



Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

cuu duong than cong . com

Đồ thị Euler và Đồ thị Hamilton

cuu duong than cong . com

Ngô Xuân Bách



Nội dung

- ▶ Đồ thị Euler
- ▶ Đồ thị Hamilton

cuu duong than cong . com

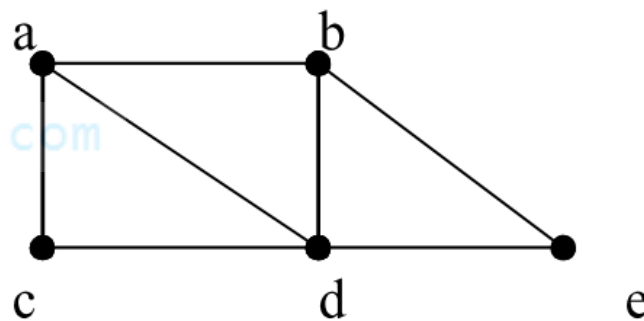
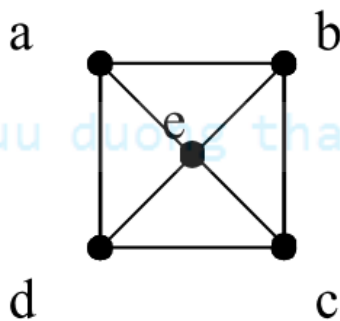
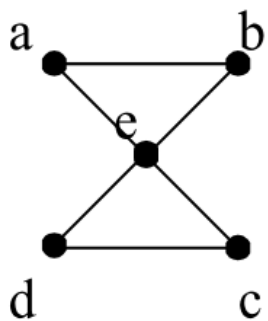
cuu duong than cong . com

Khái niệm và ví dụ

► Định nghĩa

- Chu trình đơn trong đồ thị G đi qua tất cả các cạnh của nó được gọi là **chu trình Euler**
- Đường đi đơn trong đồ thị G đi qua tất cả các cạnh của nó được gọi là **đường đi Euler**
- Đồ thị được gọi là **đồ thị Euler** nếu nó có chu trình Euler
- Đồ thị được gọi là **đồ thị nửa Euler** nếu nó có đường đi Euler

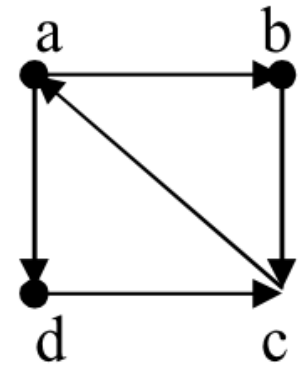
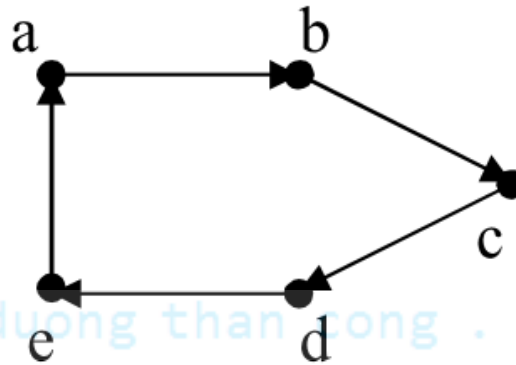
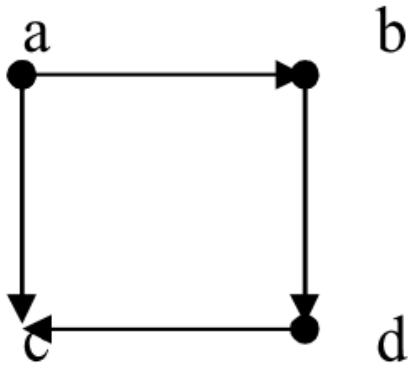
► Ví dụ 1



(Phuong ND, 2013)

Khái niệm đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler

► Ví dụ 2



(Phuong ND, 2013)

cuu duong than cong . com

Điều kiện cần và đủ để đồ thị là Euler

► Với đồ thị vô hướng

- Đồ thị vô hướng liên thông $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi **mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn**

