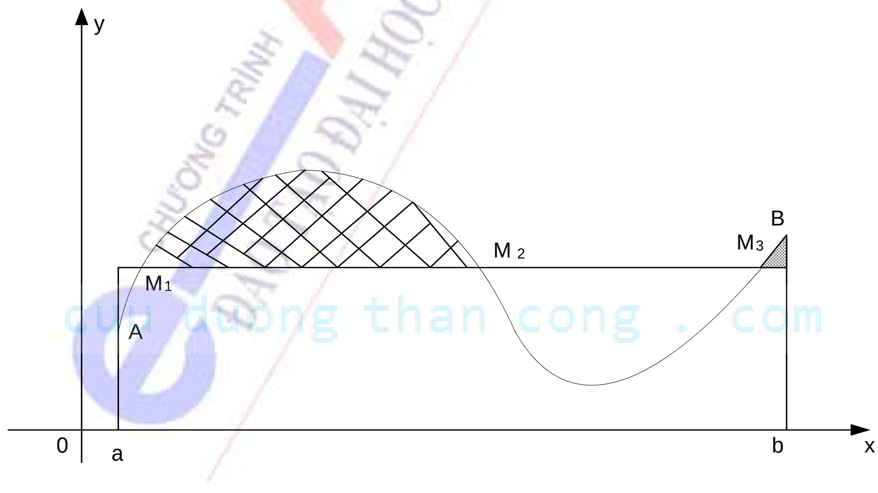
Gọi μ là giá trị trung bình của f trên [a,b], khi đó ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] theo định lí 2 của mục 2.4.3 sẽ tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f(c)$.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Như vậy trên đường cong C_f đồ thị của hàm $f(x) \geq 0$ trên [a,b] bao giờ cũng tìm được điểm $M(c, f(c))$ để hình chữ nhật có kích thước b-a và $f(c)$ có diện tích bằng diện tích của hình thang cong $[a,b,C_f]$. Xem hình 4.2



H.4.2

B. Định lí tổng quát về giá trị trung bình

Định lí: Cho f, g khả tích trên [a,b], a<b, $g(x) \geq 0$ hoặc $g(x) \leq 0$ trên [a,b] và $m \leq f(x) \leq M$. Khi đó tồn tại $\mu \in [m, M]$ để cho $\int_a^b f(x).g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. (4.6)

Nếu thêm điều kiện $f(x)$ liên tục thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad (4.7)$$

Chứng minh: Giả sử $g(x) \leq 0$ trên [a,b], khi đó $\int_a^b g(x)dx \leq 0$ và

$$mg(x) \geq f(x).g(x) \geq Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x).g(x)dx \geq M\int_a^b g(x)dx$$

Nếu $\int_a^b g(x)dx = 0$ thì $\int_a^b f(x).g(x)dx = 0 \Rightarrow$ Công thức đúng $\forall \mu$

Nếu $\int_a^b g(x)dx < 0$ thì $m \leq \dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}.\int_a^b f(x).g(x)dx \leq M$

Đặt $\mu = \dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}.\int_a^b f(x).g(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x).g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$

Khi $f(x)$ liên tục trên [a,b], sẽ $\exists c \in [a,b]$ để $f(c) = \mu$

và ta có $\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Trường hợp $g(x) \geq 0$ được chứng minh tương tự.

C. Bất đẳng thức Côsi-Svác(Cauchy-Schwarz) đối với tích phân

Định lí: Nếu f, g liên tục từng khúc trên [a,b] thì khi đó

$$\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx.$$

Chứng minh: $\forall \lambda \in R$ có $\int_a^b (\lambda f + g)^2 dx \geq 0$

hay $\left(\int_a^b f^2dx\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \geq 0$

Giả sử $\int_a^b f^2dx = 0$

Nếu $\int_a^b fgdx > 0$ thì $2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \xrightarrow[d\to-\infty]{} -\infty$ mâu thuẫn

Nếu $\int_a^b fgdx < 0$ thì $2\left(\int_a^b fgdx\right)\lambda + \int_a^b g^2dx \xrightarrow[d\to+\infty]{} -\infty$ mâu thuẫn

Vậy $\int_a^b f.gdx = 0$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử $\int_a^b f^2dx > 0$. Theo tính chất của tam thức bậc 2 suy ra

$$\Delta' = \left(\int_a^b f.gdx\right)^2 - \int_a^b f^2dx.\int_a^b g^2dx \leq 0$$

Từ đó nhận được bất đẳng thức cần chứng minh.

4.1.5. Công thức Niutơn-Lépnít (Newton-Leibnitz).

A. Hàm tích phân của cận trên

Cho $f(x)$ khả tích trên [a,b]. Lấy x_0 cố định, $x_0 \in [a,b]$. Cho $x \in [a,b]$ khi đó theo định lí 6 thì hàm $f(x)$ khả tích trên $[x_0, x]$ với x tuỳ ý trong [a,b]. Hàm số

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{4.8}$$

gọi là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên

Định lí 1: $\phi(x)$ là hàm liên tục trên [a,b]

Chứng minh: Lấy $x \in (a,b)$ và $h \in R^*$ sao cho $x + h \in [a.b]$ xét số gia hàm số tại x:

$$\Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \mu h$$

trong đó $\underset{[a,b]}{Inf} f \leq \underset{[x,x+h]}{Inf} f \leq \mu \leq \underset{[x,x+h]}{Sup} f \leq \underset{[a,b]}{Sup} f$ (Theo tính chất 8.)

Từ đó $\Delta\phi(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, vậy $\phi(x)$ liên tục tại $x \in (a,b)$

Chú ý: Cũng tương tự như trên ta sẽ chứng minh $\phi(x)$ liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Định lí 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì $\phi(x)$ khả vi trên [a,b] và có

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]. \tag{4.9}$$

Chứng minh:

Lấy $x \in (a,b)$ ta có $\dfrac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \mu$, với h khá bé và $\mu \in \left[\underset{[x,x+h]}{Inf} f, \underset{[x,x+h]}{Sup} f\right]$

Vì $f(x)$ liên tục tại x nên khi $h \to 0$ thì $\underset{[x,x+h]}{Inf} f$ và $\underset{[x,x+h]}{Sup} f$ cùng dần đến $f(x)$, do đó μ cũng dần đến $f(x)$ .Theo định nghĩa của đạo hàm, giới hạn đó chính là $\phi'(x)$

Vậy $\quad \phi'(x) = f(x)$

Đương nhiên $\phi_p'(a) = f(a)$, $\phi_t'(b) = f(b)$

Hệ quả:

Nếu $\alpha(x), \beta(x)$ khả vi trên X, $f(x)$ liên tục trên X và $[\alpha(x), \beta(x)] \subset X \ \forall x \in X$ thì $G(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ khả vi trên X và

$$G'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \tag{4.10}$$

B. Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định

Cho $f, F : X \to R$. Gọi F là một nguyên hàm của f trên X nếu F khả vi trên X và ta có $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Định lí: Nếu $f(x)$ liên tục trên X thì sẽ có nguyên hàm trên X và nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của f là $\{F(x) + C \ , \ C \in R\}$

Chứng minh: Theo định lí 2, rõ ràng tồn tại nguyên hàm của $f(x)$ là

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \Rightarrow \phi(x) \in C^1$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của f trên X thì $F(x) + C$, $\forall C \in R$ cũng là nguyên hàm của f vì

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in X.$$

Ngược lại nếu ϕ là một nguyên hàm nào đó của f trên X thì $F(x) - \phi(x)$ khả vi trên X, ngoài ra

$$(F(x) - \phi(x))' = f(x) - f(x) = 0 \text{ trên } X$$

$$\Rightarrow F(x) - \phi(x) = const \Rightarrow \phi(x) = F(x) + C \text{ trong đó } C \in R.$$

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ trên X gọi là tích phân bất định của $f(x)$, Kí hiệu $\int f(x)dx$. Vậy

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (4.11)$$

Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X.

C. Công thức Newton-Leibnitz.

Định lí: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] có một nguyên hàm là $F(x)$ trên [a,b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4.12)$$

Đại lượng $F(b) - F(a)$ được kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ gọi là biến phân từ a đến b của $F(x)$.

Chứng minh: Theo định lí trên, tồn tại $C \in R$ sao cho

$$F(x) = \phi(x) + C, \text{ trong đó } \phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(b) = \phi(b) + C = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(x)dx + C$$

$$F(a) = \phi(a) + C = C$$

Vậy $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Chú ý: Công thức Newton-Leibnitz cho cách tính tích phân của các hàm liên tục bằng cách tìm một nguyên hàm của hàm số đó rồi tính biến phân của nó từ a đến b.

Ví dụ 1: Từ định nghĩa hãy tính $\int_a^b \sin x dx$

Giải:

Hàm $f(x) = \sin x$ liên tục trên [a,b] vậy khả tích trên đó. Thực hiện một phân hoạch với $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ và chọn $\xi_i = a + i.h \quad (i = \overline{1,n})$ vậy tổng Riemann là

$$\sigma = h.\sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih)$$

Theo ví dụ 7 mục 1.2.3 nhận được

$$\sigma = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left\{\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(b + \frac{1}{2}h\right)\right\}$$

Cho $h \to 0 \Leftrightarrow \lambda \to 0$ thì $\sigma \to \cos a - \cos b$ vậy

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

Ví dụ 2*: Xuất phát từ định nghĩa, hãy tính $\int_a^b x^\mu dx$ với $b > a > 0, \mu \in R$.

Giải:

Hàm x^μ khả tích trên [a,b] vì liên tục trên [a,b]. Thực hiện một phân hoạch (x_i) $i = \overline{0,n} : x_i = aq^i$ trong đó $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, tức là:

$$a < aq < ... < aq^i < ... < b = aq^n$$

$$\Delta x_i = aq^i(q-1) < b(q-1) \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Chọn $\xi_i = aq^i$ (đầu mút bên trái của $[aq^i, aq^{i+1}]$ với $i = \overline{0, n-1}$).Suy ra

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu \Delta x_i = a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i$$

Nếu $\mu = -1$ sẽ có:

$$\sigma = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{b}{a}, \text{ Xem công thức (2.6)}$$

Nếu $\mu \neq -1$ sẽ có:

$$\sigma = a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = \left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right)\frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1}$$

Sử dụng qui tắc L'Hospital, dễ dàng suy ra

$$\sigma \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mu+1}\left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right).$$

Vậy $$\int_a^b x^\mu dx = \begin{cases} \ln b - \ln a & \text{nếu } \mu = -1 \\ \dfrac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} & \text{nếu } \mu \neq -1 \end{cases}$$

Ví dụ 3*: Tính giới hạn dãy số cho bởi số hạng tổng quát

a. $$u_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha}}\left(n^{\alpha - \frac{1}{\alpha}} + k^{\alpha - \frac{1}{\alpha}}\right), \quad \alpha \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$$

b. $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{\pi}{k}$

c. $\omega_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$

Giải:

a. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$

Đó là các tổng Riemann của hàm $x^{\frac{1}{\alpha}}$ và x^{α} khả tích trên $[0,1]$ ứng với phân hoạch $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ và cách chọn $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}}dx + \int_0^1 x^{\alpha}dx = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha+1} = 1$

b. Đặt $v_n' = \sum_{k=n}^{2n}\frac{\pi}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+l} = \frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{l}{1+\frac{l}{n}}$

$v_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\ln(1+x)\Big|_0^1 = \pi\ln 2$

$\forall n \in N^*,\ |v_n - v_n'| \le \sum_{l=0}^{n}\left|\sin\frac{\pi}{n+l} - \frac{\pi}{n+l}\right|$

Với $x > 0$ khá bé, từ công thức Taylor suy ra $|\sin x - x| \le \frac{x^3}{6}$

Vậy $|v_n - v_n'| \le \frac{\pi^3}{6}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{(n+l)^3} \le \frac{\pi^3 n}{6n^3} = \frac{\pi^3}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Suy ra $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\ln 2$

c. Trước hết, nhờ vào định lí 2 ở mục 3.6.1 có thể chứng minh rằng

$\forall x \in R_+$ thì $0 \le e^x - 1 - x \le e^x.\frac{x^2}{2}$

$$\left|\omega_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{n+k}}}{2(n+k)^2} \le \frac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{2(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

mà $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2$

Vậy $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \ln 2$.

Ví dụ 4: Cho $f:[0,1]\to[0,1]$, f liên tục, khác không và

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx$. Chứng minh $f=1$

Giải:

Xét $\int_0^1 f(1-f)dx = \int_0^1 f.dx - \int_0^1 f^2dx = 0$,theo giả thiết $f(1-f)\geq 0$ và $f(1-f)$ liên tục trên [0,1]. Từ tính chất 6 suy ra $f(1-f)=0 \quad \forall x\in[0,1]$. Vì $f\neq 0$ suy ra

$f=1 \quad \forall x\in[0,1]$.

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2}$

Giải:

Với x dương khá lớn sẽ có $(\ln x)^2 \leq (\ln x^2)^2$

Theo tính chất 8 nhận được. $\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} \geq \frac{x^2-x}{(\ln x^2)^2} \to +\infty$ (Dùng qui tắc L'Hospital)

Vậy $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2} = +\infty$.

Ví dụ 6*: Cho $f:[a,b]\to R$, f liên tục từng khúc và $f\geq 0$ thoả mãn $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh $f(x)=0$ trừ ra một số hữu hạn điểm:

Giải:

Vì f liên tục từng khúc nên tồn tại $a_0, \dots, a_n$ để f liên tục trên (a_i, a_{i+1}), i=$\overline{0,n-1}$.

Theo tính chất 1, sẽ có:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = 0$$

Do $f(x)\geq 0$, suy ra $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) = 0$, $i=\overline{0,n-1}$ mà $f(x)$ liên tục trên (a_i,a_{i+1}) suy ra $f(x)=0$, $\forall x\in(a_i,a_{i+1})$ chứng tỏ $f(x)=0$ có thể trừ ra các điểm a_i, $i=\overline{0,n}$

4.2. HAI PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.2.1. Phép đổi biến

Định lý 1: Nếu $\varphi:[\alpha,\beta]\to R$ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to R$ thuộc lớp C^0 trên [a,b]

và $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$. Khi đó:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \qquad (4.13)$$

Chứng minh: Theo giả thiết $f\in C^0$ suy ra tồn tại nguyên hàm của nó $F(x)\in C^1$.

Theo công thức Newton - Leibnitz nhận được:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$$

Theo định lý về hàm hợp ta có $F(\varphi(t))\in C^1$ trên $[\alpha,\beta]$ và

$\{F(\varphi(t))\}'=F'_{\varphi}.\varphi'(t)=f(\varphi).\varphi'(t)$ .Chứng tỏ $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi).\varphi'(t)$.

Vậy tích phân vế trái là $F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$. Chứng tỏ phép biến đổi tích phân $x=\varphi(t)$ đã được chứng minh.

Định lý 2: Nếu $\varphi:[\alpha,\beta]\to R$ với φ đơn điệu và thuộc lớp C^1 trên $[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to R$ $f\in C^0$ trên [a,b]

với $t=\varphi(x)$ mà $f(x)dx=g(t)dt, g\in C^0$ trên $[\varphi(a),\varphi(b)]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt \qquad (4.14)$$

Định lý ở đây được chứng minh tương tự như định lý 1, ở đây đã thực hiện phép đổi biến tích phân $t=\varphi(x)$.

Chú ý: Khi thực hiện phép đổi biến, nhận được tích phân có cận mới. Tuỳ theo các hàm dưới dấu tích phân mà chọn một trong hai cách đổi biến.

4.2.2. Phép tích phân từng phần

Định lý: Nếu $u,v:[a,b]\to R$ và $u,v\in C^1$ trên [a,b] thì:

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx=u(x).v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u(x).v'(x)dx \qquad (4.15)$$

Chứng minh: Nếu $u, v \in C^1$, dễ dàng nhận được công thức sau:

$$\int u'.v dx = u.v - \int u.v' dx$$

Thật vậy $(u.v)' = u'.v + u.v' \quad \Rightarrow \quad u.v = \int u'v dx + \int u.v' dx$

Suy ra $\int_a^b u'v dx = u.v\Big|_a^b - \int_a^b u.v' dx$

Ví dụ 1: Chứng minh các công thức dưới đây:

a. Cho $f \in C^0$ trên [0, a] thì $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

b. Cho $f \in C^0$ trên [0, 1] thì: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

c. Cho $f \in C^0$ trên [-a, a] thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn} \end{cases}$$

d. Cho $f \in C^0$ trên $(-\infty, +\infty)$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \qquad \forall a \in R$$

Giải:

a. Đổi biến x = a – t

b. Đổi biến x = $\frac{\pi}{2} - t$ và đổi biến x = $\pi - t$

c. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

Đổi biến x = - t, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$

$f(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

$f(x)$ là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(x) = f(-x), \quad \forall x \in [0,a]$. Do đó: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

d. $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{a}^{a+T} f(x)dx$$

Đổi biến x = t + T và nhớ rằng $f(x+T) = f(x)$ sẽ có:

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t+T)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(x)dx$$

suy ra $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $$I_1 = \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

b. $$I_2 = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Giải:

a. Đổi biến $x = a\sin t$, $x \in [0,a] \Rightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |a|\cos t\, a\cos t\, dt = a|a|\frac{\pi}{4}$$

b. Đổi biến $t = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [1,0]$

$$I_2 = -\int_{1}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 3*: Tính $I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Giải:

Đổi biến $x = tg\varphi$, $x \in [0,1] \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+tg\varphi)}{\frac{1}{\cos^2\varphi}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi}d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\,d\varphi$$

Đổi biến $\varphi = \frac{\pi}{4} - t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt$$

$$I = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$$

Ví dụ 4: Cho $a \in R_+^*$, $f:[0,a] \to R$, liên tục sao cho $f(x) \neq -1$ và

$f(x).f(a-x) = 1, \forall x \in [0,a]$. Tính $\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$

Giải:

Đổi biến $x = a - t$

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = -\int_a^0 \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}}$$

$$= \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)}dt \Rightarrow 2\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx = \int_0^a dx = a$$

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{a}{2}$$

Ví dụ 5*: Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = 0$

Giải:

Đổi biến $y = \frac{x}{n^{\frac{2}{3}}}$

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = \int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{n^{\frac{2}{3}}dy}{\sqrt{n^2(1+y^3)}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}}$$

Ta có $\int_{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \leq \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \leq \int_0^1 dy = 1$

$$\int_1^{n^{\frac{1}{3}}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} \le \int_1^{n^{\frac{1}{3}}} y^{-\frac{3}{2}} dy = 2 - \frac{2}{n^{\frac{1}{6}}} \le 2$$

Vậy $\forall n \in N^*$ $\quad 0 \le \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} \le \frac{3}{n^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ví dụ 6*: (Tích phân Wallis)

a. Tính $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in N$

b. Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ từ bất đẳng thức $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$

Hãy chứng minh $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 . \frac{1}{2n+1}$

(Công thức Wallis)

Giải:

a. Đặt $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = (n-1)\cos^{n-2} x \sin x\, dx$, $v = \sin x$

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}, \quad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}.\frac{2m-3}{2(m-2)} \ldots \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1} = \frac{m}{2m+1}.\frac{2(m-2)}{2m-1} \ldots \frac{2}{3}.1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \quad \text{gọi là tích phân Wallis}$$

b. Lấy tích phân bất đẳng thức kép sẽ có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

Theo tích phân Wallis nhận được

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Hay $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 . \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 . \dfrac{1}{2n}$

$$a_n < \frac{\pi}{2} < b_n .$$

Trong đó $a_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1}$, $b_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n}{2n+1} < a_n < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_n \to \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 7*: Chứng minh: $\forall f \in C^1$ có

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx dx = 0$$

Giải:

Xét $I_n = \int_a^b f(x) e^{inx} dx$

Tích phân từng phần

$$I_n = f(x)\frac{e^{inx}}{in}\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{e^{inx}}{in} dx$$

$$= \frac{1}{in}\left(f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}\right) - \frac{1}{in}\int_a^b f'(x)e^{inx} dx$$

$$\Rightarrow |I_n| \le \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow I_n \to 0 \Rightarrow \text{Re}.I_n \to 0 \text{ và } \text{Im} I_n \to 0$$

Mà $\text{Re} I_n = \int_a^b f(x)\cos nx dx$ và $\text{Im} I_n = \int_a^b f(x)\sin nx dx$

Vậy bài toán được chứng minh.

