

CHƯƠNG 6. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

NỘI DUNG:

- Giới thiệu bài toán
- Định lý Ford-Fulkerson
- Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng
- Một số bài toán luồng tổng quát
- Ứng dụng

cuu duong than cong . com

6.1 Giới thiệu bài toán

1. Mạng

Mạng là đồ thị có hướng $G = (V, E)$ thỏa mãn:

- Có duy nhất đỉnh s không có cung đi vào gọi là điểm phát;
- Có duy nhất đỉnh t không có cung đi ra gọi là điểm thu;
- Mỗi cung $e = (u, v) \in E$ có trọng số không âm $c(e) = c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua của cung e .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

2. Luồng trong mạng

Luồng f trong mạng $G = (V, E)$ là ánh xạ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ gán mỗi cung $e = (u, v) \in E$ một số thực không âm $f(e) = f(u, v)$ gọi là luồng trên cung e thỏa mãn các điều kiện:

(1) Luồng trên mỗi cung $e \in E$ không vượt quá khả năng thông qua:

$$0 \leq f(e) \leq c(e);$$

(2) Điều kiện cân bằng luồng tại mỗi đỉnh $v \in V$, $v \neq s, t$: Tổng luồng trên các cung đi vào v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi v .

Ký hiệu $\Gamma^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$,

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V: (v, w) \in E\}.$$

$$\text{Div}_f(v) = \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u, v) - \sum_{w \in \Gamma^+(v)} f(v, w) = 0.$$

3. Giá trị luồng

Giá trị của luồng f là $\text{val}(f) = \sum_{v \in \Gamma^+(s)} f(s, v) = \sum_{u \in \Gamma^-(t)} f(u, t)$.

4. Bài toán luồng cực đại

Input: Mạng $G = (V, E)$;

Output: Luồng f^* có giá trị luồng $\text{val}(f^*)$ lớn nhất;

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Ví dụ về luồng:

- Hệ thống ống dẫn dầu bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa dầu.
- Hệ thống các tuyến đường giao thông nối sân bay Nội Bài về Hồ Hoàn Kiếm.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

6.2 Định lý Ford-Fulkerson

1. Lát cắt:

Cho X là tập các đỉnh và $X^* = V \setminus X$ với $s \in X$ và $t \in X^* \Rightarrow (X, X^*)$ gọi là một lát cắt.

Khả năng thông qua của lát cắt:

$$c(X, X^*) = \sum_{u \in X, v \in X^*} c(u, v).$$

Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là lát cắt hẹp nhất.

Bổ đề 1. Giá trị của mọi luồng f không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt bất kỳ:
 $\text{val}(f) \leq c(X, X^*).$

\Rightarrow Giá trị luồng cực đại không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

cuu duong than cong . com

2. Một số khái niệm

- Cho luồng f trong mạng $G = (V, E)$. Xét đồ thị có trọng số G_f như sau:

(1) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $f(u, v) = 0 \Rightarrow e = (u, v) \in E_f$ với trọng số $c(u, v)$;

(2) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $f(u, v) = c(u, v) \Rightarrow e = (v, u) \in E_f$ với trọng số $f(u, v)$;

(3) Nếu $e = (u, v) \in E$ với $0 < f(u, v) < c(u, v) \Rightarrow e = (u, v) \in E_f$ với trọng số $c(u, v) - f(u, v)$ và $e = (v, u) \in E_f$ với trọng số $f(u, v)$.

- Các cung của G_f cũng là cung của G gọi là cung thuận.

- Các cung của G_f không là cung của G gọi là cung nghịch.

- G_f gọi là đồ thị tăng luồng.

- Gọi $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên G_f và δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số trên các cung thuộc P . Xây dựng luồng f' :

(1) Nếu $(u, v) \in P$ là cung thuận thì $f'(u, v) = f(u, v) + \delta$;

(2) Nếu $(u, v) \in P$ là cung nghịch thì $f'(u, v) = f(u, v) - \delta$;

(3) Nếu $(u, v) \notin P$ thì $f'(u, v) = f(u, v)$.

$$\Rightarrow \text{val}(f') = \text{val}(f) + \delta$$

\Rightarrow Thủ tục tăng luồng dọc theo P .

- Mọi đường đi từ s đến t trên G_f là đường tăng luồng f .

cuu duong than cong . com

Định lý Ford-Fulkerson

Các mệnh đề sau là tương đương:

- (1) f là luồng cực đại trong mạng;
- (2) Không tìm được đường tăng luồng;
- (3) Giá trị luồng f bằng khả năng thông qua của một lát cắt nào đó: $\text{val}(f) = c(X, X^*)$.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

6.3 Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng

Input: Mạng $G = (V, E)$ cho bởi ma trận trọng số $c[i][j]$;

Đỉnh phát s ; Đỉnh thu t ;

Output: Luồng cực đại f ; giá trị luồng $val(f)$;

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Thuật toán Max_Flow {

// Khởi tạo

for $u \in V$

for $v \in V$ { $f(u, v) = 0$; }

//Lặp

Stop = 0;

while (!Stop) {

if (Tìm được đường tăng luồng P) {

<Tăng luồng f dọc theo P >;

}

else Stop = 1;

}

return (f , $val(f)$);

}

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

```

void FindPath(){
    int cq, dq, u, v;
    int Stop = 1;
    for (u = 1; u <= n; u++) vs[u] = 0;
    cq = 1; dq = 1; q[cq] = s; vs[s] = 1; p[s] = 0; d[s] = 10000;
    while (dq <= cq){
        u = q[dq]; dq++;
        for (v = 1; v <= n; v++)
            if (!vs[v]) {
                if (c[u][v] > 0 && fl[u][v] < c[u][v]) {
                    p[v] = u; d[v] = Min(d[u], c[u][v] - fl[u][v]);
                    cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;
                    if (v = t) return;
                }
                if (c[v][u] > 0 && fl[v][u] > 0) {
                    p[v] = -u; d[v] = Min(d[u], fl[v][u]); cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;
                    if (v = t) return;
                }
            }
    }
    Stop = 0;
}

```

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

6.4 Một số bài toán luồng tổng quát

1. Mạng có nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

Xét mạng G có p điểm phát s_1, \dots, s_p và q điểm thu t_1, \dots, t_q . Một luồng có thể xuất phát từ một đỉnh phát bất kỳ đến một trong các đỉnh thu và được định nghĩa tương tự như trên.