► Với đồ thị có hướng

- Đồ thị có hướng liên thông yếu $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi **tất cả các đỉnh của nó đều có bán bậc ra bằng bán bậc vào** (điều này làm cho đồ thị là liên thông mạnh)

cuu duong than cong . com

Chứng minh đồ thị là Euler

► Với đồ thị vô hướng

- Kiểm tra đồ thị có liên thông hay không?
 - Kiểm tra $DFS(u) = V$ hoặc $BFS(u) = V$?
- Kiểm tra bậc của tất cả các đỉnh có phải số chẵn hay không?
 - Với ma trận kề, **tổng các phần tử của hàng u** (cột u) là bậc của đỉnh u

cuu duong than cong . com

► Với đồ thị có hướng

- Kiểm tra đồ thị có liên thông yếu hay không?
 - Kiểm tra đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông, hoặc
 - Kiểm tra nếu **tồn tại** đỉnh $u \in V$ để $DFS(u) = V$ hoặc $BFS(u) = V$?
- Kiểm tra tất cả các đỉnh có thỏa mãn bán bậc ra bằng bán bậc vào hay không?
 - Với ma trận kề, bán bậc ra của đỉnh u là $deg^+(u)$ là **số các số 1 của hàng u** , bán bậc vào của đỉnh u là $deg^-(u)$ là **số các số 1 của cột u**

Bài tập 1

- Cho đồ thị vô hướng G được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên. Chứng minh G là đồ thị Euler.

0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

(Phuong ND, 2013)

Bài tập 2

- Cho đồ thị **có hướng** G được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên. Chứng minh G là **đồ thị Euler**.

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

(Phuong ND, 2013)

Thuật toán tìm chu trình Euler

Euler-Cycle(u){

Bước 1: Khởi tạo

$stack = \emptyset$; //khởi tạo $stack$ là \emptyset

$CE = \emptyset$; //khởi tạo mảng CE là \emptyset

$push(stack, u)$; //đưa đỉnh u vào ngăn xếp

Bước 2: Lặp

while($stack \neq \emptyset$){

$s = \text{get}(stack)$; //lấy đỉnh ở đầu ngăn xếp

if($Ke(s) \neq \emptyset$){

$t = \langle \text{đỉnh đầu tiên trong } Ke(s) \rangle$;

$push(stack, t)$; //đưa đỉnh t vào ngăn xếp

$E = E \setminus \{(s, t)\}$; //loại bỏ cạnh (s, t)

}

else{

$s = pop(stack)$; //loại bỏ s khỏi ngăn xếp

$s \Rightarrow CE$; //đưa s sang CE

}

}

Bước 3: Trả lại kết quả

$\langle \text{lật ngược lại các đỉnh trong } CE \text{ ta được chu trình Euler} \rangle$;

}

Kiểm nghiệm thuật toán (1/3)

- ▶ Áp dụng thuật toán tìm chu trình Euler cho đồ thị vô hướng được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên.

0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

Kiểm nghiệm thuật toán (2/3)

#	Trạng thái Stack	CE	#	Trạng thái Stack	CE
1	1	∅	14	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4	1
2	1,2	∅	15	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1
3	1,2,3	∅	16	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1
4	1,2,3,4	∅	17	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7,6	1
5	1,2,3,4,7	∅	18	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7	1,6
6	1,2,3,4,7,5	∅	19	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8	1,6,7
7	1,2,3,4,7,5,2	∅	20	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9	1,6,7
8	1,2,3,4,7,5,2,6	∅	21	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7
9	1,2,3,4,7,5,2,6,1	∅	22	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,8	1,6,7
10	1,2,3,4,7,5,2,6	1	23	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10	1,6,7,8
11	1,2,3,4,7,5,2,6,5	1	24	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11	1,6,7,8
12	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3	1	25	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12	1,6,7,8
13	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11	1	26	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9	1,6,7,8

Kiểm nghiệm thuật toán (3/3)

Bước	Trạng thái Stack	CE
27	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13	1,6,7,8
28	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12	1,6,7,8
29	1,2,3,4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12,10	1,6,7,8
Đưa lần lượt các đỉnh trong <i>Stack</i> sang <i>CE</i> cho tới khi <i>Stack</i> = ∅		
30-...	<i>CE</i> = 1,6,7,8,10,12,13,9,12,11,10,9,8,4,11,3,5,6,2,5,7,4,3,2,1	
Lật ngược lại các đỉnh trong <i>CE</i> ta được chu trình Euler		
1-2-3-4-7-5-2-6-5-3-11-4-8-9-10-11-12-9-13-12-10-8-7-6-1		

cuu duong than cong . com

Điều kiện cần và đủ để đồ thị là nửa Euler

► Với đồ thị vô hướng

- Đồ thị vô hướng liên thông $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi **G có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ**
 - G có 2 đỉnh bậc lẻ: đường đi Euler xuất phát tại một đỉnh bậc lẻ và kết thúc tại đỉnh bậc lẻ còn lại
 - G có 0 đỉnh bậc lẻ: G chính là đồ thị Euler