4.3. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta đã biết rằng $\int f(x)dx = F(x) + C$ trên X Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X và C là hằng số tuỳ ý.

4.3.1. Bảng các nguyên hàm thông dụng

Tính chất cơ bản của tích phân bất định.

Trước hết thấy ngay rằng các tính chất sau đây của tích phân bất định là hiển nhiên.

Cho f, g có nguyên hàm, $\lambda \in R$

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int \lambda.f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

4. Nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì $f(u(x))u'(x)$ có một nguyên hàm là $F(u(x))$ nếu $u \in C^1$, tức là

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $F(x)$	Tập xác định X
$x^\alpha, \alpha \in R\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	R_+^*
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	R^*
$a^{\alpha x}, \alpha \in R^*, 0 < a \neq 1$	$\dfrac{1}{\alpha \ln a} a^{\alpha x}$	R
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	R
$\cos x$	$\sin x$	R
$\sin x$	$-\cos x$	R
chx	shx	R
shx	chx	R
tgx	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$
$\cot gx$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$R\setminus\{k\pi, k \in Z\}$
thx	$\ln chx$	R

$\coth x$	$\ln\lvert shx\rvert$	R^*
$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$	tgx	$R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot g^2x$	$-\cot gx$	$R\setminus\{k\pi, k\in Z\}$
$\dfrac{1}{ch^2x}=1-th^2x$	thx	R
$\dfrac{1}{sh^2x}=\coth^2 x-1$	$-\coth x$	R^*
$\dfrac{1}{a^2+x^2}, a\in R^*$	$\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}$	R
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$R\setminus\{-1,1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	R
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a\in R^*$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	$R\setminus\{-a,a\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$R\setminus[-1,1]$

4.3.2. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định

A. Phương pháp tích phân từng phần

Cho $u,v\in C^1$ trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x)=u(x).v(x)-\int v(x)du(x) \quad \text{trên } X \tag{4.16}$$

Chú ý:

• Phương pháp này thường áp dụng tính các tích phân các hàm số có dạng sau đây: $k\in N^*$, $\alpha,\beta\in R^*$, $P(x)$ là đa thức $P(x)\ln^k x$, $P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\sin\alpha x$, $P(x)\cos\alpha x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)arctgx$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$

• Để tính $\int P(x)\cos\alpha x dx$ hoặc $\int P(x)\sin\alpha x dx$ ta có thể tính $\int P(x)e^{i\alpha x}dx$ sau đó tìm phần thực và phần ảo.

• Để tính $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định.

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx=Q(x)e^{\alpha x}+C$$

Trong đó $\deg P(x)=\deg Q(x)$

• Trong quá trình tính toán có thể phải lặp lại một số hữu hạn lần phương pháp tích phân từng phần.

B. Phương pháp đổi biến số

Đặt $x=\varphi(t)$, với φ đơn điệu và $\varphi\in C^1$ trên Y khi đó

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \tag{4.17}$$

Đặt $t=\psi(x)$ khi đó $f(x)dx=g(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)} \tag{4.18}$$

Chú ý:

Đổi biến số để tính nguyên hàm theo biến mới dễ dàng hơn. Trong kết quả phải trở về biến lấy tích phân bất định ban đầu. Điều này khác hẳn khi tính tích phân xác định.

Ví dụ 1: Tính a. $I_1(x)=\int x^3\cos x dx$

b. $I_2(x)=\int (x+3)e^x\cos 3x dx$

Giải:

a. Đặt $J_1(x)=\int x^3\sin x dx$

$I_1+iJ_1=\int x^3e^{ix}dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{ix}+C$ $a,b,c,d\in C$, C là hằng số phức tuỳ ý

Lấy đạo hàm nhận được

$\forall x\in R$, $i(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c)=x^3$

$$\begin{cases} ia=1\\ ib+3a=0\\ ic+2b=0\\ id+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-i\\ b=3\\ c=6i\\ d=-6\end{cases}\Rightarrow I_1+iJ_1=(-ix^3+3x^2+6ix-6).(\cos x+i\sin x)+C$$

So sánh phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo suy ra

$I_1(x)=(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x+C_1$

$J_1(x)=(-x^3+6x)\cos x+(3x^2-6)\sin x+C_2$ $\qquad C_1,C_2\in R$

b. Đặt $J_2(x)=\int (x+3)e^x\sin 3x dx$

$I_2+iJ_2=\int (x+3)e^{(1+3i)x}dx=(ax+b)e^{(1+3i)x}+C$

$\Rightarrow \forall x\in R, (1+3i)(ax+b)+a=x+3$

$$\begin{cases}(1+3i)a=1\\ (1+3i)b+a=3\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1-3i}{10}, b=\frac{19-42i}{50}$$

$$I_2(x) = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1-3i}{10}x + \frac{19-42i}{50}\right)e^x(\cos 3x + i\sin 3x)\right\} + C$$

$$= \frac{e^x}{10}\left\{\left(x + \frac{19}{5}\right)\cos 3x + \left(3x + \frac{42}{5}\right)\sin 3x\right\} + C$$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

a. $I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

b. $I_2 = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Giải:

a. Đặt $x = t^2$, $t > 0$, $dx = 2tdt$

$$I_1 = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctg\sqrt{x} + C$$

b. Đặt $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$

$$I_2 = \int \frac{\sin t}{t^2}.3t^2dt = 3\int \sin tdt = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$$

Ví dụ 3: Tính: $I = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}dx$

Giải:

Đặt $t = \sqrt{x+1}$, $dx = 2tdt$

$$I = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = \int\left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{\sqrt{x+1}+x+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

Ví dụ 4: Tính: $I = \int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$

Giải:

Đặt $\sqrt{2x+1} = t$, $dx = tdt$

$$I = \int 3^t tdt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^t dt = \frac{t.3^t}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}3^t + C$$

$$= \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{(\ln 3)^2}\left(\sqrt{2x+1}.\ln 3 - 1\right) + C$$

4.3.3. Cách tính tích phân bất định của các hàm số hữu tỉ

Nhận xét:

• Nếu hàm hữu tỉ có dạng $f(x)=x^{n-1}\dfrac{P(x^n)}{Q(x^n)}$, $n\in N\setminus\{0,1\}$, bằng cách đổi biến $t=x^n$ sẽ có

$$\int f(x)dx=\frac{1}{n}\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

Như vậy ta đã hạ thấp bậc của các đa thức có mặt trong hàm f

• Mọi hàm hữu tỉ (đôi khi gọi là phân thức hữu tỉ) không thực sự đều phân tích thành tổng của một đa thức với một phân thức hữu tỉ thực sự.

• Sử dụng định lí 2 trong mục 2.1.2 và tính chất của tích phân bất định, thấy rằng quá trình tích phân các hàm hữu tỉ là quá trình tích phân các phân thức tối giản.

Dưới đây ta trình bày phương pháp tích phân các phân thức tối giản thực sự.

A. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất

$$I=\int\frac{dx}{(x-a)^n}\ ,\ a\in R$$

- Nếu $n=1$ thì $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$

  Với $C=const$ khi xét $x<a$ hoặc $x>a$

- Nếu $n\in N^*\setminus\{1\}$ thì $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}.\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$

B. Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai

$$I=\int\frac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}dx\ ,\ \lambda,\mu,a,b,c\in R \text{ và } b^2-4ac<0, n\in N^*$$

- Nếu $\lambda=0$

$$I=\mu\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Biến đổi $ax^2+bx+c=-\dfrac{\Delta}{4a}\left\{1+\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right\}, \Delta=b^2-4ac$

Thực hiện đổi biến $t=\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$

Suy ra $I = \mu\left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$

Dẫn đến tính $J_n(t) = \int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ bằng phương pháp truy toán.

Trước hết $J_1(t) = \int\frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C$

Tích phân từng phần sẽ có

$$J_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$J_n = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n(J_n - J_{n+1})$$

$$2nJ_{n+1} = (2n-1)J_n + \frac{t}{(1+t^2)^n}$$

Chú ý:

Có thể tính J_n bằng phép đổi biến $\theta = arctgt \Rightarrow dt = (1+tg^2\theta)d\theta$

$$J_n = \int\frac{d\theta}{(1+tg^2\theta)^{n-1}} = \int\cos^{2(n-1)}\theta\, d\theta$$

Tuyến tính hoá $\cos^{2(n-1)}\theta$ (phần B mục 1.2.3) rồi tính nguyên hàm, sau đó trở về biến t.

- Nếu $\lambda \neq 0$.

$$I = \frac{\lambda}{2a}\int\frac{2ax + \frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda} - b\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Tích phân thứ nhất tính được nhờ phép đổi biến $u = ax^2 + bx + c$

$$\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \int\frac{du}{u^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C$$

Tích phân thứ hai tính theo J_n đã trình bày ở trên.

Ví dụ 5: Tính $I = \int\frac{dx}{x^3+1}$ và $J = \int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$

Giải:

Phân tích $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}.\frac{x-2}{x^2-x+1}$

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}I_1$$

Trong đó $I_1 = \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

Cuối cùng $I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

Bằng phép tích phân từng phần sẽ có

$$I = \frac{x}{x^3+1} + 3\int \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = \frac{x}{x^3+1} + 3(I-J)$$

Suy ra $J(x) = \frac{1}{3}\left(2I + \frac{x}{x^3+1}\right)$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{3(x^3+1)} + C$$

4.3.4. Tính nguyên hàm các phân thức hữu tỉ đối với một số hàm thông dụng

A. Hàm hữu tỉ đối với sin và côsin

1. Trường hợp tổng quát.

Xét $\int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó R là "phân thức hữu tỉ hai biến"

Thực hiện phép đổi biến: $t = tg\frac{x}{2}$. Khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\quad,\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\quad,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Khi đó đưa về dạng $\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$

Tuy nhiên bậc của $P(t)$ và $Q(t)$ thường là cao, làm cho quá trình tính toán rất nặng nhọc. Sau đây ta xét một số trường hợp đặc biệt, với cách đổi biến thích hợp sẽ tính toán dễ dàng hơn.

2. Trường hợp đặc biệt thứ nhất.

- Nếu $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = tgx$ hoặc $t = \cot gx$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = \sin x$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$ thì đổi biến $t = \cos x$

3. Trường hợp đặc biệt thứ hai.

Khi $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x.\cos^n x\ ,\ \ m, n \in Z$

- Nếu m lẻ thì đổi biến $t = \cos x$
- Nếu n lẻ thì đổi biến $t = \sin x$
- Nếu m, n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t = tgx$
- Nếu m, n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

Ví dụ 6: Tính $I = \int \frac{dx}{a + \cos x}$, $a > 1$

Giải:

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$ thì $I = \int \frac{2dt}{(a+1) + (a-1)t^2}$

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} arctg\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} tg\frac{x}{2}\right) + C$$

Ví dụ 7: Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 5}$

Giải:

Đổi biến $t = tg\frac{x}{2}$

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4.\frac{2t}{1+t^2} + 3.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2}$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C$$

Ví dụ 8: Tính các tích phân sau.

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

b. $I_2 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$

c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

d. $I_4 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Giải:

a. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$, đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

b. $I_2 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$, đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$

$$I_2 = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int (1-t^2) t^2 dt = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

c. $I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$, đặt $t = tgx$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 (1+t^2) dt$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

d. $I_4 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 3x + C$$

Ví dụ 9*: Tính $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{2 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$

Giải:

Đặt $x = \cos t$, $x \in [-1,1]$, $t \in [\pi, 0]$

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2 + \sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2} \right)} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{2\left(1 + \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)}$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{2\cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1}{2\left(1 + \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)} dt$$

Đặt $\theta = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}$, $t \in [0, \pi]$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$I = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2\theta - 1}{2(1+\cos\theta)} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(\cos^2\theta - 1) + 1}{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta - 1) d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 4\left(\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2tg\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - \pi + 2tg\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\sqrt{2} - \pi + 2(\sqrt{2} - 1) = 4\sqrt{2} - \pi - 2 \ \text{ (sử dụng } tg2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi}\text{)}$$

B. Hàm hữu tỉ đối với shx và chx

Vì đạo hàm của các hàm shx và chx tương tự như các hàm $\sin x$ và $\cos x$, mà $\int R(\sin x, \cos x)dx$ có phép đổi biến tương ứng là $t = tg\frac{x}{2}$, $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = tgx$, cho nên $\int R(shx, chx)dx$ có phép đổi biến tương ứng là

$$t = th\frac{x}{2} \ , \ t = chx \ , \ t = shx \ , \ t = thx$$

Ví dụ 10: Tính các tích phân sau

a. $I_1 = \int \frac{sh^2x}{chx(2sh^3x + 3ch^2x)} dx$

b. $I_2 = \int \frac{sh^3x}{chx(2 + sh^2x)} dx$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với shx và chx nên đặt

$$t = thx, dt = (1 - th^2x)dx$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{sh^2x}{ch^2x.ch^2x}}{2th^3x + 3} dx = \int \frac{th^2x(1 - th^2x)}{2th^3x + 3} dx$$

$$= \int \frac{t^2}{2t^3+3}dt = \frac{1}{6}\ln\left|2t^3+3\right| + C = \frac{1}{6}\ln(3+2th^3x) + C$$

b. Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với shx, ta đặt $t = chx$, $dt = shx$

$$I_2 = \int \frac{sh^2x.shx.dx}{chx(2+sh^2x)} = \int \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt = \int\left(-\frac{1}{t}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= -\ln|t| + \ln(t^2+1) + C = -\ln chx + \ln(2+sh^2x) + C$$

Ví dụ 11: Tính các tích phân sau.

$$A = \int ch(n+1)x.sh^{n-1}xdx \ , \qquad B = \int sh(n+1)x.sh^{n-1}xdx$$

Giải:

$$A+B = \int e^{(n+1)x}\left\{\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right\}^{n-1}dx = \int\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\right\}^{n-1}e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right)\right\}^{n} + C_1 = \frac{1}{n}e^{nx}sh^n x + C_1$$

$$A - B = \frac{1}{n}e^{-nx}sh^n x + C_2$$

Suy ra $A = \dfrac{1}{n}chnx.sh^n x + C$, $\quad B = \dfrac{1}{n}shnx.sh^n x + C$

C. Hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$

Xét $I = \int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Thực hiện phép đổi biến $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$, Khi đó

$$I = \frac{1}{\alpha}\int\frac{f(t)}{t}dt$$

Đó là tích phân của hàm hữu tỉ đã xem xét trong phần A.

D. Hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Xét $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ trong đó $R(x,y)$ là hàm hữu tỉ của hai biến x, y

Với $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ thoả mãn điều kiện $ad \neq bc$

Thực hiện phép đổi sang biến y thì

$$R(x,y)dx = R\left(\frac{y^n d - b}{a - cy^n}, y\right)\frac{ny^{n-1}(ad-bc)}{(a-cy^n)^2}dy$$

$$= f(y)dy$$

Trong đó $f(y)$ là hàm hữu tỉ của y.

Ví dụ 12: Tính các tích phân bất định sau

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2}$, $\alpha \in R^*$

b. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}dx$

Giải:

a. Đặt $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$

$$\int \frac{dx}{(1+e^{\alpha x})^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{t(1+t)^2} = \frac{1}{\alpha}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C \quad = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha x - \ln(1+e^{\alpha x}) + \frac{1}{1+e^{\alpha x}}\right) + C$$

b. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}dx = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = I$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \Rightarrow x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2tdt}{(1+t^2)^2}$

$$I = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - arctgt) + C$$

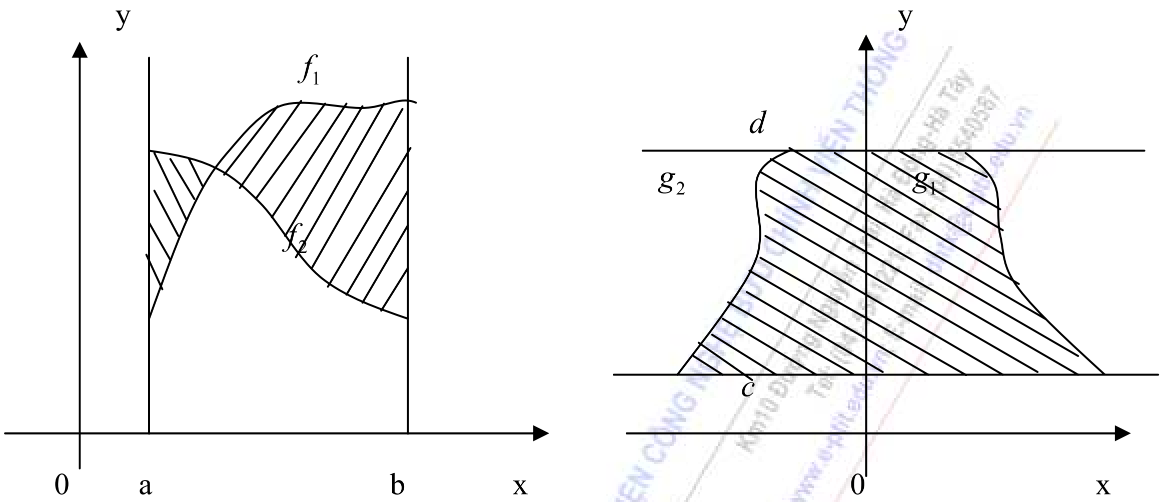
$$= 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

4.4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chú ý: Trong mục này khi xem xét một hình phẳng hay một vật thể, chúng ta luôn để ý đến tính chất đối xứng của hình để đơn giản quá trình tính toán hoặc để chọn một hệ qui chiếu thích hợp để giải quyết bài toán được dễ dàng hơn.