- Bài toán luồng cực đại trên G được đưa về bài toán trên bằng cách bổ sung 1 đỉnh phát giả s và 1 đỉnh thu giả t .
- Từ đỉnh phát giả s có cạnh nối đến các đỉnh phát s_1, \dots, s_p với khả năng thông qua là vô cùng lớn.
- Từ các đỉnh thu t_1, \dots, t_q có cạnh nối đến đỉnh thu giả t với khả năng thông qua là vô cùng lớn.

Thuật toán tìm luồng cực đại:

- Tìm luồng cực đại f^* trên mạng $G \cup \{s, t\}$ bằng thuật toán Max_Flow;
- Bỏ hai đỉnh giả s và $t \Rightarrow$ có luồng cực đại f^* trên G với $val(f^*)$.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

2. Bài toán với khả năng thông qua của đỉnh và cạnh

Xét mạng G .

Ngoài khả năng thông qua $c[u][v]$ trên cạnh $(u, v) \in E$, còn có khả năng thông qua của đỉnh v là số nguyên không âm $d[v]$, $v \in V$.

Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện: tổng luồng đi vào đỉnh v không vượt quá $d[v]$.

Yêu cầu: Tìm luồng cực đại giữa s và t .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Thuật toán:

(1) Xây dựng mạng G' sao cho mỗi $v \in G$ tương ứng hai đỉnh v^+ , v^- trong G' với khả năng thông qua:

$$c[u^-][v^+] = c[u][v]; c[v^-][w^+] = c[v][w]; c[v^-][v^+] = d[v];$$

(2) Tìm luồng cực đại f^* trên G' ;

(3) Xuất f^* trên G và $\text{val}(f^*)$;

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

3. Mạng có khả năng thông qua bị chặn hai phía

Xét mạng G .

Khả năng thông qua trên cạnh $(u, v) \in E$ có cận trên là $c[u][v]$ và cận dưới là $d[u][v]$.

Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện:

$$d[u][v] \leq f[u][v] \leq c[u][v].$$

Yêu cầu: Tìm luồng cực đại giữa s và t .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Thuật toán:

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u ;

Xây dựng mạng G_u sao cho mỗi cung (u, v) có $d[u][v] \neq 0$ tương ứng hai cung (s_u, v) và (u, t_u) với khả năng thông qua $d[u][v]$; khả năng thông qua của (u, v) là $c[u][v] - d[u][v]$;

(2) $d^* = \sum_{(u, v) \in E} d[u][v]$;

(3) Tìm luồng cực đại f^* trên G_u ;

(4) Nếu $val(f^*) = d^* \Rightarrow$ Xuất luồng f tương thích f^* trên G và $val(f)$;

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

6.5 Ứng dụng

1. Bộ ghép cực đại

Cho đồ thị hai phía G với $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$;

Bộ ghép M trên G là các cặp $(x, f(x))$ với đơn ánh $f: X \rightarrow Y$.

Yêu cầu: Tìm M có số lượng phần tử lớn nhất.

Ví dụ:

1) Bài toán phân việc;

2) Bài toán đám cưới vùng quê.

Thuật toán:

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u ;

Xây dựng mạng G_u gồm các cung $(u, v) \in E$ và thêm các cung (s_u, u) và (v, t_u) , $u \in X$ và $v \in Y$ với khả năng thông qua 1;

(2) Tìm luồng cực đại f trên G_u ;

(3) Xuất các cặp (u, v) nếu $f[u][v] > 0$, $u \in X$ và $v \in Y$ và $val(f)$;

Ghi chú

- Xét đồ thị hai phía có trọng số không âm;

- Tìm bộ ghép M có số cặp lớn nhất và tổng trọng số lớn nhất;

- Thuật toán tương tự trên.

2. Hệ đại diện chung

Cho $X = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ và hai dãy tập con của X : $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ và $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$;

Dãy n phần tử khác nhau của X : (a_1, \dots, a_n) gọi là hệ đại diện chung của hai dãy trên \Leftrightarrow tồn tại hoán vị của các số $\{1, \dots, n\}$ là (h_1, \dots, h_n) thỏa mãn $a_i \in A_i \cap B_{h_i}$, với $i = 1, \dots, n$.

Yêu cầu: Tìm hệ đại diện chung (a_1, \dots, a_n) .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Thuật toán:

(1) Xây dựng mạng $G = (V, E)$ với:

$$V = \{s, t\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_m\} \cup \{y_1, \dots, y_n\};$$

trong đó x_i tương ứng A_i , y_i tương ứng B_i , u_j, v_j tương ứng z_j ;

$$E = \{(s, x_i) \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{(x_i, u_j \mid z_j \in A_i)\} \cup \{(u_i, u_j)\} \cup \{v_j, y_i)\} \cup \{(y_i, t)\};$$

khả năng thông qua trên các cung là 1;

(2) Tìm luồng cực đại f trên G ;

(3) Nếu $\text{val}(f) = n \Rightarrow$ Xuất (a_1, \dots, a_n) , với a_j tương ứng z_j ;

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com