

# CHƯƠNG 4. BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

## 4.1 Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh

### 4.1.1 Thuật toán Dijkstra

#### 1) Đặt bài toán:

cuu duong than cong . com

**Input:** Đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh cho bởi ma trận trọng số  $a$  với các phần tử  $\geq 0$ , trong đó  $a[i][j] = \max$  nếu không có cạnh nối  $i$  với  $j$ ; Đỉnh  $s$ ;

**Output:** Độ dài  $d[v]$  đường đi từ  $s$  đến  $v$  và  $pr[v]$  là đỉnh trước  $v$  trên đường đi từ  $s$  đến  $v$ .

cuu duong than cong . com

## **2) Mô tả thuật toán**

Khởi tạo:  $d[v] = a[s][v]$ ;  $pr[v] = s$ ;  $vs[v] = 0$ ;

(1) Bắt đầu tìm kiếm từ  $s$ :  $d[s] = 0$ ;  $pr[s] = 0$ ;  $vs[s] = 1$ ;

(2) Tìm đỉnh  $u$  sao cho  $d[u] = \min\{d[i] \mid vs[i] = 0\}$ .

Nếu không tìm được thì chuyển sang (5). Nếu tìm được thì sang (3).

(3) Đặt  $vs[u] = 1$ .

(4) Đối với tất cả  $v \in G$  thỏa mãn ( $vs[v] = 0$ ) & ( $d[v] > d[u] + a[u][v]$ ) thì thay thế:

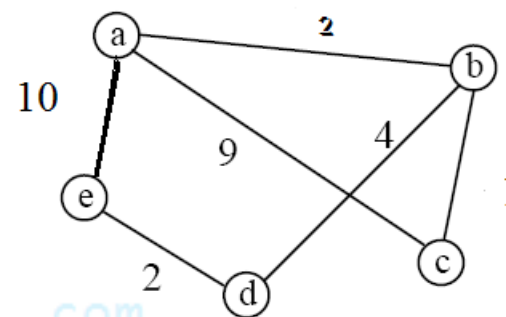
$pr[v] = u$ ;  $d[v] = d[u] + a[u][v]$ ; và quay lại (2).

(5) Xuất  $d[v]$  và  $pr[v]$ .

cuu duong than cong . com

### 3) Kiểm nghiệm thuật toán

**Ví dụ:** Cho đồ thị có trọng số G như hình bên.  
Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ  
đỉnh a.



cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

**Giải:** Lần lượt có:

i	a	B	c	d	e
1	0; 0	2; a	9; a	m; a	10; a
2		2; a	3; b	6; b	10; a
3			3; b	6; b	10; a
4				6; b	8; d
5					8; d

**Kết quả:** Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến b là 2:  $a \rightarrow b$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến c là 3:  $a \rightarrow b \rightarrow c$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến d là 6:  $a \rightarrow b \rightarrow d$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến e là 8:  $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e$ .

cuu duong than cong . com

**Ghi chú:** Trong thực tế thường sử dụng giải thuật trên vào bài toán sau:

**Input:** Đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh cho bởi ma trận trọng số  $a$  với các phần tử  $\geq 0$ , trong đó  $a[i, j] = \max$  nếu không có cạnh nối  $i$  với  $j$ ; Hai đỉnh  $s$  và  $t$ ;

**Output:** Độ dài  $d[t]$  đường đi từ  $s$  đến  $t$  và đường đi từ  $s$  đến  $t$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## Giải thuật:

Khởi tạo:  $d[i] = a[s, i]$ ;  $pr[i] = s$ ;  $vs[i] = 0$ ;

(1) Bắt đầu tìm kiếm từ  $s$ :  $d[s] = 0$ ;  $pr[s] = 0$ ;  $vs[s] = 1$ ;