4.4.1. Tính diện tích hình phẳng

A. Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Đềcác(Descartes)



H.4.3

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ trong đó f_1, f_2 liên tục từng khúc trên [a,b]. Gọi diện tích của miền phẳng D là S. Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, nhận được công thức tính S như sau:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx \qquad (4.19)$$

Tương tự, nếu D giới hạn bởi các đường:

$y = c$, $y = d$, $(c < d)$, $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ trong đó g_1, g_2 liên tục từng khúc trên [c,d] thì

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy \qquad (4.20)$$

B. Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Khi đó $$S = \int_\alpha^\beta |y(t).x'(t)| dt \qquad (4.21)$$

C. Nếu miền phẳng D giới hạn bởi đường cong có phương trình cho dưới dạng toạ độ cực.

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

Liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cực là:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó $$S = \frac{1}{2}\int r^2(\varphi)d\varphi \qquad (4.22)$$

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình elíp có các bán trục a,b.

Giải: Hình êlíp giới hạn bởi êlíp có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

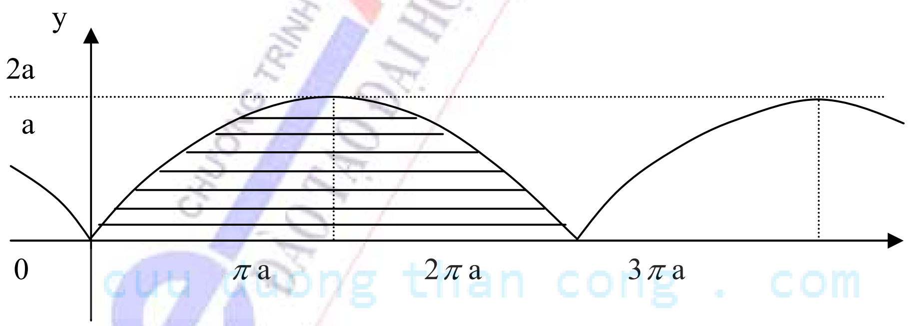
Do tính chất đối xứng của êlíp qua các trục toạ độ và do phương trình tham số của êlíp $x = a\cos t \ , \ y = b\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi$

nên ta có: $$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t.dt = \pi ab$$

Ví dụ 2: Hãy tính diện tích của hình giới hạn bởi trục hoành và một nhịp của đường Cycloid,cho bởi phương trình tham số:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

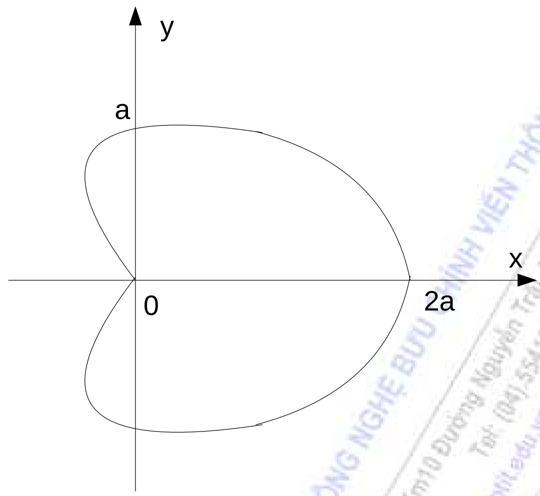
Xem hình 4.4



H.4.4

Giải: $$S = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 3a^2\pi$$

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình trái tim giới hạn bởi đường Cardioid (đường trái tim), trong hệ toạ độ cực cho bởi phương trình $r = a(1+\cos\varphi)$, xem hình 4.5



H.4.5

Giải: Do tính đối xứng của hình qua trục Ox,vậy

$$S = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$= a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi a^2$$

4.4.2. Tính độ dài đường cong phẳng

A. Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc

Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x) \quad , \quad A\left(a, f(a)\right) \quad , \quad B\left(b, f(b)\right)$$

Trong đó $f \in C^1$ trên $[a,b]$, $(a < b)$

Nếu gọi l là độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ thì l được tính theo công thức

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{4.23}$$

B. Phương trình cho trong dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad , \quad t_0 \le t \le t_1$$

$\varphi, \psi \in C^1$ trên $[t_0, t_1]$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{4.24}$$

C. Phương trình cho trong dạng toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi \qquad (4.25)$$

Chú ý:

- Độ dài của cung $\overset{\frown}{AC}$ trong đó $C(x, f(x))$ với $x \in [a,b]$ sẽ là

$$l(x) = \int_{a}^{x} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \Rightarrow \mathrm{d}l = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \qquad (4.26)$$

gọi đó là công thức tính vi phân cung.

- Trong không gian đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t_0 \le t \le t_1 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$x, y, z \in C^1$ trên $[t_0, t_1]$. Khi đó công thức tính độ dài cung sẽ là

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$ và công thức vi phân cung

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (4.27)$$

Ví dụ 4: Hãy tính độ dài của một nhịp Cycloid cho trong ví dụ 2

Giải:

$$x'(t) = a(1 - \cos t) \quad , \quad y' = a \sin t$$

$$l = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2\sqrt{2}a \int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

$$= 4a\int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 8a \cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0} = 8a$$

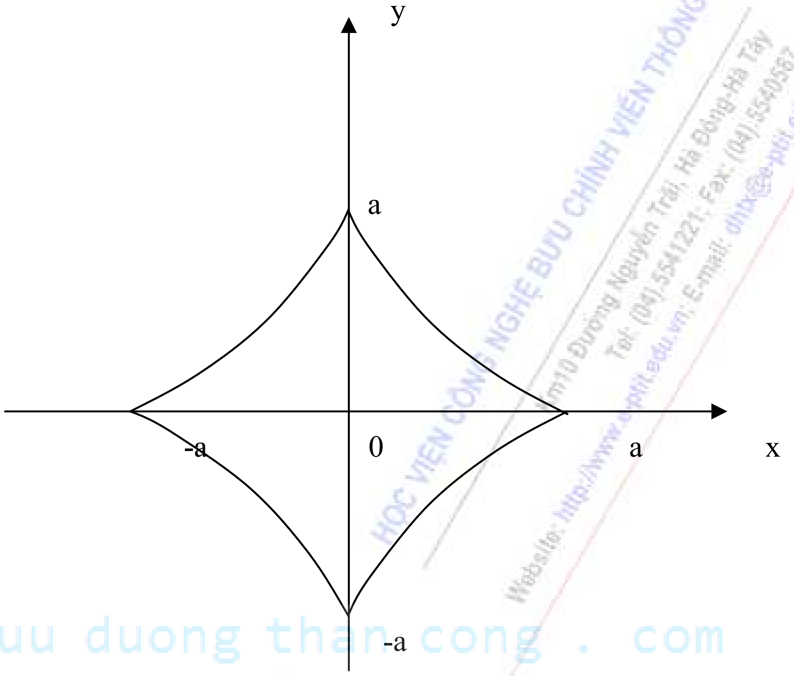
Ví dụ 5: Hãy tính độ dài của Astroid, phương trình tham số có dạng.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \quad , \quad a > 0 \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

hoặc trong hệ toạ độ Descartes có dạng

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Xem hình 4.6.



H.4.6

Giải:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t \quad , \quad y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

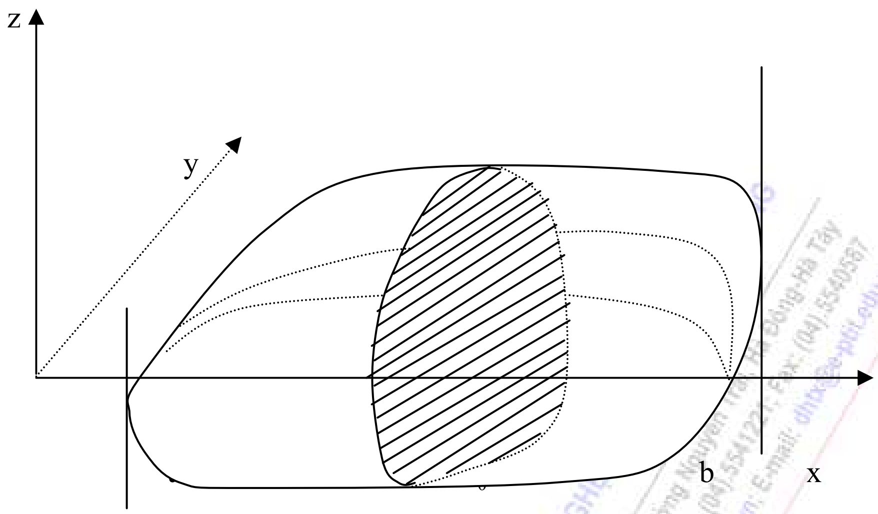
$$l = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

4.4.3. Tính thể tích vật thể

A. Công thức tổng quát

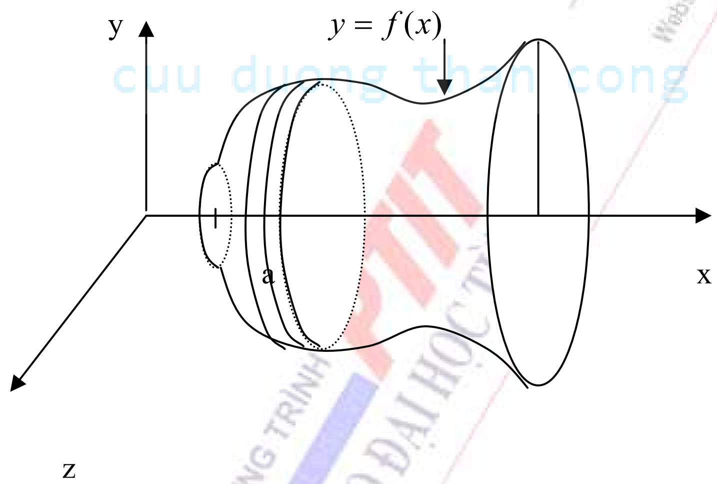
Giả sử vật thể (V) nằm giữa hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng này có phương trình là $x = a$ và $x = b$, $a < b$. Các thiết diện của vật thể (V) vuông góc với trục Ox nằm trên mặt phẳng có phương trình $x = x_0$, $x_0 \in [a,b]$ có diện tích tương ứng $S(x_0)$. (Xem hình 4.7). Khi đó thể tích của vật thể (V), kí hiệu là V, tính theo công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (4.28)$$



H.4.7

B. Công thức tính cho vật thể tròn xoay



H.4.8

Vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường: $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ quay xung quanh trục Ox (xem hình 4.8). Cụ thể hơn, phần không gian bị chiếm chỗ do hình thang cong quay xung quanh trục Ox gọi là vật thể tròn xoay.

Như vậy các thiết diện vuông góc với trục Ox là các hình tròn. Diện tích của thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$ sẽ là $\pi.f^2(x_0)$. Từ đó nhận được công thức tính:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (4.29)$$

Ví dụ 6: Hãy tính thể tích của êlipxôít với các bán trục a, b, c:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

Giải:

Thiết diện của elipxôit vuông góc với trục Ox là một hình elíp. Thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$, $x_0 \in [-a,a]$ được giới hạn bởi elip có các bán trục

$$b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}\ ,\ c\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$$

phương trình là

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\\ x=x_0\end{cases}$$

Theo ví dụ 1, diện tích thiết diện biểu diễn dưới dạng

$$S(x_0)=\pi bc\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

Vậy $V=\pi bc\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(a-\frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right)=\frac{4}{3}\pi abc$

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể do một nhịp Cycloid quay xung quanh trục Ox tạo ra. Biết Cycloid cho bởi phương trình tham số là.

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

Giải:

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$=\pi a^3\left\{2\pi-3\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3t+3\cos tdt)\right\}$$

$$=5\pi^2a^3$$

4.4.4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Mặt tròn xoay là một mặt cong được tạo thành do một cung cong $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox tạo ra. Cụ thể hơn: Phần không gian bị chiếm chỗ do cung $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox gọi là mặt tròn xoay. Gọi S là diện tích của mặt tròn xoay, dưới đây chúng ta sẽ đưa ra các công thức tính.

A. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{4.30}$$

B. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \geq 0 \end{cases} \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \tag{4.31}$$

C. Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi \tag{4.32}$$

Ví dụ 8: Tính diện tích của mặt tròn xoay tạo thành do một đường xích có phương trình $y = ach\dfrac{x}{a}$, $a > 0$ gắn ở các đầu $A(0,a), B\left(x, ach\dfrac{x}{a}\right), x > a$ quay xung quanh trục Ox

Giải:

$$y' = sh\frac{x}{a} \quad , \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}} = ch\frac{x}{a}$$

$$S = 2\pi a\int_0^x ch^2\frac{x}{a}dx = \pi a\int_0^x\left(1+ch\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$= \pi a\left(x+\frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}\right)$$

Ví dụ 9: Đường cong cho bởi phương trình $r = a(1+\cos\varphi)$ quay quanh trục Ox tạo ra một mặt tròn xoay. Tính diện tích mặt cong này.

Giải:

Đó là đường trái tim (Xem hình 4.5)

$$r'(\varphi) = -a\sin\varphi \ , \ r^2 + r'^2 = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$S = 4\pi a^2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{32\pi a^2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

4.5. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.5.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

A. Định nghĩa

1. Cho $f:[a,+\infty) \to R$, $a \in R$, khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$.

Tích phân suy rộng của f với cận $+\infty$ được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về số $I \in R$ nếu

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \quad \text{kí hiệu} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = I$$

Nếu I không tồn tại hoặc $I = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. Cho $f:(-\infty, a] \to R$, $a \in R$, khả tích trên $[B, a]$, $\forall B < a$

Tích phân suy rộng của f với cận $-\infty$, kí hiệu là $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hội tụ về số $J \in R$ nếu

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx = J = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Nếu J không tồn tại hoặc $J = \infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f: R \to R$ khả tích trên $[A, B]$, $\forall A, B \in R$. Tích phân suy rộng của f với các cận vô hạn, kí hiệu là: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, $\forall a \in R$. Trong trường hợp này kí hiệu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx, \ \forall a \in R$$

Rõ ràng nếu f liên tục trên tập xác định của nó, và có nguyên hàm $F(x)$ thì có thể dùng kí hiệu Newton-Leibnitz như sau:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, b. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, c. $\int_a^{+\infty}\sin xdx$, $a\in R$, d. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in R$

Giải:

a. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} arctgx - arctg0 = \frac{\pi}{2}$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

b. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} arctgx - \lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$

Vậy tích phân suy rộng trên hội tụ.

c. $\int_a^{+\infty}\sin xdx = -\cos x\Big|_a^{+\infty} = \cos a - \lim_{x\to+\infty}\cos x$

Không tồn tại giới hạn của $\cos x$ khi $x\to\infty$, vậy tích phân suy rộng đã cho phân kỳ.

d. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x\Big|_1^{+\infty} & \text{nếu } \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha}.\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} & \text{nếu } \alpha\neq 1\end{cases}$

Nhận thấy $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases}0 & \text{nếu } \alpha>1 \\ \infty & \text{nếu } \alpha<1\end{cases}$

Vậy tích phân hội tụ với $\alpha>1$, khi đó $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, và phân kỳ với $\alpha\le 1$ Chú ý: Tương tự như ý nghĩa hình học của tích phân xác định, ở đây ta thấy:

Nếu tích phân suy rộng hội tụ và $f(x)\ge 0$ thì một miền vô hạn có diện tích hữu hạn, tính được nhờ vào tích phân suy rộng với cận vô hạn

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Sau đây ta xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ với $f(x) \geq 0$.

Các trường hợp tích phân suy rộng khác với $f(x)$ giữ nguyên dấu, chúng ta có thể suy diễn tương tự để nhận được các kết quả tương ứng.

Đặt $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$

Vì $f(x) \geq 0$ trên $[a,+\infty)$, chứng tỏ $\phi(A)$ đơn điệu tăng trên $[a,+\infty)$. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu (Xem mục 2.2.2) suy ra:

Định lí 1: Cho hàm số $f(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$ để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là tồn tại $L \in R$ sao cho $\phi(A) \leq L$, $\forall A$

Định lí 2: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$ và $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq b > a$ khi đó

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh:

Ta có thể biểu diễn $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$

Như vậy sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là đồng thời với sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân suy rộng $\int_b^{+\infty} f(x)dx$

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_b^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, theo định lí 1 suy ra $\int_b^A g(x)dx \leq L$, $\forall A$. Theo tính chất của tích phân xác định sẽ có $\int_b^A f(x)dx \leq \int_b^A g(x)dx \leq L$, $\forall$A

Chứng tỏ $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Nếu $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_b^A f(x)dx$ không bị chặn

Tức là $\forall M > 0\ \exists A_0 \in (b,+\infty)$ sao cho $\int_b^{A_0} f(x)dx > M \Rightarrow \int_b^{A_0} g(x)dx \geq \int_b^{A_0} f(x)dx > M$

Chứng tỏ $\int_b^{A} g(x)dx$ không bị chặn theo định lí 1 suy ra $\int_b^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Định lí 3: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ không âm và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$. Khi đó:

1. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in R_+^*$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

2. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

3. Nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh:

1. $\varepsilon > 0$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$

Vì $g(x) \geq 0 \Rightarrow (l-\varepsilon)g(x) < f(x) < (l+\varepsilon)g(x)$

Lấy ε sao cho $l - \varepsilon = c > 0$. Theo định lí 2: Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì

$\int_a^{+\infty} (l-\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (l+\varepsilon)g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2. Lấy $\varepsilon = 1$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \varepsilon g(x) = g(x)$

Theo định lí 2 chứng tỏ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

3. $\forall M > 0$, $\exists b > 0$, $\forall x > b \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$, Lấy $M = 1$ thì $f(x) > g(x)$. Theo định lí 2 suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Hệ quả 1: Giả sử với x đủ lớn hàm số $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\frac{h(x)}{x^k}\quad,\quad k>0\quad,\quad h(x)\geq 0\,.\ \text{Khi đó}$$

Nếu $k>1$ và $0\leq h\leq c<+\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k\leq 1$ và $h(x)\geq c>0$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Trong đó c là hằng số.