► Với đồ thị có hướng

- Đồ thị có hướng liên thông yếu $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi:
 - Tồn tại đúng hai đỉnh $u, v \in V$ sao cho **$\deg^+(u) - \deg^-(u) = \deg^-(v) - \deg^+(v) = 1$**
 - Các đỉnh $s \neq u, s \neq v$ còn lại có **$\deg^+(s) = \deg^-(s)$**
 - Đường đi Euler sẽ xuất phát tại đỉnh u và kết thúc tại đỉnh v

Chứng minh đồ thị là nửa Euler

- ▶ Với đồ thị vô hướng
 - Chứng tỏ đồ thị đã cho **liên thông**
 - Sử dụng hai thủ tục $DFS(u)$ hoặc $BFS(u)$
 - Có **0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ**
 - Sử dụng tính chất của các phương pháp biểu diễn đồ thị để tìm ra bậc của mỗi đỉnh
- ▶ Với đồ thị có hướng
 - Chứng tỏ đồ thị đã cho **liên thông yếu**
 - Sử dụng hai thủ tục $DFS(u)$ hoặc $BFS(u)$
 - Có hai đỉnh $u, v \in V$ thỏa mãn
$$deg^+(u) - deg^-(u) = deg^-(v) - deg^+(v) = 1$$
 - Các đỉnh $s \neq u, s \neq v$ còn lại có $deg^+(s) = deg^-(s)$

Bài tập 3

- Cho đồ thị vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Euler?

0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0

(Phuong ND, 2013)

Bài tập 4

- Cho đồ thị **có hướng** $G = \langle V, E \rangle$ được biểu diễn bằng ma trận kề như hình bên. Chứng minh rằng G là **đồ thị nửa Euler**?

0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

(Phuong ND, 2013)

Thuật toán tìm đường đi Euler

- ▶ Thuật toán tìm đường đi Euler **gần giống** thuật toán tìm chu trình Euler
- ▶ Tìm chu trình Euler
 - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ **bất kỳ**
- ▶ Tìm đường đi Euler
 - Đồ thị vô hướng
 - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ **có bậc lẻ** đầu tiên (trường hợp có 0 bậc lẻ thì dùng đỉnh bất kỳ)
 - Đồ thị có hướng
 - Đầu vào thuật toán là đỉnh $u \in V$ thỏa mãn $\deg^+(u) - \deg^-(u) = 1$

Kiểm nghiệm thuật toán

- ▶ Áp dụng thuật toán tìm đường đi Euler cho đồ thị vô hướng, nửa Euler sau?

0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0



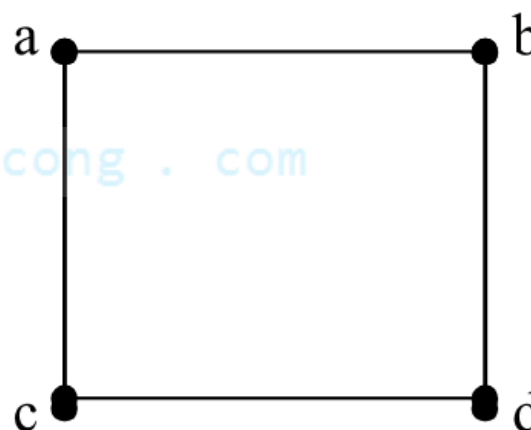
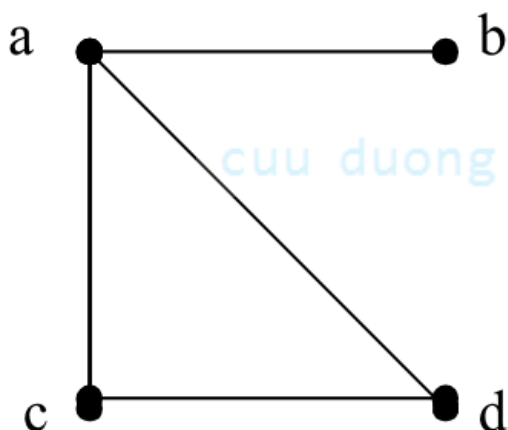
- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