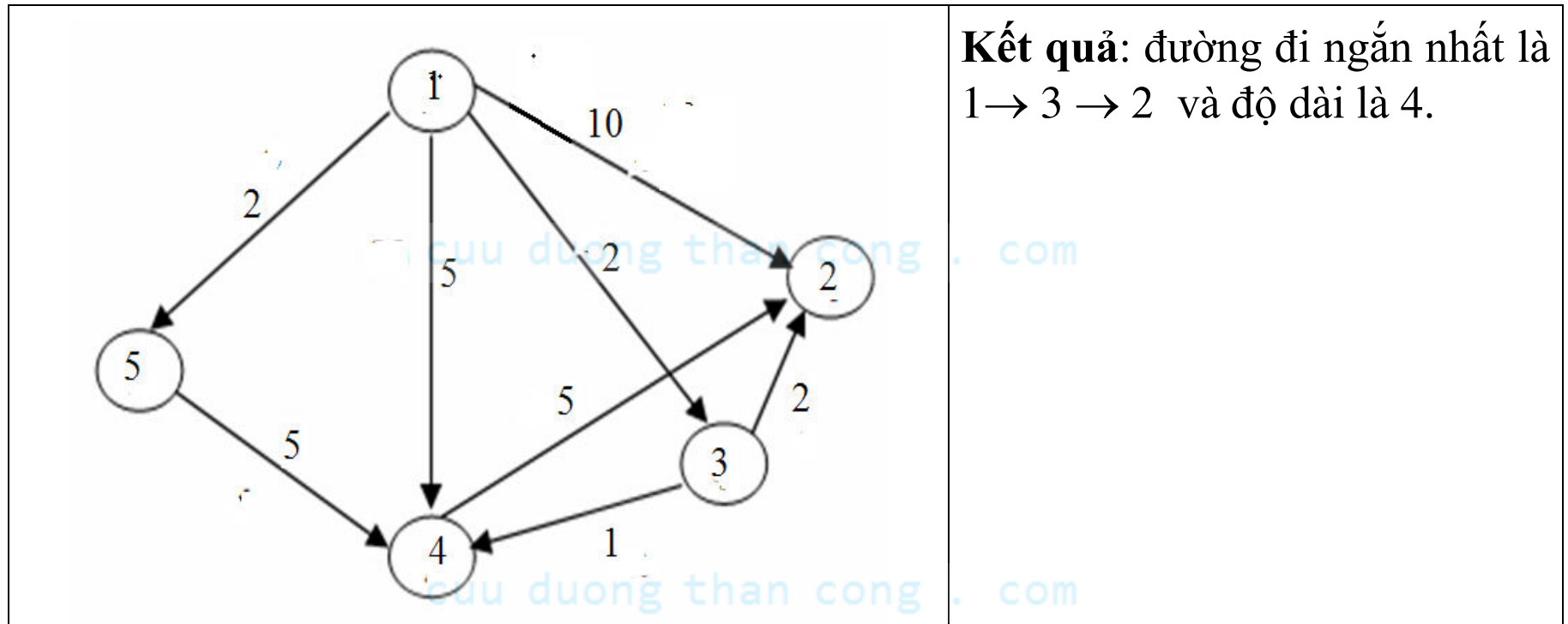
(2) Tìm đỉnh  $u$  sao cho  $d[u] = \min\{d[i] \mid vs[i] = 0\}$ . Nếu không tìm được thì chuyển sang (5). Nếu tìm được thì sang (3).

(3) Đặt  $vs[u] = 1$ . Nếu  $u = t$  thì chuyển sang (5); ngược lại chuyển sang (4);

(4) Đối với tất cả  $i \in G$  thỏa mãn ( $vs[i] = 0$ ) & ( $d[i] > d[u] + a[u, i]$ ) thì thay thế:  
 $pr[i] = u$ ;  $d[i] = d[u] + a[u, i]$ ; và quay lại (2).

(5) Nếu  $d[t] < \max$  thì xuất  $d[t]$  và đường đi từ  $s$  đến  $t$ ; nếu ngược lại xuất không có đường đi từ  $s$  đến  $t$ .