Hệ quả 2: Nếu $f(x)\geq 0$ và là VCB cấp k so với VCB $\frac{1}{x}$ tại $+\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $k>1$ và phân kỳ khi $k\leq 1$

Hệ quả 1 được suy ra trực tiếp từ định lí 2 và ví dụ 1d.

Hệ quả 2 được suy ra trực tiếp từ định lí 3 và ví dụ 1d.

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau

a. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$, b. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, c. $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$

Giải:

a. $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}:\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ theo hệ quả 2, tích phân suy rộng phân kỳ.

b. $\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}:\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, tích phân suy rộng hội tụ

c. $\left(\frac{e^{-x^2}}{x^2}:\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, theo định lí 3, tích phân suy rộng hội tụ.

Dưới đây ta sẽ đưa ra định lí tổng quát về điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng.

Định lí 4: Để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists A_0>a\ ,\ \forall A>A_0\ ,\ \forall A'>A_0\Rightarrow\left|\phi(A')-\phi(A)\right|<\varepsilon$$

Hay $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\varepsilon$

Dựa vào tính chất của tích phân xác định

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|\leq\int_A^{A'}\left|f(x)\right|dx$$

Ta nhận được hệ quả sau đây

Hệ quả 3: Nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ.

C. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng

1. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ.

2. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ bán hội tụ nếu $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ.

Định lí 5: Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và hàm số $g(x)$ bị chặn trên $[a,+\infty)$ thì $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối

Chứng minh:

Giả sử $|f.g| \le M.|f|$, ta có

Theo định lí 2 suy ra $\int_a^{+\infty}|f(x).g(x)|dx$ hội tụ, chứng tỏ $\int_a^{+\infty}f(x).g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 3: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng:

a. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx$, $\alpha \in R, k \in R^*$; b. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; c. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Giải:

a. Nhận xét $|\cos\alpha x| \le 1$, $\forall x$; $\frac{1}{k^2+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ khi $x \to \infty$

Vậy $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{k^2+x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối.

b. Vì $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{2x}}} = 0$;

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^{a}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \int_a^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}, \quad a > 0$$

Tích phân thứ nhất hội tụ (đó là tích phân xác định vì hàm dưới dấu tích phân khả tích).

Lấy $\lambda > 1$ nhận được $\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^{\lambda+1}}{\sqrt{e^{2x}-1}} \to 0$ khi $x \to \infty$.

Vì $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ hội tụ, $a>0$ suy ra tích phân suy rộng đã cho hội tụ.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=0$

Ta có $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^{a}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx+\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Tích phân thứ nhất hội tụ (tồn tại) vì hàm dưới dấu tích phân khả tích trên $[1,a]$, $\forall a>1$

Lấy $1<\lambda<2$ nhận được $\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{\ln x}{x^{2-\lambda}}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\to 0$ khi $x\to\infty$.

Mà $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ hội tụ, $\forall a>0\Rightarrow$ tích phân đã cho hội tụ.

4.5.2. Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm

A. Định nghĩa

1. Cho $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to R$. Nói rằng $x_0\in(a,b)$ là cực điểm của f nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Hàm số có cực điểm tại a hoặc b nếu $f(a^+)=\infty$ hoặc $f(b^-)=\infty$

2. Cho $f:[a,b)\to R$, $f(b^-)=\infty$, khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ đủ bé. ích phân suy rộng của f trên $[a,b]$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$. Nói rằng tích phân suy rộng hội tụ về $I\in R$ nếu

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=I$, kí hiệu $I=\int_a^b f(x)dx$

Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn (không có I hoặc $I=\infty$) thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:(a,b]\to R$, $f(a^+)=\infty$ khả tích trên $[a+\varepsilon,b]$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ về J nếu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx=J\quad\text{(hữu hạn).}$$

Nếu không tồn tại J nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

4. Cho $f:[a,b]\setminus\{x_o\}\to R$, $x_o\in(a,b)$ là cực điểm của f

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int_{x_0}^b f(x)dx$ cùng hội tụ, Khi đó kí hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^b f(x)dx$$

Chú ý: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ trừ ra các cực điểm của nó và có nguyên hàm là $F(x)$, ta có thể dùng công thức Newton- Leibnitz và viết

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}F(b-\varepsilon)-F(a) \text{ hoặc } \int_a^b f(x)dx=F(b)-\lim_{\varepsilon\to0}(a+\varepsilon)$$

Ví dụ 4: Xét sự tồn tại của các tích phân suy rộng sau:

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b. $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha\in R$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là ±1

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{a}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{a}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall a\in(-1,1)$$

$$=\arcsin a-\lim_{x\to-1}\arcsin x+\lim_{x\to1}\arcsin x-\arcsin a=\pi$$

b. Hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là a

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\begin{cases}\ln(x-a)\Big|_a^b & \text{với } \alpha=1\\ \dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\Big|_a^b & \text{với } \alpha\neq1\end{cases}$$

Vì $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\ln(x-a)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}=\begin{cases}0 & \text{nếu } \alpha<1\\ \infty & \text{nếu } \alpha>1\end{cases}$

Suy ra tích phân đã cho hội tụ với $\alpha<1$ và phân kỳ với $\alpha\geq1$.

B. Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng

Chúng ta giới hạn trường hợp $f(x)$ giữ nguyên dấu trên (a,b). Giả sử $f(x)\geq0$ trên $[a,b)$ và $f(b^-)=\infty$

Đặt $\phi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Rõ ràng $\phi(\varepsilon)$ là hàm số giảm ở lân cận bên phải của điểm 0. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu, chúng ta nhận được định lí sau đây:

Định lí: Để tich phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là $\phi(\varepsilon)$ bị chặn ở lân cận bên phải điểm $\varepsilon = 0$, tức là $\phi(\varepsilon) \le L$, $\forall \varepsilon > 0$

Các định lí so sánh ở mục 4.5.1 hoàn toàn đúng cho các trường hợp tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm. Các hệ quả tương tự với hệ quả 1,2 sẽ là:

Hệ quả 1': Giả sử với x đủ gần b và $(x < b)$ hàm số $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^k} \quad , \quad k > 0 \quad , \quad g(x) \ge 0 \text{ khi đó:}$$

Nếu $k < 1$ và $0 \le g(x) \le c < \infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k \ge 1$ và $g(x) \ge c > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ trong đó c là hằng số

Hệ quả 2': Nếu $f(x) \ge 0$ và là VCL cấp k so với VCL $\frac{1}{b-x}$ tại b thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi $k < 1$ và phân kỳ khi $k \ge 1$.

Ví dụ 5: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, |k| < 1$; b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; c. $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}, 0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$

d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$ e. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$

Giải:

a. Hàm dưới dấu tích phân có một cực điểm $x = 1$, là VCL cấp $\frac{1}{2}$ so với VCL $\frac{1}{1-x}$ tại $x = 1$. Vậy tích phân suy rộng hội tụ.

b. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, vậy hàm $\frac{1}{\ln x}$ có cực điểm tại $x = 1$

$\left(\frac{1}{\ln x} : \frac{1}{x-1}\right) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, theo hệ quả 2', tích phân suy rộng phân kỳ.

c. $\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}$, $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \theta$ là cực điểm

Nhận xét $\cos\varphi - \cos\theta = -2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2} = 2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} : \frac{1}{\sqrt{\theta-\varphi}} = \sqrt{\frac{\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}} \xrightarrow[\varphi\to\theta]{} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}$$

Vậy tích phân hội tụ.

d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$, $x = 0$ là cực điểm.

$$e^x - e^{-x} = 2x + o(x^2) \Rightarrow \sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})} \sim \sqrt[3]{2}.x^{\frac{2}{3}} \text{ khi } x \to 0$$

Theo hệ quả 2', tích phân suy rộng hội tụ.

e. $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$

Xét $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, Nếu $p \ge 1$ ta nhận được tích phân thông thường.

Nếu $p < 1$, nhận được tích phân suy rộng, hàm dưới dấu tích phân có cực điểm tại $x = 0$

Nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^{1-p}}\right) = e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, theo hệ quả 2', tích phân suy rộng hội tụ khi $1 - p < 1$ hay $p > 0$

Xét $\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$. Nhận thấy $\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^2}\right) = x^{p+1}e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\forall p$

Vậy tích phân suy rộng hội tụ khi $p > 0$.

Chú ý:

- Tích phân suy rộng có các tính chất tương tự như tích phân xác định

- Để tính tích phân suy rộng (trường hợp tích phân suy rộng hội tụ), người ta cũng thường sử dụng hai phương pháp cơ bản: Đổi biến số và tích phân từng phần. Sau đây, ta đưa ra một số ví dụ về tích phân suy rộng thường đề cập đến trong các lĩnh vực kỹ thuật.

Ví dụ 6*: Tích phân Euler. $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$

Sự hội tụ của tích phân có thể suy ra bằng cách so sánh với $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$

Giải:

Đặt $x = 2t$

$$E = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$$

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$, đặt $t = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \alpha d\alpha$$

Suy ra $E = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2E \Rightarrow E = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Ví dụ 7*: Tích phân Euler-Poisson. $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Giải:

Sự hội tụ có thể thấy được khi để ý rằng: $\forall x > 1$ có $e^{-x^2} < e^{-x}$ mà $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ hội tụ

Nhận thấy hàm số $g(x) = (1+t)e^{-t}$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$

và $g_{\max} = g(0) = 1$. Vậy $\forall t \neq 0$ có $(1+t)e^{-t} < 1$

Thay $t = \pm x^2$ nhận được

$$\begin{cases} (1-x^2)e^{x^2} < 1 \\ (1+x^2)e^{-x^2} < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

Với $0 < x < 1$ có $e^{-nx^2} > (1-x^2)^n$

$\forall x$ có $e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Từ đó $\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

Thực hiện phép đổi biến $u = \sqrt{n}x$

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \cos t$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Thực hiện phép đổi biến $x = \cot gt$, ta có

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}.$$

Thay các tích phân đã tính vào bất đẳng thức trên, nhận được

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}$$

Bình phương các vế bất đẳng thức kép trên.

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < I^2 < \frac{n}{2n-1}\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2 .(2n-1)\frac{\pi^2}{4}$$

Theo công thức Wallis (Xem ví dụ 6 mục 4.2.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 .\frac{1}{2n+1}$$

Suy ra $\quad I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ví dụ 8*: Tính $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Giải:

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$

$$\Rightarrow 2J = \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \Rightarrow J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

Đặt $z = x - \frac{1}{x}$, nhận được

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

CHƯƠNG V: LÝ THUYẾT CHUỖI

5.1. CHUỖI SỐ

5.1.1. Các khái niệm chung

A. Định nghĩa chuỗi số và sự hội tụ của chuỗi số

1. Cho dãy số thực (a_n) , $a_n \in R$ với mọi n

Gọi $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ là một chuỗi số thực

Kí hiệu chuỗi số trên là $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (5.1)

Số thực a_k với k xác định gọi là số hạng thứ k của chuỗi , với k không xác định gọi là số hạng tổng quát của chuỗi .Sau đây là một vài chuỗi số dạng đặc biệt :

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$ có số hạng tổng quát là $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ...$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + ...$ gọi là chuỗi cấp số nhân có công bội là $\frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$ gọi là chuỗi điều hoà .

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ...$ gọi là chuỗi Riemann với tham số α.

2. Cho chuỗi số (5.1). Gọi tổng riêng thứ n của chuỗi (5.1) là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (5.2)$$

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì nói rằng chuỗi số (5.1) hội tụ và có tổng là S, khi đó kí hiệu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$. Nếu không xảy ra điều trên nói rằng chuỗi (5.1) phân kì .

3. Nếu chuỗi (5.1) hội tụ về S thì gọi $R_n = S - S_n$ là phần dư thứ n của chuỗi. Theo trên suy ra: Để chuỗi (5.1) hội tụ về S thì cần và đủ là phần dư R_n hội tụ về 0.

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của chuỗi cấp số nhân với công bội q

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k \ , \ a \neq 0$$

Giải:

Tính tổng riêng thứ n : $S_n = \begin{cases} a.\dfrac{q^n - 1}{q-1} & \text{với } q \neq 1 \\ na & \text{với } q = 1 \end{cases}$

Bây giờ tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$

Nếu $|q| \geq 1$ thì (S_n) không hội tụ.

Vậy chuỗi cấp số nhân hội tụ khi và chỉ khi $|q| < 1$.

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

Giải:

Tính tổng riêng thứ n : $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

Tổng riêng thứ 2n : $S_{2n} = S_n + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

Suy ra $S_{2n} - S_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$ Theo tính chất của dãy số hội tụ chứng tỏ (S_n) không hội tụ . Vậy chuỗi điều hoà phân kì .

Ví dụ 3: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n}{n+1}$

Giải:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} [\ln k - \ln(k+1)]$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln n - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = -\infty$ Vậy chuỗi phân kì.

Ví dụ 4: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Giải:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi số

Từ điều kiện Cauchy cho dãy số hội tụ suy ra.

Định lí 1: Để chuỗi số (5.1) hội tụ thì cần và đủ là

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists n_0:\forall n>n_0\ ,\ \forall p\ ,\ n,p\in N^*$$

$$\Rightarrow\left|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon$$

Từ định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi số suy ra:

Định lí 2: Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ là số hạng tổng quát a_n dần đến 0 khi $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{5.3}$$

Chứng minh: Cho chuỗi (5.1) hội tụ về S tức là

$\lim_{n\to\infty}S_n=S$, ta có $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ hay $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

Vì $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=S-S=0$,

Nên $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$

Chú ý: Điều kiện (5.3) không phải là điều kiện đủ của chuỗi hội tụ, điều này nhận thấy được qua các ví dụ 2 và ví dụ 3.

C. Tính chất của chuỗi số hội tụ

1.Tính chất hội tụ hay phân kì của chuỗi số vẫn giữ nguyên khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi .

Thật vậy: Gọi tổng riêng thứ n của chuỗi ban đầu là S_n còn tổng riêng thứ n của chuỗi khi thay đổi k số hạng đầu tiên của chuỗi là S_n' Vậy rõ ràng $S_n=S_n'+a$ trong đó a là hiệu số 2 tổng k số hạng đầu tiên cũ và mới. Suy ra S_n và S_n' cùng hội tụ hay cùng phân kì.

2. Nếu chuỗi (5.1) hội tụ về S thì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda a_i$ hội tụ về λS. Thật vậy nếu gọi tổng riêng thứ n của (5.1) là S_n thì

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}a_i = \lambda S_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda a_i = \lambda S$$

3. Nếu các chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ hội tụ tương ứng về A và B thì chuỗi

$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)$ hội tụ về A+B.

Thật vậy $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i + \sum_{i=1}^{n}b_i$

Qua giới hạn sẽ có $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i) = A + B$

Chú ý: Các khái niệm trên được chuyển sang cho chuỗi số phức

$$\sum_{i=1}^{\infty}z_i = \sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{Re} z_i + i\operatorname{Im} z_i) \tag{5.4}$$

Cụ thể : Để chuỗi số phức (5.4) hội tụ cần và đủ là 2 chuỗi số thực

$\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_i$ cùng hội tụ và ta có :

$$\sum_{i=1}^{\infty}z_i = \sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_i + i\sum_{1}^{\infty}\operatorname{Im} z_i$$

5.1.2. Chuỗi số dương

Sau đây xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ với $a_i \in R_{+}^{*}$ các kết quả sẽ được chuyển sang cho chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ với $a_i \in R^{*}_{-}$

A. Điều kiện hội tụ của chuỗi số dương

Định lí: Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên. $S_n \le M \quad , \quad \forall n \in N$

Chứng minh:

Ta biết rằng chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy (S_n) hội tụ

Ta có $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$ vì $a_{n+1} > 0$. Suy ra (S_n) đơn điệu tăng. Để (S_n) hội tụ thì cần và đủ là $\exists M$ sao cho $S_n \le M$, $\forall n$ (Theo tính chất hội tụ của dãy đơn điệu).

B. Các tiêu chuẩn về sự hội tụ

1. Các định lí so sánh.

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (a) và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ (b)

Định lí 1: Giả sử $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in N^*$

Khi đó: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ .

Nếu chuỗi (a) phân kì thì chuỗi (b) phân kì .

Chứng minh: Xét hai chuỗi mới được thành lập bằng cách thay đổi n_0 số hạng đầu tiên của mỗi chuôi (a) , (b) để xảy ra bất đẳng thức $a_n \le b_n$, $\forall n \in N$. Theo tính chất 1 của chuỗi số ta chỉ việc chứng minh định lí với điều kiện $a_n \le b_n$, $\forall n \in N^*$

Các tổng riêng sẽ thoả mãn: $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$, $\forall n$

- Nếu chuỗi (b) hội tụ thì tồn tại số M sao cho $B_n \le M \quad \forall n \Rightarrow A_n \le M \quad \forall n$ Vậy chuỗi (a) hội tụ .
- Nếu chuỗi (a) phân kì thì rõ ràng chuỗi (b) phân kì , nếu không sẽ mâu thuẫn với điều vừa chứng minh trên .

Định lí 2: Giả sử $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$

Khi đó: Nếu $0 < k < +\infty$ hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì

Nếu $k = 0$ và chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ.

Nếu $k = \infty$ và chuỗi (b) phân kì thì chuỗi (a) phân kì .

Chứng minh:

- Nếu $0 < k < +\infty$, Lấy $\varepsilon > 0$ đủ bé sao cho $k - \varepsilon > 0$. Theo định nghĩa giới hạn , tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho

$$\forall n > n_0 \text{ có } \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon \text{ hay } b_n(k - \varepsilon) < a_n < (\varepsilon + k) b_n$$

Theo tính chất 2 về chuỗi số hội tụ và định lí 1 suy ra hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

- Nếu k=0, lấy $\varepsilon > 0$, sẽ tồn tại $u_0 \in N^*$ để $\forall n > n_0$ sẽ có $a_n < \varepsilon b_n$. Từ đó ta thấy: Khi chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon b_k$ hội tụ , Theo định lí 1 chuỗi (a) sẽ hội tụ . Khi chuỗi (a) phân kì thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon b_k$ phân kì , Theo tính chất 1 suy ra chuỗi (b) phân kì .

Kết luận này đã chứng minh trường hợp $k = \infty$

2. *Các tiêu chuẩn hội tụ .*

a. Tiêu chuẩn Đalămbe (D'Alembert).

Gọi $(D_n) = \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ là dãy D'Alembert (5.5)

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ sao cho $D_n \le q < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $D_n \ge 1$ thì chuỗi phân kì

Chứng minh:

- Nếu $D_n \le q < 1$ thì $a_{n+1} \le a_n q \le a_{n-1} q^2 \le \ldots < a_1 q^n$ Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ hội tụ vì $0 < q < 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ

- Nếu $D_n \ge 1$ thì $a_{n+1} \ge a_n \ge a_{n-1} \ge \ldots \ge a_1 > 0$. Vậy (a_n) không hội tụ về 0. Chứng tỏ chuỗi phân kì

Tiêu chuẩn D'Alembert ở dạng "bất đẳng thức" đã nêu ít khi được áp dụng do việc tìm số q rất khó khăn. Thông thường dùng tiêu chuẩn D'Alembert ở dạng "giới hạn" cho bởi định lí sau.