Khái niệm và ví dụ

► Định nghĩa

- Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là **đường đi Hamilton**
- Chu trình bắt đầu tại một đỉnh v nào đó, qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần, sau đó quay trở lại v , được gọi là **chu trình Hamilton**
- Đồ thị được gọi là **đồ thị Hamilton** nếu có chu trình Hamilton
- Đồ thị được gọi là **đồ thị nửa Hamilton** nếu có đường đi Hamilton

► Ví dụ





- đo thị cơ phai là đo thị Nam

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (1/3)

- ▶ Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton bắt đầu tại đỉnh thứ k

```
Hamilton(int k){  
    for(  $y \in Ke(X[k - 1])$  ){  
        if(( $k == n + 1$ ) && ( $y == v_0$ ))  
            Ghinhan( $X[1], X[2], \dots, X[n], v_0$ );  
        else if( $chuaxet[y] == \text{true}$ ){  
             $X[k] = y$ ;  
             $chuaxet[y] = \text{false}$ ;  
            Hamilton( $k + 1$ );  
             $chuaxet[y] = \text{true}$ ;  
        }  
    }  
}
```

Thuật toán tìm chu trình Hamilton (2/3)

- ▶ Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton bắt đầu tại đỉnh thứ k

```
Hamilton(int k){  
    for(  $y \in Ke(X[k - 1])$  ){  
        if(( $k == n + 1$ ) && ( $y == v_0$ ))  
            Ghinhan( $X[1], X[2], \dots, X[n], v_0$ );  
        else if( $chuaxet[y] == \text{true}$ ){  
             $X[k] = y$ ;  
             $chuaxet[y] = \text{false}$ ;  
            Hamilton( $k + 1$ );  
             $chuaxet[y] = \text{true}$ ;  
        }  
    }  
}
```

Bản chất là
duyệt toàn bộ
dùng Quay lui
!!!

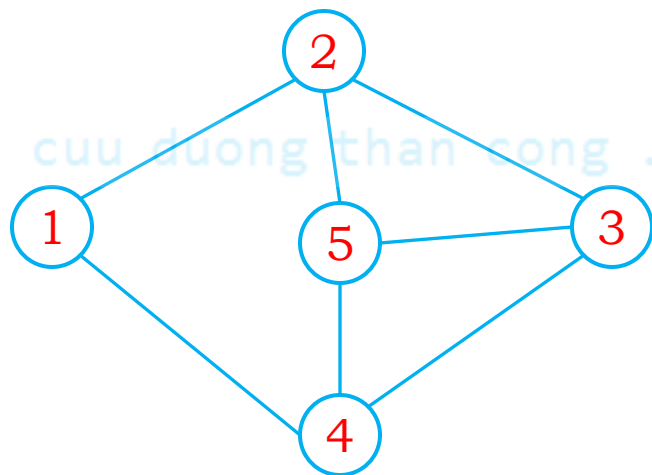
Thuật toán tìm chu trình Hamilton (3/3)

- ▶ Khi đó, việc liệt kê các chu trình Hamilton được thực hiện như sau

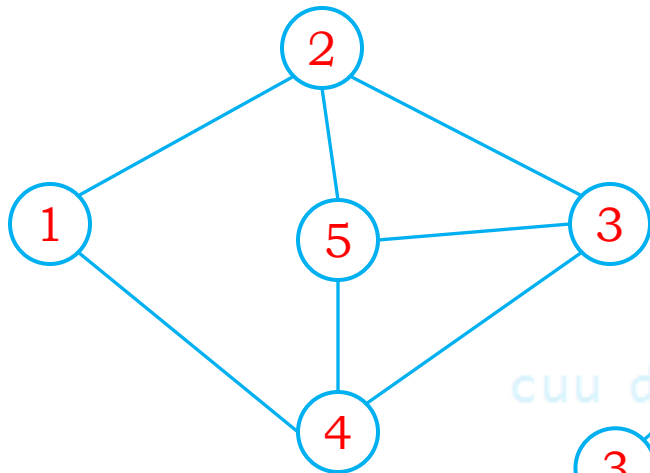
```
Hamilton-Cycle( $v_0$ ) {  
    // Khởi tạo các đỉnh là chưa xét  
    for( $v \in V$ )  
        chuaxet[ $v$ ] = true;  
  
     $X[1] = v_0$ ; //  $v_0$  là một đỉnh nào đó của đồ thị  
    chuaxet[ $v_0$ ] = false; // Đánh dấu  $v_0$  đã xét  
  
    Hamilton(2); // Gọi thủ tục duyệt  
}
```