**Ví dụ.** Cho đồ thị  $G = (V, E)$ , với  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  biểu diễn bởi hình vẽ sau, tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 2



#### **4) Độ phức tạp tính toán**

Giải thuật Dijkstra có độ phức tạp  $O(n^2)$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



### 4.1.2 Thuật toán Bellman-Ford

#### 1) Đặt bài toán:

**Input:** Đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh cho bởi ma trận trọng số  $a$  không chứa chu trình âm, trong đó  $a[i][j] = \max$  nếu không có cạnh nối  $i$  với  $j$ ; Đỉnh  $s$ ;

**Output:** Độ dài  $d[v]$  đường đi từ  $s$  đến  $v$  và  $pr[v]$  là đỉnh trước  $v$  trên đường đi từ  $s$  đến  $v$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## **2) Mô tả thuật toán**

Khởi tạo:  $d[v] = a[s][v]$ ;  $pr[v] = s$ ;  $vs[v] = 0$ ;

(1) Bắt đầu tìm kiếm từ  $s$ :  $d[s] = 0$ ;  $pr[s] = 0$ ;  $vs[s] = 1$ ;

(2) Thực hiện  $n-2$  lần lặp:

(2.1) Với mọi đỉnh  $v \in V \setminus \{s\}$  thực hiện

(2.2) Với mọi đỉnh  $u \in V$  thực hiện

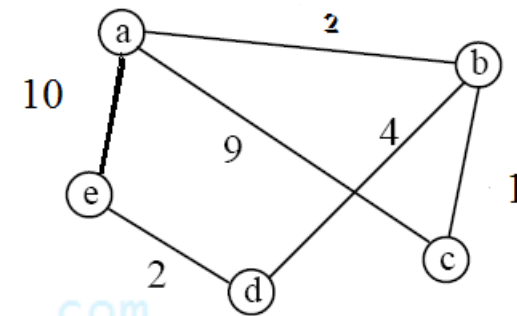
Nếu  $d[v] > d[u] + a[u][v]$  thì thay thế:

$pr[v] = u$ ;  $d[v] = d[u] + a[u][v]$ ;

(3) Xuất  $d[v]$  và  $pr[v]$ .

### 3) Kiểm nghiệm thuật toán

**Ví dụ:** Cho đồ thị có trọng số G như hình bên.  
Tìm đường đi ngắn nhất xuất phát từ  
đỉnh a.



cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

**Giải:** Lần lượt có:

k	a	B	c	d	e
0	0; 0	2; a	9; a	$\infty$ ; a	10; a
1		2; a	3; b	6; b	8; a
2		2; a	3; b	6; b	8; a
3		2; a	3; b	6; b	8; a
4		2; a	3; b	6; b	8; a

**Kết quả:** Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến b là 2:  $a \rightarrow b$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến c là 3:  $a \rightarrow b \rightarrow c$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến d là 6:  $a \rightarrow b \rightarrow d$ .  
Độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến e là 8:  $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e$ .

cuu duong than cong . com

#### **4) Độ phức tạp tính toán**

Thuật toán Bellman-ford có độ phức tạp  $O(n^3)$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## 4.2 Đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh

### 1) Đặt bài toán

**Input:** Đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh cho bởi ma trận trọng số  $a$  với các phần tử  $\geq 0$ , trong đó  $a[i][j] = \max$  nếu không có cạnh nối  $i$  với  $j$ ;

**Output:** Độ dài  $d[i][j]$  đường đi từ  $i$  đến  $j$  và  $pr[i][j]$  là đỉnh trước  $j$  trên đường đi từ  $i$  đến  $j$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

## **2) Giải thuật Floyd**

- Khởi tạo:  $d[i][j] = a[i][j]$ ;  $pr[i][j] = i$ ;
- Với mọi  $k \in G, i \in G, j \in G$  sao cho  $(d[i][j] > d[i][k] + d[k][j])$  thì thay thế:  
 $pr[i][j] = k$ ;  $d[i][j] = d[i][k] + d[k][j]$ ;
- Xuất  $d[i][j]$  và  $pr[i][j]$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

### **3) Độ phức tạp tính toán**

Thuật toán floyd có độ phức tạp  $O(n^3)$ .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com