Định lí: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$ khi đó:

Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kì

$D < 1$ thì chuỗi hội tụ

$D = 1$ thì chưa thể kết luận được.

Chứng minh:

- Nếu $D > 1$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $D - \varepsilon > 1$ Khi đó

  $\exists n_0 :\ \forall n > n_0 \Rightarrow 1 < D - \varepsilon < D_n < D + \varepsilon$ Theo trên chứng tỏ chuỗi phân kì .

- $D < 1$, hoàn toàn tìm được số $\varepsilon > 0$ sao cho $q = D + \varepsilon < 1$ Khi đó $\exists n_0 :\ \forall n > n_0$ có $D_n < q < 1$ Theo trên chuỗi hội tụ.

- Nếu $D = 1$. thì các ví dụ 2 và ví dụ 4 đã chứng minh kết luận của định lí.

b. Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy).

Gọi $(C_n) = \left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ là dãy Cauchy (5.6)

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ sao cho $C_n \le q < 1$ thì chuỗi số hội tụ

Nếu $C_n \ge 1$ thì chuỗi số phân kì .

Chứng minh:

- Nếu $C_n = \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ thì $a_n \le q^n$. Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ vì $0 < q < 1$ nên chuỗi số dương đã cho hội tụ.
- Nếu $C_n \ge 1$ thì $a_n \ge 1$ chứng tỏ (a_n) không thể hội tụ về 0, do đó chuỗi phân kì.

Định lí: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ khi đó

Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kì

$C < 1$ thì chuỗi hội tụ

$C = 1$ thì chưa thể kết luận được.

Chứng minh:

- Nếu $C > 1$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $C - \varepsilon > 1$, khi đó $\exists n_0$ để $\forall n > n_0 \Rightarrow C - \varepsilon < C_n$. Theo trên suy ra chuỗi phân kì
- Nếu $C < 1$, lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $q = C + \varepsilon < 1$ khi đó $\exists n_0$ để $\forall n > n_0$ có $C_n < q < 1$ Vậy chuỗi hội tụ
- Nếu $C = 1$, các ví dụ 2 và ví dụ 4 đã chứng minh điều kết luận cuối cùng của định lí.

c. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy-McLaurin.

Giả sử $f(x)$ dương và liên tục trên $[1,+\infty)$ thoả mãn các điều kiện.

$$\begin{cases} f(x) \text{ giảm về 0 khi } x \to \infty \\ f(n) = a_n \text{ , } \forall n = 1,2,... \end{cases}$$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ hay phân kì cùng với sự hội tụ hay phân kì của tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

Chứng minh:

Vì $f(x)$ đơn điệu giảm nên $\forall x \in [k-1,k]$, $k \in N^*$ có $f(k) \le f(x) \le f(k-1)$

suy ra $a_k = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx = a_{k-1}$

Sau khi lấy tổng ứng với k từ 2 đến n sẽ có

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le S_n - a_n \text{ trong đó } S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_1^n f(x)dx$ bị chặn trên $\forall n$, nghĩa là $\exists M$ để cho

$$\int_1^n f(x)dx \le M \quad , \forall n$$

Suy ra $S_n \le M + a_1$, $\forall n$ Chứng tỏ chuỗi hội tụ .

- Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_1^n f(x)dx$ không bị chặn trên mà

$$S_n \ge a_n + \int_1^n f(x)dx$$

Vậy S_n không bị chặn trên do đó chuỗi phân kì

Sau đây chúng ta xét một số ví dụ về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số nhờ vào các định lí so sánh và các tiêu chuẩn đã đưa ra ở trên

Ví dụ 1: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (p > 0)$

Giải:

Vì $\frac{n}{(\ln n)^p} \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên $\exists n_0 \in N$ để $\forall n > n_0$ có $\frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n}$, mà chuỗi điều hoà phân kì , vậy theo định lí so sánh 1 suy ra chuỗi đã cho phân kì

Ví dụ 2: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Giải:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n . \ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$$

Vì $\ln(\ln n) \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên với n đủ lớn sẽ có $\ln(\ln n) > 2$

Suy ra $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \dfrac{1}{n^2}$ mà chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ (Xem ví dụ 8 dưới đây). Vậy chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 3: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Giải:

Do $\sqrt[n]{n} \to 1$ khi $n \to \infty$, vậy $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \dfrac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, chứng tỏ chuỗi đã cho phân kì

Ví dụ 4: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

Giải:

$\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \dfrac{1}{e^{(\ln(\ln n))^2}}$ Vì $\ln n > (\ln(\ln n))^2$

nên $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} > \dfrac{1}{e^{\ln n}} = \dfrac{1}{n}$ Vậy chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 5: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $(x>0)$

Giải:

Có $D_n = \dfrac{x}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 0$. Vậy chuỗi hội tụ với $\forall x > 0$.

Ví dụ 6: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$, $(x>0)$

Giải:

Có $D_n = \dfrac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \dfrac{x}{e}$

Với $x = e$ có $D_n = \dfrac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} > 1$ bởi vì $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

Vậy chuỗi hội tụ với $x < e$, chuỗi phân kì với $x \geq e$

Ví dụ 7: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n$, $(a_n > 0$ và $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $x > 0)$

Giải:

Có $C_n = \frac{x}{a_n}$

Nếu $a = 0$ thì $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$

Nếu $a = \infty$ thì $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$

Nếu $0 < a < +\infty$ thì $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{x}{a}$

Vậy nếu $a = 0$ thì chuỗi phân kì

$a = \infty$ chuỗi hội tụ

$0 < a < +\infty$, chuỗi hội tụ khi $x < a$

chuỗi phân kì khi $x > a$

chưa kết luận khi $x = a$

Thật vậy xét các chuỗi số sau với a=1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^n} \text{ phân kì}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n^2}\right)^n} \text{ hội tụ}$$

Xem ví dụ 8 dưới đây

Ví dụ 8: Xét sự hội tụ của chuỗi sau theo tham số α (chuỗi Riemann) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$

Giải:

Đặt $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Hàm số này thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn tích phân Cauchy-McLaurin .

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$ (Xem ví dụ 1, mục 4.5)

Vậy chuỗi Riemann hội tụ với $\alpha > 1$, phân kì với $\alpha \le 1$

Ví dụ 9: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{1+\alpha} n}$, $(\alpha > 0)$

Giải:

Đặt $f(x) = \frac{1}{x\ln^{1+\alpha} x}$, nguyên hàm của $f(x)$ trên $[2,+\infty)$ là $F(x) = -\frac{1}{\alpha\ln^{\alpha} x}$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ Vậy $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ , do đó chuỗi đã cho hội tụ .

Ví dụ 10: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n.\ln(\ln n)}$

Giải:

$f(x) = \frac{1}{x\ln x.\ln(\ln x)}$ có nguyên hàm là $F(x) = \ln(\ln(\ln x))$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, tích phân $\int_3^{+\infty} f(x)dx$ phân kì , chứng tỏ chuỗi đã cho phân kì

5.1.3. Chuỗi đan dấu

A. Định nghĩa chuỗi đan dấu

Chuỗi số có dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ trong đó $a_k > 0$, $\forall k$ (5.7)

hoặc $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$ trong đó $a_k > 0$, $\forall k$ (5.8)

gọi là chuỗi đan dấu.

Chẳng hạn $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ là các chuỗi đan dấu

Sự hội tụ hay phân kì của các dạng (5.7) , (5.8) có tính chất như nhau. Dưới đây chúng ta xét dạng (5.7).

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi đan dấu

Định lí Leibnitz.

Cho chuỗi (5.7) nếu dãy (a_n) thoả mãn các điều kiện :

- Dãy (a_n) đơn điệu giảm: $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in N$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Thì chuỗi (5.7) hội tụ về tổng S và $S < a_1$

Chứng minh: Dãy tổng riêng chẵn $S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n+1} a_n$ có thể biểu diễn như sau:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Do $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in N$, nên dãy (S_{2m}) là dương và tăng ngặt. Mặt khác.

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Suy ra $S_{2m} < a_1$, như vậy $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ (Theo định lí 1 mục 1.3.3.)

Dãy tổng riêng lẻ có dạng : $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$

Vì $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ nên $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$

Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (Xem hệ quả mục 1.3.4). Chứng tỏ chuỗi hội tụ về S.

Mặt khác $S_{2m+1} = S_{2m-1} - (a_{2m} - a_{2m+1})$ suy ra dãy (S_{2m+1}) dương và giảm ngặt . Vì thế nhận được bất đẳng thức

$$S_{2m} < S < S_{2m+1} < S_{2m-1} < \ldots < a_1$$

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của chuỗi số sau :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}, \ (\alpha > 0)$$

Giải:

Chuỗi là đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibnitz:

$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ đơn điệu giảm và $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n . \sqrt{n}}{n}$

Giải:

Chuỗi là đan dấu tuy nhiên phân kì vì là tổng của chuỗi điều hoà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

và chuỗi đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ đã xét ở ví dụ 1 với $\alpha = \frac{1}{2}$.

5.1.4. Chuỗi có số hạng mang dấu bất kì

A. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Cho chuỗi số bất kì $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad , \quad a_i \in R \qquad (a)$

Lập chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \qquad\qquad (b)$

1.Nếu chuỗi (a) hội tụ và chuỗi (b) phân kì thì nói rằng chuỗi (a) bán hội tụ

2.Nếu chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ thì nói rằng chuỗi (a) hội tụ tuyệt đối .

Định lí: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) cũng hội tụ .

Chứng minh: Giả sử chuỗi (b) hội tụ về S'

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (a) và S_n' là tổng riêng thứ n của chuỗi (b), tức là:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P_n - Q_n$$

$$S_n' = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = P_n + Q_n$$

Trong đó P_n là tổng các số dương trong n số hạng đầu tiên , còn $-Q_n$ là

tổng các số âm trong n số hạng đầu tiên. Vì chuỗi (b) hội tụ về S' nên dãy (S_n') tăng ngặt và hội tụ về S':

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = S' \quad \text{và} \quad S_n' < S'$$

Rõ ràng các dãy (P_n) và (Q_n) tăng ngặt và thoả mãn:

$$P_n \le S_n' < S'$$

$$Q_n \le S_n' < S' \ , \ \forall n$$

Suy ra các dãy (P_n) và (Q_n) hội tụ :

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \ , \ \lim_{n\to\infty} Q_n = Q$$

Vậy $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = P - Q = S$,

Nghĩa là chuỗi (a) hội tụ về S.

Chú ý: Trong nhiều bài toán xét sự hội tụ của chuỗi số (a), nhờ vào định lí trên người ta đi xét sự hội tụ của chuỗi (b). Đó là chuỗi số dương nên có thể sử dụng các tiêu chuẩn trong mục B của 5.1.2. Trong trường hợp sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy mà chuỗi (b) phân kì thì kết luận chuỗi (a) cũng phân kì vì thấy ngay được trong trường hợp này số hạng tổng quát không dần tới không khi $n \to \infty$

B*. Một số tính chất của chuỗi bán hội tụ và hội tụ tuyệt đối

1.Nếu chuỗi đã cho là bán hội tụ thì có thể lấy số S^* tuỳ ý (hữu hạn hoặc vô hạn) để sao cho khi thay đổi vị trí các số hạng được chuỗi mới hội tụ về S^*. Nói cách khác, trong trường hợp này tính chất giao hoán, tính chất kết hợp không còn đúng đối với tổng vô hạn.

Chẳng hạn: Xét chuỗi bán hội tụ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+...=\ln 2$$

có tổng riêng thứ 2n là: $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$

(Chuỗi hội tụ về $S=\ln 2$, xem công thức 5.35)

Xét chuỗi mới do thay đổi vị trí các số hạng

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+...$$

Xét các tổng riêng của chuỗi này.

$$S_{3n}^*=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n}$$

$$S_{3n-1}^*=S_{3n}^*+\frac{1}{4n}$$

$$S_{3n-2}^*=S_{3n-1}^*+\frac{1}{4n-2}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}^*=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n-1}^*=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n-2}^*=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}\ln 2$

Chứng tỏ chuỗi mới hội tụ về $S^*=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Nếu chuỗi đã cho hội tụ về S và là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi mới nhận được bằng cách thay đổi vị trí các số hạng hoặc bằng cách nhóm một số hữu hạn các số hạng lại cũng hội tụ về S và cũng là hội tụ tuyệt đối. Nói cách khác trong trường hợp này tính chất giao hoán và kết hợp được giữ nguyên đối với chuỗi vô hạn

3. Cho hai chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$

Lập bảng số $a_1b_1 \quad a_2b_1 \quad a_3b_1 \quad ... \quad a_kb_1 \quad ...$

$$a_1b_2 \quad a_2b_2 \quad a_3b_2 \quad ... \quad a_kb_2 \quad ...$$

....

$$a_1b_j \quad a_2b_j \quad a_3b_j \quad ... \quad a_kb_j \quad ...$$

Lập dãy số (u_n) với $u_1 = a_1b_1$, $u_2 = a_1b_2 + a_2b_1$, ...

(v_n) với $v_1 = a_1b_1$, $v_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1$, ...

Các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ gọi là chuỗi tích của hai chuỗi đã cho.

Nếu hai chuỗi đã cho hội tụ tương ứng về S_1 , S_2 và là hội tụ tuyệt đối thì các chuỗi tích của chúng hội tụ về $S_1 . S_2$ và là hội tụ tuyệt đối.

5.2. CHUỖI HÀM

5.2.1. Các khái niệm chung về chuỗi hàm

A. Định nghĩa chuỗi hàm

Cho dãy hàm thực $\left(f_n(x)\right)$, $x \in (a,b)$,

gọi $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ (5.9)

là một chuỗi hàm xác định trên (a,b).

B. Miền hội tụ của chuỗi hàm

1. Điểm $x_0 \in (a,b)$ là điểm hội tụ của chuỗi hàm nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ.

2. Tập X các điểm hội tụ của chuỗi hàm gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

3. Hàm số $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ với $x \in (a,b)$ gọi là tổng riêng thứ n chuỗi hàm. Chuỗi hàm gọi là hội tụ về $S(x)$ với $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \forall x \in X$. Trong trường hợp này kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, $x \in X$

4. Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ hội tụ trên tập X thì nói rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối trên tập X .

Sau đây ta sẽ tìm miền hội tụ của một số chuỗi hàm.

Ví dụ 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Giải:

Tập xác định : R

Đó là chuỗi Riemann với tham số là x . Vậy miền hội tụ $X = (1,+\infty)$

Ví dụ 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Giải:

Tập xác định : R

Lấy $x \in X$ và xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$. Dùng tiêu chuẩn Cauchy ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, Vậy chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối trên R. Đương nhiên miền hội tụ $X = R$.

Ví dụ 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$

Giải:

Tập xác định: R

Lấy $x \in R$ ta có $\left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

Vậy chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối trên R.

Ví dụ 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1 + n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1 + (n-1)^2 x^2} \right)$

Giải:

Tập xác định : R

Tổng riêng thứ n : $S_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0$, $\forall x$. Vậy miền hội tụ là R.

5.2.2*. Sự hội tụ đều của chuỗi hàm

A. Định nghĩa

1. Dãy hàm $(f_n(x))$ được gọi là hội tụ đều về hàm $f(x)$ trên tập X nếu như

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0(\varepsilon), \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

2. Chuỗi hàm (5.9) được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X nếu dãy tổng riêng của nó hội tụ đều về $S(x)$ trên X.

Nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$, $\forall n > n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$ (5.10)

Vậy nếu chuỗi hội tụ đều về $S(x)$ thì phần dư $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ sẽ hội tụ đều về 0, tức là:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \ , \ \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X \qquad (5.11)$$

Trong trường hợp chuỗi hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên (a,b) thường kí hiệu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \ , \ x \in (a,b)$$

Ví dụ 1: Chứng minh chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$

hội tụ đều trên $[0,1]$

Giải:

$$S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \ , \ \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0 \ , \ x \in [0,1]$$

$$|R_n(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{2nx}{1+n^2x^2}.\frac{1}{2n} \le \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Suy ra $\exists n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ để $\forall n > n_0$ sẽ có $|R_n(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in [0,1]$

Ví dụ 2: Chứng tỏ rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$

không hội tụ đều trên $[0,1]$

Giải:

Từ ví dụ 4 ta có phần dư thứ n của chuỗi là $|R_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ , \ x \in [0,1]$

Như vậy $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \ , \ \forall n \ , \ \exists x_n = \frac{1}{n} \in [0,1] \Rightarrow |R_n(x_n)| = \frac{1}{2} = \varepsilon$

Chứng tỏ chuỗi không hội tụ đều trên $[0,1]$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng các chuỗi hàm sau đây hội tụ đều trên tập R .

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$

Giải:

Với x cố định trên R ta nhận được các chuỗi số đan dấu. Theo định lí Leibnitz các chuỗi này hội tụ .

a. $\forall x \in R$, Theo định lí Leibnitz thì phần dư của chuỗi. $R_n(x)$ thoả mãn $\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Vậy $R_n(x) \Rightarrow 0$ chứng tỏ chuỗi hàm hội tụ đều trên R.

b. $\forall x \in R$ có $\left|R_n(x)\right| < \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Vậy $R_n(x) \Rightarrow 0$ chứng tỏ chuỗi hàm hội tụ đều trên R.

B. Các tiêu chuẩn về sự hội tụ đều của chuỗi hàm

1. Tiêu chuẩn Cauchy.

Định lí: Giả sử $(S_n(x))$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm. Để chuỗi hàm hội tụ đều trên tập X điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in N \ , \ \forall n > n_0 \ , \ \forall p \in N$$

(5.12)

$$\Rightarrow \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$$

Chứng minh:

Điều kiện cần: Ta có chuỗi hội tụ đều trên X về $S(x)$, tức là $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in N \ , \ \forall n > n_0 \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall x \in X$

Lấy $n > n_0$ và $\forall p \in N$ sẽ có

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|S_{n+p}(x) - S(x) + S(x) - S_n(x)\right|$$

$$\le \left|S_{n+p}(x) - S(x)\right| + \left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Điều kiện đủ: Trước khi chứng minh điều kiện đủ chúng ta hãy công nhận nguyên lý hội tụ sau đây của dãy số:

Để dãy số (a_n) hội tụ thì điều kiện cần và đủ là

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \ , \ \forall n > n_0 \ , \ \forall p \Rightarrow \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$$

Trong trường hợp này gọi (a_n) là dãy Cauchy.

Từ điều kiện (5.12) rõ ràng với $x \in X$ nhận được $(S_n(x))$ là dãy Cauchy. Vậy tồn tại hàm $S(x)$ xác định trên X để $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Từ (5.12) suy ra $\lim\limits_{p\to\infty}\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$

hay là $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$

Vậy $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ trên X

2. Tiêu chuẩn Weierstrass.

Định lí: Giả sử các số hạng của chuỗi hàm thoả mãn bất đẳng thức

$$|f_n(x)| \le a_n \quad , \quad \forall x \in X \tag{5.13}$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ . Khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên tập X

Chứng minh: Trước hết chứng minh sự hội tụ tuyệt đối trên X.

Lấy x_0 tuỳ ý trên X có $|f_n(x_0)| \le a_n$. Theo định lí so sánh mục B, 5.1.2 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ hội tụ tức là $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ tuyệt đối. Vì x_0 tuỳ ý trên X chứng tỏ chuỗi hội tụ tuyệt đối trên X.

Xét sự hội tụ đều trên X.

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ , nghĩa là dãy tổng riêng $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ hội tụ. Theo nguyên lí hội tụ sẽ có :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists n_0 \quad , \quad \forall n > n_0 \quad , \quad \forall p \in N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Ta có: $$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in X$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi hàm hội tụ đều trên X.

Ví dụ 4: Xét sự hội tụ của các chuỗi hàm sau đây:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$$

Giải:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad , \quad \left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad , \quad \forall x \in R$$

Chuỗi Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ vậy các chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên R

Từ ví dụ trên suy ra nếu các chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tuyệt đối thì các chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ hội tụ đều trên R.

C. Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Định lí 1: Cho chuỗi hàm (5.9), các hàm số $f_i(x)$, $(i = 1,2,...)$ liên tục trên tập X và hội tụ đều về $S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X

Chứng minh: Lấy $x \in X$ và sẽ chứng minh sự liên tục của $S(x)$ tại điểm x đó.

Lấy $h \in R$ sao cho $x+h \in X$ và gọi $S_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Xét $|S(x+h)-S(x)| = |S(x+h)-S_n(x+h)+S_n(x+h)-S_n(x)+S_n(x)-S(x)|$

$$\leq |S(x+h)-S_n(x+h)| + |S_n(x+h)-S_n(x)| + |S_n(x)-S(x)|$$

Do tính hội tụ đều của dãy $(S_n(x))$ trên X nên

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists n_0(\varepsilon) \;,\; \forall n > n_0 \Rightarrow |S(x+h)-S_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \;,\; |S_n(x)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ngoài ra $S_n(x)$, $(n > n_0)$ là tổng n hàm số liên tục tại x trên X. Vậy với ε đã chọn thì tồn tại $\delta > 0$ để $|h| < \delta$ sẽ có.

$$|S_n(x+h)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Như vậy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ để $|h| < \delta$ thì có $|S(x+h)-S(x)| < \varepsilon$

Chứng tỏ $S(x)$ liên tục tại $x \in X$.

Tính chất này thường dùng để chứng minh sự hội tụ không đều của chuỗi hàm trên tập X nào đó.

Ví dụ 5: Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ trên $[0,2)$

Giải:

$$S_n(x) = 1-(1-x)^{n+1} \quad , \quad x \in [0,2)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x = 0 \\ 1 & \text{với } x \in [0,2)\setminus\{0\} \end{cases}$$

Các hàm $x(1-x)^n$ liên tục trên $[0,2)$ tuy nhiên $S(x)$ gián đoạn tại $x=0$. Vậy chuỗi hàm hội tụ không đều trên $[0,2)$.

Định lí 2: Cho chuỗi hàm (5.9) hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$ và các hàm $f_i(x)$, $(i=1,2,...)$ liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b f_i(x)dx \tag{5.14}$$

Hệ thức (5.14) chứng tỏ với điều kiện nào đó có thể lấy tích phân từng từ của chuỗi hàm.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx = \int_a^b S(x)dx$

Tức là $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx\right| < \varepsilon$

Các tích phân tồn tại do tính liên tục của các hàm dưới dấu tích phân.

Thật vậy do chuỗi hàm hội tụ đều về $S(x)$ nên

$$\forall\varepsilon > 0 \;,\; \exists n_0 : \;\forall n > n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

mà
$$\left|\int_a^b S(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dx\right| = \left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b [S(x) - S_n(x)]dx\right| \le \int_a^b |S(x) - S_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

Chú ý: Sự hội tụ đều chỉ là điều kiện đủ để lấy tích phân từng từ của chuỗi, sau đây chúng ta sẽ nêu ra một số ví dụ minh hoạ điều đó .

Ví dụ 6: Chứng minh các hệ thức sau:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]dx$$

Giải:

Theo ví dụ 6, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ không hội tụ đều trên $[0,1]$

Tuy nhiên chuỗi hội tụ về hàm $S(x) = 0$ và tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ ta có } \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

Vậy hệ thức đúng.

Định lí 3: Nếu chuỗi hàm (5.7) hội tụ về hàm $S(x)$ trên tập X và các hàm $f_i(x)$ thoả mãn:

+ $f_i'(x)$ liên tục trên X, $\forall i = 1,2,...$

+ $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ hội tụ đều về $R(x)$ trên X

Khi đó $$S'(x) = R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x) \;,\; x \in X \qquad (5.15)$$

Hệ thức (5.15) chứng tỏ với các điều kiện nào đó có thể lấy vi phân từng từ của chuỗi hàm.

Chứng minh: Lấy $x_0 \in X$ và $x \in X$ khi đó $f_i'(x)$ liên tục trên $[x_0, x]$, $i = 1,2,...$. Theo định lí 2 ta có:

$$\int_{x_0}^{x} R(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} f_i'(x)dx$$

$$= f_1(x) - f_1(x_0) + f_2(x) - f_2(x_0) + \ldots + f_n(x) - f_n(x_0) + \ldots$$

$$= S(x) - S(x_0)$$

Theo định lí 1, hàm $R(x)$ liên tục trên X do đó $S(x)$ khả vi trên X. Suy ra

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} R(x)dx = R(x) = S'(x)$$

Hay $\qquad S'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$

5.3. CHUỖI LŨY THỪA

5.3.1. Các khái niệm chung về chuỗi luỹ thừa

A. Định nghĩa chuỗi luỹ thừa

Một chuỗi hàm có dạng $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad , \quad a_i \in R \quad , \quad \forall i$ (5.16)

hoặc $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i \quad , \quad a$ là hằng số (5.17)

Gọi là một chuỗi luỹ thừa. Trong chuỗi luỹ thừa trên a_i là các hằng số $(i = 1,2,...)$ gọi là các hệ số của chuỗi luỹ thừa. Chuỗi (5.17) suy từ (5.16) bằng phép thay x bởi $x - a$. Do đó để thuận tiện, dưới đây chúng ta chỉ cần xem xét chuỗi (5.16).

B. Tính chất hội tụ của chuỗi luỹ thừa

Định lí Aben (Abel)

Nếu chỗi luỹ thừa (5.16) hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x thoả mãn $|x| < |x_0|$

Nếu chuỗi luỹ thừa (5.16) phân kì tại $x = x_1$ thì phân kì tại mọi điểm x thoả mãn $|x| > |x_1|$

Chứng minh: Chuỗi số $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$ hội tụ . Từ điều kiện cần của chuỗi hội tụ suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Từ điều kiện của dãy hội tụ suy ra tồn tại số M để $|a_n x_0^n| \leq M \quad , \quad \forall n$. Xét

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

Ta có $\left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

Với x thoả mãn $|x| < |x_0|$ thì chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ. Vậy chuỗi

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ hội tụ chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| < |x_0|$

Phần hai của định lí là hệ quả trực tiếp từ phần một.

C. Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa

Trước hết ta thừa nhận một định lí sau:

Định lí 1: Đối với chuỗi luỹ thừa (5.16) luôn tồn tại số $R \ge 0$ để chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$, phân kì trong các khoảng $(-\infty, -R), (R, +\infty)$. Số R thoả mãn điều kiện trên gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (5.16).

Định lí 2: (Qui tắc tìm bán kính hội tụ).

Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,

(5.18)

thì
$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0 \end{cases} \qquad (5.19)$$

$R = 0$ nghĩa là chuỗi luỹ thừa chỉ hội tụ tại $x = 0$

$R = \infty$ nghĩa là chỗi luỹ thừa hội tụ tại mọi x

Chứng minh:

- Trường hợp $0 < \rho < +\infty$. Giả sử x xác định xét chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$. Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert sẽ có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x| = D$$

Khi $D < 1$ hay $|x| < \frac{1}{\rho}$ chuỗi số hội tụ

$D > 1$ hay $|x| > \frac{1}{\rho}$ chuỗi số phân kì

Theo định nghĩa suy ra $R = \frac{1}{\rho}$

• Trường hợp $\rho = \infty$. Hiển nhiên chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối tại $x = 0$ Với $x \neq 0$ có $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \infty > 1$. Vậy chuỗi luỹ thừa phân kì với $\forall x \neq 0$ (Xem chú ý mục A, 5.1.4). Suy ra $R = 0$.

• Trường hợp $\rho = 0$, lấy x tuỳ ý có $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = 0 < 1$. Chứng tỏ chuỗi luỹ thừa hội tụ với mọi x, hay nói cách khác $R = \infty$.

Chú ý: Từ định lí 2 suy ra: Để tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa trước hết ta tìm bán kính hội tụ R của nó, sau đó xét tiếp sự hội tụ của các chuỗi số $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(\pm R)^i$.

Ví dụ 1: Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Giải:

a. Bán kính hội tụ: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \rho \Rightarrow R = 1$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì. Vậy miền hội tụ là $X = [-1,1)$

b. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0 \Rightarrow R = \infty$.

c. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \infty \Rightarrow R = 0$.

Ví dụ 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$2x^5 + \frac{4}{3}x^{10} + \frac{8}{5}x^{15} + \frac{16}{7}x^{20} + \ldots$$

Giải:

Chuỗi đã cho kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}x^{5n}$

Đặt $x^5 = X$, nhận được chuỗi luỹ thừa theo biến X. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}X^n$

Bán kính hội tụ của chuỗi mới: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{2n-1}} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$. Chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ hội tụ (Theo dấu hiệu Leibnitz)

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ phân kì (So sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$)

Trở về biến x: $-\frac{1}{2}\leq x^5<\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\leq x<\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

Miền hội tụ: $X=\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}},\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$

Ví dụ 3: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

Giải:

Đặt $x-1=X$, Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{\sqrt{n}}$

Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1\Rightarrow R=1$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ (theo dấu hiệu Leibnitz)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì .

Chuỗi đã cho hội tụ tại x thoả mãn $-1\leq x-1<1$ hay $0\leq x<2$

Miền hội tụ: $X=[0,2)$

Ví dụ 4: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n+1}}\left(\frac{x}{3-x}\right)^n$

Giải:

Đặt $\frac{x}{3-x}=X$

Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n X^n}{2^n\sqrt{n+1}}$

Bán kính hội tụ : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n+1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ phân kì (so sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n}}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Vậy chuỗi ban đầu hội tụ với x thoả nãn: $-2<\frac{x}{3-x}\leq 2$

Hay $\begin{cases} \dfrac{6-x}{3-x} > 0 \\ \dfrac{3x-6}{3-x} \le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<3 \\ x>6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x>3 \end{array}\right. \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x>6 \end{array}\right.$

Miền hội tụ : $X = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$.

D. Tính chất của chuỗi luỹ thừa

Giả sử chuỗi luỹ thừa (5.16) có bán kính hội tụ $R>0$ và $[a,b]$ là đoạn tuỳ ý chứa trong khoảng $(-R,R)$.

Tính chất 1. Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên $[a,b]$.

Chứng minh: Giả sử $[a,b] \subset (-R,R) \Rightarrow \exists x_0 \in (-R,R)$ để $[a,b] \subset [-x_0, x_0]$ mặt khác: $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|a_n x^n\right| \le \left|a_n x_0^n\right|$ vì $x_0 \in (-R,R)$ nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right|$ hội tụ, Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên $[a,b]$.

Tính chất 2. Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều về hàm $S(x)$, liên tục trên $(-R,R)$

Chứng minh: Lấy tuỳ ý $x \in (-R,R)$. Xét sự liên tục của $S(x)$ tại x. Thật vậy tồn tại $[a,b] \subset (-R,R)$ và $x \in [a,b]$. Theo tính chất 1 và định lí 1 mục C, 5.2.2 suy ra $S(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Vậy liên tục tại x

Tính chất 3. Bất kì x_1, x_2 trong khoảng $(-R,R)$ luôn có

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} x^n dx \tag{5.20}$$

Đặc biệt $\forall x \in (-R,R)$ thì $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (5.21)

Chứng minh: Vì $x_1, x_2 \in (-R,R)$ nên tồn tại đoạn $[a,b]$ thoả mãn: $x_1, x_2 \in [a,b] \subset (-R,R)$. Theo tính chất 1 và định lí 2 mục C, 5.2.2 suy ra các công thức (5.20), (5.21).

Tính chất 4. $\forall x \in (-R,R)$ luôn có $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (5.22)

Chứng minh: Lấy tuỳ ý $x \in (-R,R)$ sẽ chứng minh công thức (5.20) đúng tại điểm x đó.

Với $x \in (-R,R)$ sẽ tồn tại số r sao cho $|x| < r < R$, rõ ràng chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ hội tụ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n r^n = 0 \Rightarrow |a_n| r^n \le L, \forall n$ trong đó L là hằng số nào đó .

Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$

Ta có $n|a_n||x|^{n-1} = n|a_n|r^n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}.\frac{1}{r} \le \frac{L}{r}n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$

mà chuỗi số $\frac{L}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}$ hội tụ khi $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ (Theo tiêu chuẩn Cauchy)

Vậy $\forall x \in (-R, R)$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ hội tụ tuyệt đối.

Gọi bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm từng từ là R' thì rõ ràng $R' \ge R$

Theo định lí 3 mục C, 5.2.2 và tính chất 1, công thức (5.22) sẽ đúng trên $[-r, +r]$, vậy sẽ đúng tại x.

Ngoài ra ta thấy: $|a_n x^n| \le n|a_n x^n|$, $\forall n$

Chứng tỏ nếu chuỗi đạo hàm từng từ hội tụ tại $x \in (-R', R')$ thì chuỗi ban đầu cũng hội tụ tại x, do đó suy ra $R \ge R'$. Vậy chuỗi đạo hàm từng từ cũng có bán kính hội tụ là R.

Chú ý: Dưới đây chúng ta sẽ công nhận các kết quả mở rộng như sau.

- Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì nó sẽ hội tụ đều trên $[0, R]$
- Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì tổng $S(x)$ của chuỗi sẽ liên tục bên trái tại $x = R$
- Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $x = R$ thì công thức (5.21) vẫn đúng với $x = R$
- Nếu chuỗi đạo hàm từng từ hội tụ tại $x = R$ thì công thức (5.22) vẫn đúng với $x = R$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng hàm số: $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$. thoả mãn phương trình vi phân

$y^{(4)} = y$ trên R

Giải:

Đặt $x^4 = X$, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{(4n)!}$ có bán kính hội tụ là ∞ vì

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(4n)!}} = 0$, đương nhiên hội tụ $\forall X \ge 0$ suy ra chuỗi ban đầu hội tụ trên R. Theo tính chất 4 sẽ có

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \quad , \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

$$y''' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} \quad , \quad y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}$$

Thay chỉ số $n-1=k$ Vậy $y^{(4)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!}=y$

Ví dụ 2: Tính tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Giải:

Trước hết tìm bán kính hội tụ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right|}=1\Rightarrow R=1$

Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$ hội tụ tuyệt đối vì $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ . Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ trên $[-1,1]$. Gọi tổng của chuỗi là $S(x)$, rõ ràng $S(0)=0$. Theo tính chất 4 ta có

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \text{ với } -1<x\le 1$$

$$S'(0)=0$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad , \quad -1<x<1$$

$$S''(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow S'(x)=\int_0^x S''(x)dx \text{ vì } S'(0)=0$$

$$S'(x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^x=\ln(1+x)$$

Như vậy $$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad , \quad -1<x\le 1$$

Từ $S(0)=0$ suy ra

$$S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\ln(1+x)dx$$

$$S(x)=x\ln(1+x)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{x}{1+x}dx$$

$$=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$$

$$=(x+1)\ln(x+1)-x \quad \text{với } -1<x\le 1$$

Với $x=-1$ ta có $S(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Ta xét tổng riêng thứ n của chuỗi này

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Kết luận $S(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = -1 \\ (x+1)\ln(x+1) - x & \text{với } -1 < x \le 1 \end{cases}$

Ví dụ 3: Tính tổng của chuỗi hàm. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$

Giải:

Đặt $X = \frac{3x-2}{x}$. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nX^n$

Bán kính hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = 1$

Với $X = \pm 1$ nhận được các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\pm 1)^n$ phân kì, vì số hạng tổng quát không dần đến 0. Vậy chuỗi luỹ thừa hội tụ với $|X| < 1$. Gọi tổng của chuỗi đó là $S(X)$. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X^n$. Chuỗi này hội tụ với $|X| < 1$

Rõ ràng $S(X) = X\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X^n\right)' = X\left(\frac{X}{1-X}\right)' = X.\frac{1}{(1-X)^2}$, $|X| < 1$

Đặt $R(x)$ là tổng của chuỗi hàm vậy

$$R(x) = S\left(\frac{3x-2}{x}\right) \quad \text{với} \quad \left|\frac{3x-2}{x}\right| < 1$$
$$= \frac{(3x-2)x}{4(x-1)^2} \quad \text{với} \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

5.3.2. Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa

A. Khái niệm về chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ ở lân cận x_0

- Giả sử hàm số $f(x) \in C^{\infty}$ tại lân cận điểm x_0. Chuỗi luỹ thừa có dạng

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \tag{5.23}$$

được gọi là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận điểm x_0

• Giả sử hàm số $f(x)\in C^{\infty}$ tại lân cận điểm 0. Chuỗi luỹ thừa biểu diễn trong dạng

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}.x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^{n}+\ldots \qquad (5.24)$$

được gọi là chuỗi McLaurin của hàm số $f(x)$. Đó chính là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận của $x=0$

Ví dụ 1: Viết chuỗi Taylor của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ ở lân cận $x=1$

Giải:

Rõ ràng $f(x)=\frac{1}{x}$ khả vi mọi cấp ở lân cận $x=1$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k}.\frac{k!}{x^{k+1}}\Rightarrow f^{(k)}(1)=(-1)^{k}.k!$$

Chuỗi Taylor của hàm số đã cho có dạng

$$1-(x-1)+(x-1)^{2}-\ldots+(-1)^{k}(x-1)^{k}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(x-1)^{k}$$

Ví dụ 2: Viết chuỗi McLaurin của hàm số $f(x)=e^{2x}$

Giải:

$$f(x)=e^{2x}\Rightarrow f^{(k)}(x)=2^{k}e^{2x}\Rightarrow f^{(k)}(0)=2^{k}\ ,\quad \forall k$$

Chuỗi Maclaurin là:

$$1+2x+\frac{2^{2}x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{2^{k}x^{k}}{k!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k}x^{k}}{k!}$$

Ví dụ 3: Viết chuỗi McLaurin của hàm số $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^{2}}} & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$

Giải:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^{2}}}}{x}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{e^{\alpha^{2}}}=0$$

(Đặt $\frac{1}{x}=\alpha$,sử dụng tính chất tăng nhanh của hàm mũ so với hàm luỹ thừa)

Tương tự như trên sẽ nhận được $f^{(k)}(0)=0\ ,\ \forall k$

Vậy chuỗi McLaurin của hàm đã cho là

$$0+0.\frac{x}{1!}+0.\frac{x^{2}}{2}+\ldots=0.$$

Định lí: Nếu $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa ở lân cận của x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$$

Thì chuỗi đó là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận của x_0.

Chứng minh: Chúng ta sẽ chỉ ra $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $\forall k \in N$.

Thật vậy, theo tính chất 4 thì $f(x)$ khả vi mọi cấp trong lân cận của x_0 và có

công thức. $f^{(k)}(x) = \left[a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...\right]^{(k)}$, $\forall k \in N$

$$f^{(k)}(x) = a_k k! + a_{k+1}(k+1).k...2.(x - x_0) + ...$$

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k!$$

suy ra $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

- Nếu hàm số $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa ở lân cận của x_0 thì nói rằng $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận của x_0, Tức là trong trường hợp này chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận của x_0 hội tụ về chính $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (5.25)$$

Từ ví dụ 1, cho thấy hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận $x = 1$. Cụ thể trong khoảng $(0,2)$.

Từ ví dụ 2 cho thấy hàm số $f(x) = e^{2x}$ khai triển được thành chuỗi McLaurin trong khoảng $(-\infty, +\infty)$

Từ ví dụ 3 cho thấy chuỗi McLaurin của hàm $f(x)$ hội tụ về 0, nghĩa là hàm số $f(x)$ không khai triển được thành chuỗi McLaurin.

B. Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor

Định lí 1: Cho $f(x) \in C^{\infty}$ ở lân cận $x = x_0$, để hàm f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận của x_0 thì cần và đủ là phần dư Taylor $r_n(x)$ dần đến không khi $n \to \infty$

Chứng minh: Theo mục C, 3.5.1 ta có $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$

Trong đó $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad , \quad c \in (0, x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

$P_n(x)$ chính là tổng riêng thứ $n+1$ của chuỗi Taylor của $f(x)$. Theo định nghĩa chứng tỏ chuỗi Taylor của $f(x)$ hội tụ về chính $f(x)$ trong lân cận của của x_0 cần và đủ là $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

Định lí 2: Nếu $f(x) \in C^\infty$ ở lân cận của $x = x_0$ và trong lân cận đó có $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M$, $\forall k \in N$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

Chứng minh:

$$\left|r_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}$$

Chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ hội tụ trên $(-\infty,+\infty)$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

Theo định lí 1, vậy hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận của x_0.

C. Khai triển một số hàm thường dùng thành chuỗi McLaurin

1. $f(x) = e^x$

Hàm số e^x khả vi mọi cấp và

$$f^{(k)}(x) = (e^x)^{(k)} = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad , \quad \forall k \in N.$$

Lấy số thực dương tuỳ ý h, ta có

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = e^x < e^h \quad , \quad \forall x \in (-h,h) \quad , \quad \forall k$$

Suy ra hàm số $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi McLaurin trên $(-\infty,+\infty)$ và có dạng

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \forall x \in R \tag{5.26}$$

Suy ra

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad , \quad \forall x \in R \tag{5.27}$$

Từ đó bằng cách trừ và cộng hai chuỗi trên sẽ nhận được các khai triển sau đây:

$$shx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \forall x \in R \tag{5.28}$$

$$chx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \forall x \in R \tag{5.29}$$

2. $f(x) = \sin x$

Ta có $\quad f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \forall k \in N \quad , \quad \forall x$

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{với } k = 2m \\ (-1)^m & \text{với } k = 2m+1 \end{cases}$$

Ngoài ra $\quad \left|\sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le 1 \quad , \quad \forall k \quad , \quad \forall x$. Vậy

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad , \quad \forall x \in R \qquad (5.30)$$

Tương tự $\quad \cos x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad , \quad \forall x \in R \qquad (5.31)$

3. $f(x) = arctgx$

Theo ví dụ 3 mục B,3.3.3 có

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y.\sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \forall n \in N$$

Theo mục D, 3.5.1 nhận được chuỗi McLaurin của hàm số $f(x) = arctgx$ là:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots$$

Chuỗi này hội tụ trên $[-1,1]$

Xét $\quad r_n(x) = \dfrac{\cos^{n+1} y_0.\sin\left[(n+1)\left(y_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]}{n+1}.x^{n+1}$,

trong đó $y_0 = arctg\theta x \quad , \quad 0 < \theta < 1$.

$\forall x \in [-1,1]$ thì $\quad |r_n(x)| \le \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow r_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$

Vậy nhận được khai triển McLaurin của hàm số

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots \quad , \quad \forall x \in [-1,1] \qquad (5.32)$$

Thay $x = 1$ vào công thức trên chúng ta nhận được công thức khai triển của số π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \ldots \qquad (5.33)$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$ với $x>-1$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^n)}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\ \ ,\ \ n\geq 1$$

Chuỗi Maclaurin có dạng

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$

Chuỗi này hội tụ trên $(-1,1]$

Phần dư McLaurin thứ n trong dạng Lagrange là:

$$r_n(x)=(-1)^n.\frac{1}{n+1}.\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\ \ ,\ \ 0<\theta<1$$

$\forall x\in[0,1]$ thì $\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right|\leq 1$. Vậy $|r_n(x)|\leq\frac{1}{n+1}\to 0$ khi $n\to\infty$

Xét phần dư McLaurin trong dạng Cauchy (Xem mục C, 3.5.1)

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\ \ ,\ \ 0<\theta<1$$

$\forall x\in(-1,0)$ sẽ có

$$|r_n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \text{ vì } 1-|x|<1+\theta x$$

Ngoài ra $\quad 1+\theta x>1-\theta$ và $|x|^{n+1}\to 0$ khi $n\to\infty$

Vậy $\quad r_n(x)\to 0$ khi $n\to\infty$. Theo định lí 1 sẽ có:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ ,\ \forall x\in(-1,1] \qquad (5.34)$$

Nói riêng, với $x=1$ nhận được

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+... \qquad (5.35)$$

Thay x bởi $-x$ vào (5.32) sẽ có

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}+...=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Từ đó suy ra

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1} \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \tag{5.36}$$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R \setminus N$

Theo mục D, 3.5.1 nhận được chuỗi McLaurin của $f(x)$ như sau.

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Dùng công thức D'Alembert nhận được bán kính hội tụ của chuỗi trên là $R = 1$. Phần dư McLaurin trong dạng Cauchy sẽ là

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}.(1-\theta)^n x^{n+1} \ , \quad 0 < \theta < 1$$

Hay là

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-1-n+1)}{1.2.\ldots.n}.x^n \alpha\, x\,(1+\theta x)^{\alpha-1}.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

Với $x \in (-1,1)$ thì

$$1-\theta < 1+\theta x \Rightarrow \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} < |\alpha x|(1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$$

Chứng tỏ $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$ luôn bị chặn không phụ thuộc vào n , cuối cùng chuỗi luỹ thừa

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n$ có bán kính hội tụ là 1. Vậy số hạng tổng quát của nó dần về 0 khi $n \to \infty$

Như vậy $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $\forall x \in (-1,1)$.

Cuối cùng nhận được công thức Newton hay chuỗi nhị thức

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.\ldots.n}x^n + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \tag{5.37}$$

Sự hội tụ của chuỗi nhị thức tại $x = \pm 1$ phụ thuộc vào α, chúng ta không xem xét vấn đề này. Tuy nhiên dưới đây chúng ta thay $\alpha = 1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ sẽ nhận được lần lượt các khai triển ứng với $x = \pm 1$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ... \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \tag{5.38}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + ... + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + ...$$

$$\forall x \in \left(-1,1\right] \tag{5.39}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - ... + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + ..., \forall x \in \left(-1,1\right] \tag{5.40}$$

Ví dụ 1: Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ thành chuỗi luỹ thừa của $(x-1)$

Giải:

Thực chất của bài toán là khai triển hàm số đã cho thành chuỗi Taylor ở lân cận của $x = 1$

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

Áp dụng công thức (5.38) sẽ có

$$\frac{2}{x+2} = \frac{2}{3+x-1} = \frac{2}{3}.\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n \quad , \quad -2 < x < 4$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+x-1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \quad , \quad -1 < x < 3$$

Cuối cùng.

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n \quad , \quad -1 < x < 3$$

Ví dụ 2: Khai triển hàm số $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ thành chuỗi luỹ thừa của x.

Giải:

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Theo công thức (5.40) sẽ có

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad , \quad x \in \left[-1,1\right]$$

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx \quad \text{vì} \quad f(0) = 0$$

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.x^{2n+1} \quad , \quad x \in [-1,1]$$

Ví dụ 3: Tính các hệ số a_3, a_4 trong khai triển $e^{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Giải:

Nhớ rằng các chuỗi cho bởi công thức (5.26) , (5.30) hội tụ tuyệt đối $\forall x$

Vậy ta có

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

$$\sin^3 x = x^3 + o(x^5)$$

$$\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$$

Do vậy $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

Suy ra $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$

Ví dụ 4: Khai triển hàm số $f(x) = xe^x$ thành chuỗi luỹ thừa của $x-1$.

Giải:

$$f(x) = xe^x = e\left[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}\right]$$

$$= e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\right] = e\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n!} + \frac{(x-1)^n}{n!}\right]$$

$$= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}(x-1)^n$$

5.4. CHUỖI PHURIÊ (FOURIER)

5.4.1. Các khái niệm chung

A. Chuỗi lượng giác

Chuỗi hàm có dạng $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (5.41)$$

trong đó a_0, a_n, b_n, $n = 1,2,\ldots$ là các hằng số , được gọi là một chuỗi lượng giác.

B. Điều kiện hội tụ của chuỗi lượng giác

Định lí 1: Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi lượng giác (5.41) hội tụ tuyệt đối và đều trên tập R .

Chứng minh: $\forall x \in R$ luôn có $|a_n.\cos nx + b_n.\sin nx| \le |a_n| + |b_n|$

Vì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ hội tụ , theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra chuỗi (5.41) hội tụ tuyệt đối và đều trên tập R .

Định lí 2: Nếu các dãy số (a_n) , (b_n) đơn điệu giảm và hội tụ về 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi lượng giác (5.41) hội tụ trên tập $X = R \setminus \{2m\pi \ , \ m \in Z\}$

Chứng minh: Xét $x \ne 2m\pi$, $m \in Z$ các hàm số:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \quad , \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

Ta sẽ chứng minh sự hội tụ của các dãy hàm (A_n) và (B_n)

$$2\sin\frac{x}{2} A_n = \sum_{k=1}^{n} 2a_k \sin\frac{x}{2}\cos kx = \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$= a_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - a_1 \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = 0$

$$\left|(a_{k-1} - a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right| < |a_{k-1} - a_k| = a_{k-1} - a_k$$

Vậy $\sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k) = a_1 - a_n$, suy ra chuỗi số $\sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_k)$ hội tụ về a_1 .

Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra

$$\sum_{k=2}^{\infty} (a_{k-1} - a_k)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \Rightarrow S_1(x)$$

Vậy $2\sin\frac{x}{2} A_n$ hội tụ về $-a_1 \sin\frac{x}{2} + S_1(x)$

Hay $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = -\frac{a_1}{2} + \frac{S_1(x)}{2\sin\frac{x}{2}} = A(x)$, $\forall x \ne 2m\pi$, $m \in Z$

Tương tự chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B(x) \quad , \quad \forall x \neq 2m\pi \quad , \quad m \in Z$$

Chứng tỏ chuỗi lượng giác (5.41) hội tụ về

$$\frac{a_0}{2} + A(x) + B(x) \quad , \quad \forall x \neq 2m\pi \quad , \quad m \in Z$$

C. Chuỗi Fourier

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[-\pi,\pi]$, chuỗi lượng giác có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{5.42}$$

trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ , \ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \ , \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \, , \ k = 1,2,... \tag{5.43}$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$, các hằng số tính theo công thức (5.43) gọi là các hệ số Fourier của hàm số $f(x)$.

D. Chuỗi Fourier trong dạng phức

Xuất phát từ công thức Euler

$$\begin{aligned} \cos kx &= \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ \sin kx &= \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \end{aligned} \tag{5.44}$$

Thay (5.44) vào (5.42) sẽ nhận được chuỗi trong dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}$$

Từ (5.43) suy ra

$$a_k - ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx$$

Từ đó nhận thấy $a_k + ib_k = a_{-k} - ib_{-k}$

Đặt $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ thì $\frac{1}{2}(a_k + ib_k) = c_{-k}$

Như vậy $c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ (5.45)

Ngoài ra

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i.0.x}dx = c_0$$

Cuối cùng chuỗi Fourier đưa về dạng

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}$$

hay $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \qquad (5.46)$$

gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trong dạng phức.

E. Hàm số khai triển thành chuỗi Fourier

Nếu trong $[-\pi, \pi]$ chuỗi Fourier (5.42) hội tụ về chính hàm số $f(x)$ thì nói rằng hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier trên $[-\pi, \pi]$.

Định lí: Nếu $f(x)$ biểu diễn thành chuỗi lượng giác (5.42) trên $[-\pi, \pi]$ và các chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi đó chính là chuỗi Fourier của $f(x)$.

Chứng minh: Giả sử $f(x)$ biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (5.47)$$

Ta sẽ chỉ ra a_0 , a_k , b_k $(k = 1,2,...)$ chính là hệ số Fourier của $f(x)$, tức là được tính theo công thức (5.43).

Thật vậy, do chuỗi (5.47) hội tụ đều về $f(x)$ trên $[-\pi, \pi]$ nên có thể thực hiện phép lấy tích phân từng từ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx$$

$$= a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Nhân cả hai vế của (5.47) với $\cos mx$, $(m \neq 0)$ sau đó lấy tích phân sẽ có

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx.\cos mxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx.\cos mxdx = a_m\pi$$

Suy ra $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx$

Trong tính toán trên chúng ta đã sử dụng các kết quả dễ dàng nhận được dưới đây

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx = 0 \quad , \quad \forall k \in Z \qquad\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx = \begin{cases} 0 & \forall k \neq 0 \\ 2\pi & k = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx.\cos mxdx = 0 \;,\; \forall k,m \in Z \qquad\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx.\cos mxdx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 2\pi & k = m = 0 \\ \pi & k = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx.\sin mxdx = \begin{cases} 0 \;,\; k \neq m \;,\; k = m = 0 \\ \pi \;,\; k = m \neq 0 \end{cases}$$

Tương tự nhận được

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx\,.$$

5.4.2. Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier

Định lí Đirichlê (Dirichlet): Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về tổng $S(x)$ trên tập R. Tổng $S(x)$ có tính chất:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \;,\; \forall x \in R \tag{5.48}$$

Chúng ta thừa nhận định lí này. Công thức (5.48) cho thấy nếu $f(x)$ liên tục tại x thì $S(x) = f(x)$, như vậy coi rằng hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet thì khai triển được thành chuỗi Fourier.

Sau đây là các chú ý rất quan trọng đến việc khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet.

Chú ý:

1.Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2l$ bằng phép đổi biến $\begin{cases} x = \frac{l}{\pi}X \\ y = Y \end{cases}$ khi đó nhận được

hàm số $F(X) = f(x)$. Hàm số mới tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ta có: $F(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nX + b_n\sin nX$

Trở về hàm số ban đầu nhận được

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\frac{\pi x}{l} + b_n\sin n\frac{\pi x}{l} \quad , \tag{5.49}$$

trong đó

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx\ ,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx\ ,\ n=1,2,... \quad (5.50)$$

2. Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2l$ được mô tả bởi biểu thức giải tích trên $(\alpha,\alpha+2l)$ thì không nên sử dụng công thức (5.50) để tính các hệ số Fourier mà dựa vào tính chất hàm tuần hoàn (Xem ví dụ 1d mục 4.2.2) nhận được công thức sau:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx\ ,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l}f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx \quad (5.51)$$

3. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(x)\cos n\dfrac{\pi x}{l}$ là hàm số chẵn và $f(x)\sin n\dfrac{\pi x}{l}$ là hàm số lẻ do đó khai triển có dạng

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{l}\ ,\ \text{trong đó } a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos k\frac{\pi x}{l}dx\ ,\ k=0,1,2,... \quad (5.52)$$

Tương tự nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{l}\quad ,\ b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin k\frac{\pi x}{l}dx \quad (5.53)$$

4. Tương tự như trong phần khai triển thành chuỗi luỹ thừa, nhờ vào khai triển thành chuỗi Fourier có thể tính được tổng một số chuỗi đặc biệt.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 2 và có dạng

$f(x)=2-x\quad ,\quad x\in(0,2)$. Hãy khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

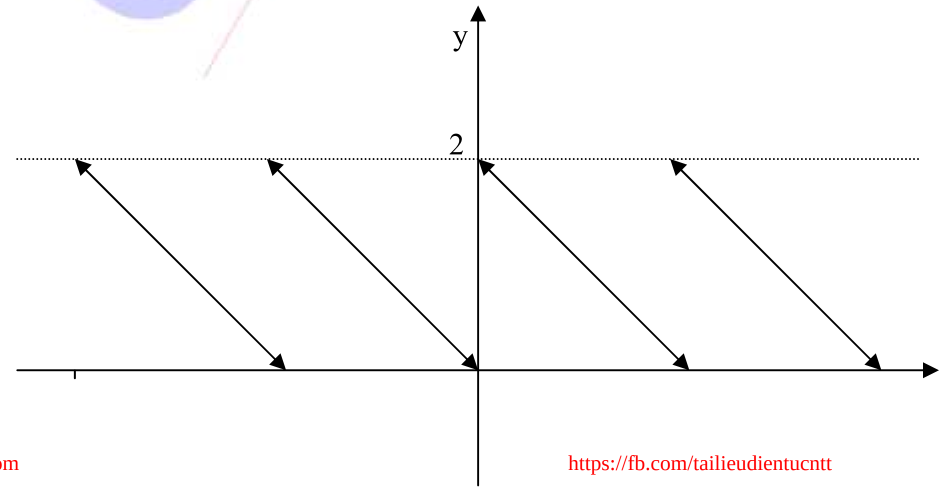
và tính tổng $S=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$

Giải: Đồ thị của hàm số được mô tả trên hình 5.1.

Hàm số thoả mãn các điều kiện của định lí Dirichlet và có các điểm gián đoạn loại 1 tại $x=2k\quad ,\quad k\in Z$.

Chúng ta tính các hệ số Fourier của hàm số

$$a_0=\int_0^2(2-x)dx=\frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_2^0=2$$



-4 -2 0 2 4 x

H.5.1

$$a_k = \int_0^2 (2-x)\cos k\pi x dx = \frac{2-x}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^2 + \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \sin k\pi x dx$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\Big|_0^2 = 0 \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$b_k = \int_0^2 (2-x)\sin k\pi x dx = \frac{x-2}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^2 - \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \cos k\pi x dx$$

$$= \frac{2}{k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^2 = \frac{2}{k\pi} \quad , \quad k = 1,2,...$$

Vậy $\quad 2 - x = 1 + \dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\pi x}{k} \quad , \forall x \neq 2k \quad , \quad k \in Z$

$$1 - x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi x}{k}$$

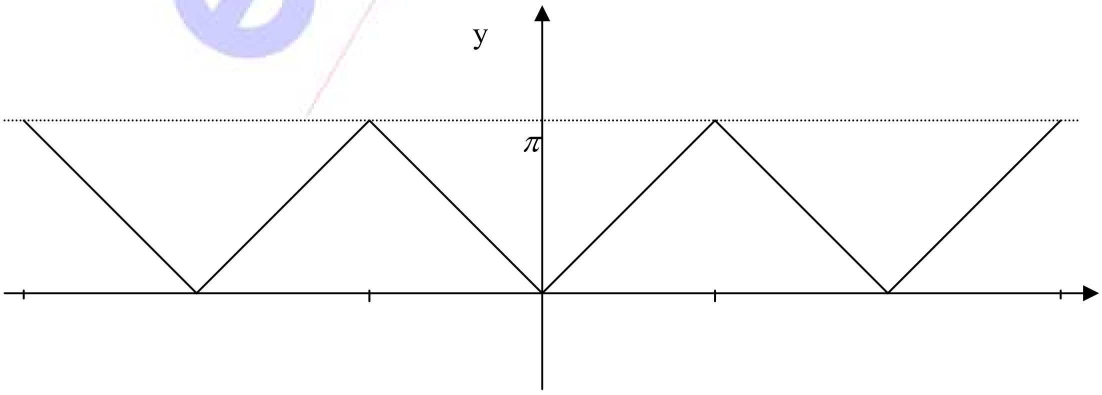
Thay $x = \dfrac{1}{2}$ vào công thức trên sẽ có $\quad \dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1} = S$.

Ví dụ 2: Hãy khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x) = |x|$ với $x \in [-\pi, \pi]$.

Từ đó tính tổng $\quad S = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}$

Giải:

Đồ thị hàm số cho bởi hình 5.2



-3π $\quad -2\pi$ $\quad -\pi$ $\quad 0$ $\quad \pi$ $\quad 2\pi$ $\quad 3\pi$ $\quad$ x

H.5.2

Hàm số đã cho là chẵn, liên tục $\forall x$ và thoả mãn định lí Dirichlet

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2m \\ -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2} & , n = (2m+1) \end{cases}$$

$$m = 0, 1, 2, ...$$

Vậy $\quad |x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} \quad , \quad \forall x$

Thay $x = 0$ vào công thức trên nhận được

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ là π, biết

$f(x) = \cos x$, $x \in (0, \pi)$. Hãy khai triển Fourier hàm số đã cho

Giải:

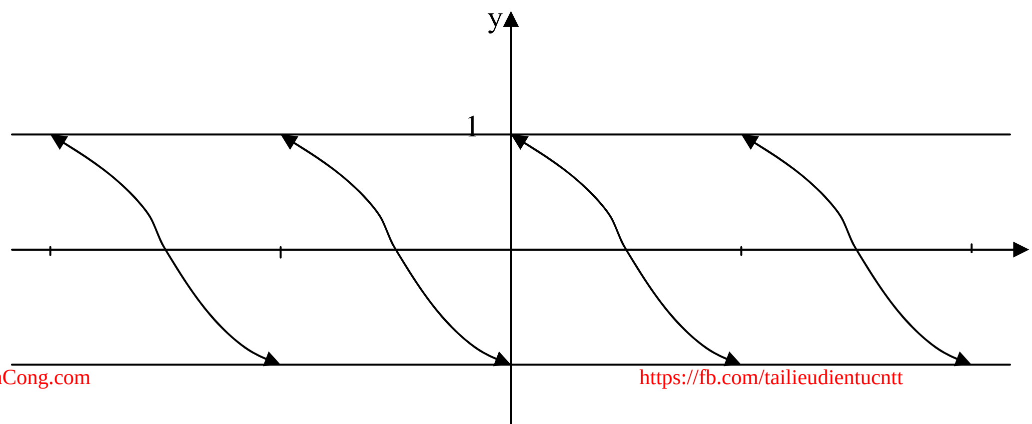
Đồ thị hàm số cho bởi hình 5.3

Hàm số là lẻ và thoả mãn định lí Dirichlet có các điểm gián đoạn $x = k\pi$, $k \in Z$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}$$



$-2\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \quad -\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi \quad x$

-1

H.5.3

Vậy $\cos x = \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$, $x \in (0,\pi)$.

5.4.3. Khai triển thành chuỗi Fourier của một hàm số bất kỳ

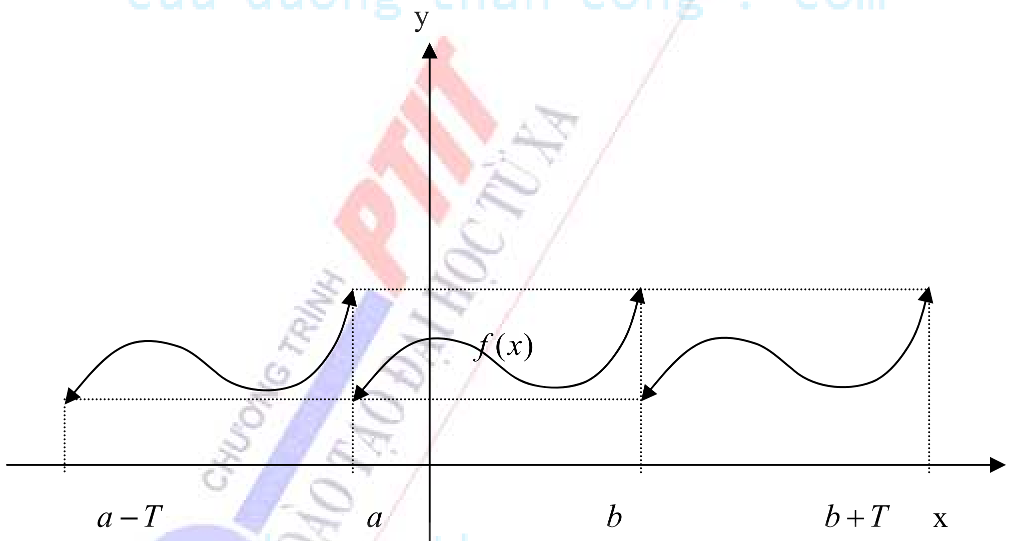
Xét hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên (a,b), $a < b$. Bây giờ chúng ta sẽ biểu diễn hàm số dưới dạng một chuỗi lượng giác trên (a,b).

Có nhiều cách biểu diễn, tuy nhiên thường dùng phương pháp sau đây:

A. Thác triển tuần hoàn

Lập hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = b - a$ và $F(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Xem hình 5.4



H.5.4

Rõ ràng $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier , $F(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Vậy tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên (a,b) ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.54}$$

Trong đó $l = \dfrac{b-a}{2}, a_0 = \dfrac{1}{l}\int_a^b f(x)dx$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, k = 1,2,... \quad (5.55)$$

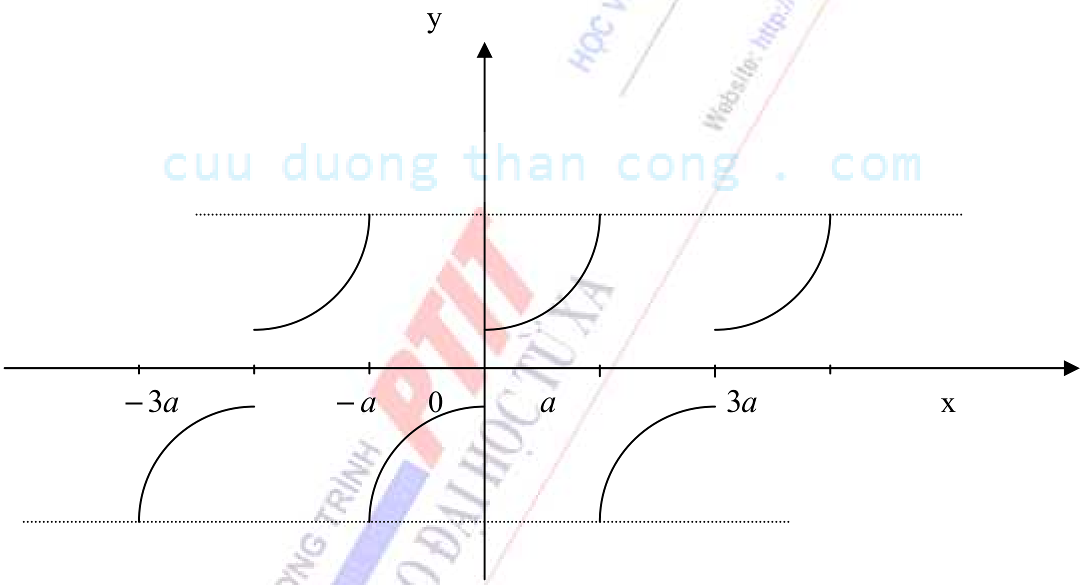
B. Thác triển chẵn, thác triển lẻ

Ngoài phương pháp thác triển tuần hoàn, khi hàm số $f(x)$ cho trên khoảng $(0,a)$, $a > 0$, người ta có dùng phương pháp thác triển lẻ hoặc chẵn hàm số đã cho, cụ thể như sau:

Lập hàm số $F_l(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2a$ và

$$F_l(x) = \begin{cases} -f(-x) & , \ -a < x < 0 \\ f(x) & , \ 0 < x < a \end{cases}$$

Xem hình 5.5



H5.5

Trên cơ sở khai triển hàm $F_l(x)$ đó là hàm số lẻ tuần hoàn với chu kì $2a$ (Xem chú ý 3 mục 5.4.2) chúng ta nhận được công thức sau tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên $(0,a)$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{a} \quad , \quad b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}dx \quad , \quad k = 1,2,... \qquad (5.56)$$

Lập hàm số $F_c(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2a$

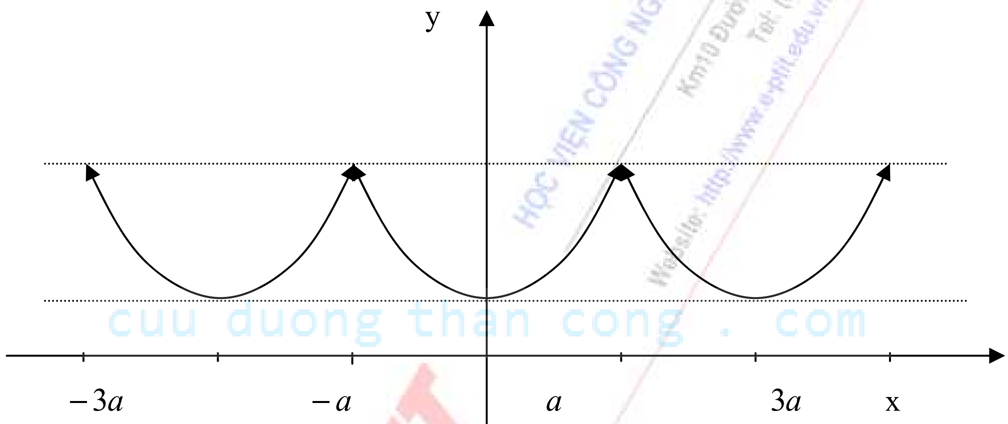
và $$F_c(x) = \begin{cases} f(-x) & , \ -a < x < 0 \\ f(x) & , \ 0 < x < a \end{cases}$$

Xem hình 5.6

Hàm số $F_c(x)$ là hàm số chẵn và thoả mãn định lí Dirichlet, khai triển được thành chuỗi Fourier. Vậy tại các điểm liên tục của $f(x)$ trên $(0,a)$ sẽ có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{a} \ , \ a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx \ , \ k = 0,1,2,... \quad (5.57)$$

Như vậy, nhờ vào thác triển lẻ hoặc chẵn hàm số sẽ nhận được khai triển theo hệ các hàm sin hoặc côsin của hàm số $f(x)$ đã cho.



H.5.6

Ví dụ 1: Cho $f(x) = x \ , \ x \in (0,1)$

a. Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier.

b. Khai triển hàm số theo các hàm sin.

c. Khai triển hàm số theo các hàm côsin.

Giải:

a. Bằng cách thác triển tuần hoàn hàm số với chu kì $T = 1$ (Xem 5.54) nhận được:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x$$

$$a_0 = 2\int_0^1 xdx = 1$$

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos 2k\pi x dx = 2\left(\frac{x}{2k\pi}\sin 2k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \sin 2k\pi x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2(k\pi)^2}\cos 2k\pi x\Big|_0^1 = 0 \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin 2k\pi x dx = -2\left(\frac{x}{2k\pi}\cos 2k\pi\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int_0^1 \cos 2k\pi x dx\right)$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k} \quad , \quad x \in (0,1)$$

b. Bằng cách thác triển lẻ hàm số (Xem 5.55) sẽ có:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x \quad , \quad x \in (0,1)$$

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin k\pi x dx = -2\left(\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx\right)$$

$$= -\frac{2\cos k\pi}{k\pi} - \frac{2}{(k\pi)^2}\sin k\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k-1} \quad , \quad k = 1,2,...$$

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin k\pi x}{k}$$

Công thức này đúng trên $[0,1)$

c. Bằng cách thác triển chẵn hàm số (Xem 5.52)

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x \quad , \quad \forall x \in (0,1)$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$$

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos k\pi x dx = 2\left(\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx\right)$$

$$= \frac{2}{(k\pi)^2}\cos k\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & , \ k = 2n \\ -\dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2} & , \ k = 2n+1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

Công thức này đúng trên $[0,1]$

Thay $x = 0$ hoặc $x = 1$ vào công thức trên sẽ nhận được tổng của một chuỗi số đặc biệt

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$. Hãy khai triển thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm côsin

Giải:

Thác triển chẵn hàm số đã cho sẽ có.

$$\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

trong đó

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+k)x + \sin(1-k)x] dx$$

Suy ra $a_1 = -\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = 0$

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k+1}\cos(k+1)x - \frac{1}{k-1}\cos(k-1)x\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\left((-1)^{k+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & , \ k = 2n+1 \\ -\frac{4}{\pi}.\frac{1}{4n^2-1} & , \ k = 2n \end{cases}$$

Vậy $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, $x \in [0,\pi]$

Thay $x = 0$ vào công thức sẽ có

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$$\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\ldots=S(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & , \ 0\le x<\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & , \ x=\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & , \ \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & , \ x=\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & , \ \dfrac{2\pi}{3}<x\le\pi\end{cases}$$

Giải:

Nhận thấy tổng của chuỗi là hàm số $S(x)$ xác định trên $[0,\pi]$ và các số hạng của chuỗi là các hàm côsin, vậy chuỗi đó chính là thác triển chẵn của hàm $f(x)$ nào đó cho trên $(0,\pi)$. Từ tổng $S(x)$, chúng ta hãy xét hàm $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & , \ 0<x<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & , \ \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{1}{2} & , \ \dfrac{2\pi}{3}<x<\pi\end{cases}$$

Và khai triển hàm $f(x)$ theo các hàm côsin

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx \quad , \quad x\in(0,\pi) \quad , \quad x\ne\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}dx\right)=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos kx dx-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos kx dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left[\sin\frac{k\pi}{3}+\sin\frac{2k\pi}{3}\right]=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{6}$$

$$=\begin{cases}0 & , \ k=2m\\ \dfrac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi}\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{6} & , \ k=2m+1\end{cases}$$

Tiếp tục

$$a_{2m+1} = \begin{cases} 0 & , \ m = 3k+1 \ , \ k \in N \\ \dfrac{\sqrt{3}}{\pi(6k+1)} & , \ m = 3k \ , \ k \in N \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\pi(6k+1)} & , \ m = 3k-1 \ , \ k \in N^* \end{cases}$$

Vậy $$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6k+1}\cos(6k+1)x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(6k-1)x}{6k-1}\right)$$

Theo định lí Dirichlet ta nhận được $S(x)$ chính là tổng của chuỗi.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π có các hệ số Fourier là $a_0, a_k, b_k, k = 1,2,\ldots$. Hãy tính các hệ số Fourier của hàm $f(x+h)$, $(h = const)$.

Giải:

Giả sử các hệ số Fourier của $f(x+h)$ là $A_0, A_k, B_k, k = 1,2,\ldots$. Khi đó.

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)dx = a_0$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos k(x-h)dx$$

$$= \cos kh.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos kx dx + \sin kh.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\sin kx dx$$

$$= a_k\cos kh + b_k\sin kh \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

Tương tự

$$B_k = b_k\cos kh - a_k\sin kh \quad , \quad k = 1,2,\ldots$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. M. FICHTENGÔN, Giáo trình phép tính vi tích phân, Tập 1,2,3. Nauka, Moskva,1969. (tiếng Nga)
2. G. M. FICHTENGÔN, Cơ sở giải tích toán học, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1977.
3. K. MAURIN, Analiza, Czesˈcˈ1. PWN, Warszawa, 1976.
4. R. A. ADAMS, Calculus-a complete, Addison,Wesley, New York,Don Mills, 1991.
5. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên), Toán học cao cấp ,Tập 1,2,3. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà nội, 1990.
6. JEAN-MARIE MONIER, Giáo trình toán, Tập 1,2,3,4. NXB Giáo dục, Hà nội, 1999 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris,1999)

MỤC LỤC