Kiểm nghiệm thuật toán (1/2)

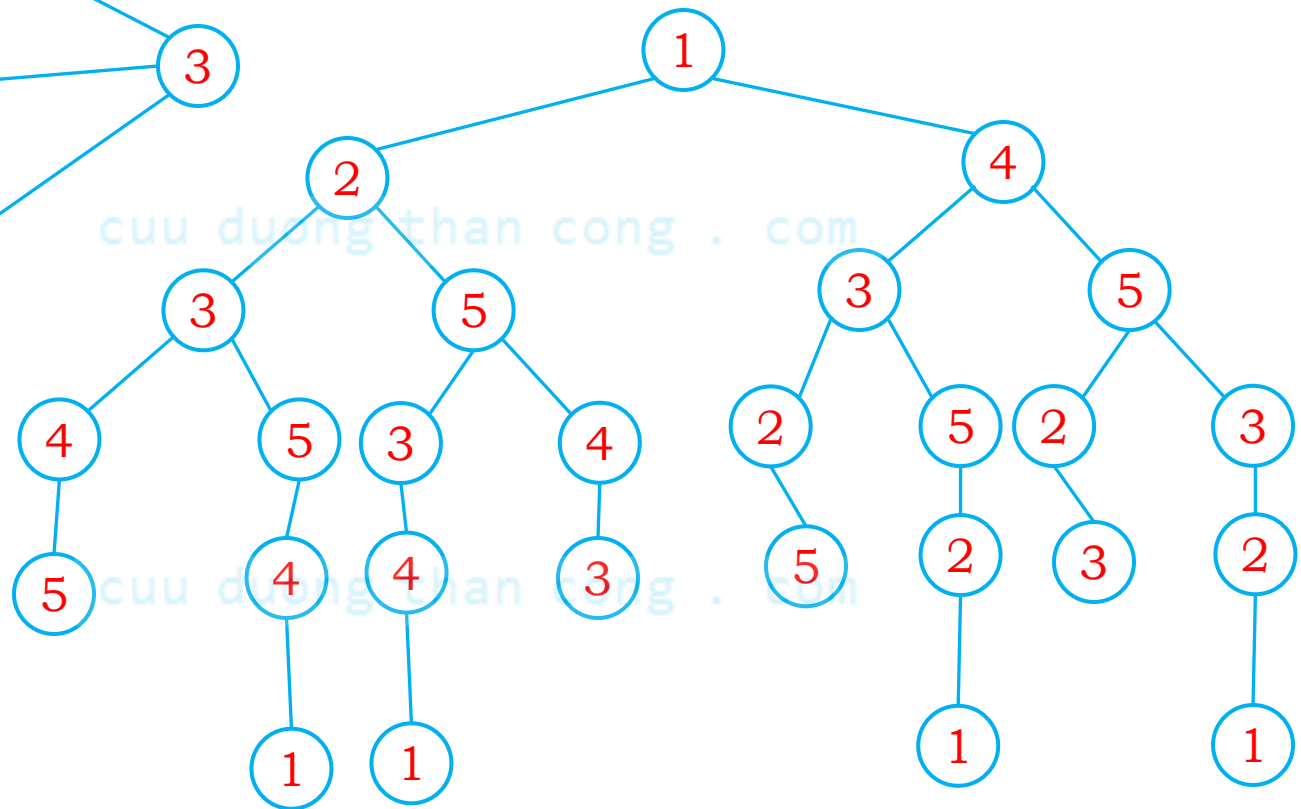
- ▶ Áp dụng thuật toán tìm chu trình Hamilton cho đồ thị vô hướng dưới đây



Kiểm nghiệm thuật toán (2/2)



Cây tìm kiếm chu trình Hamilton



Tóm tắt

- ▶ Khái niệm đường đi Euler, chu trình Euler, đồ thị nửa Euler, đồ thị Euler
- ▶ Điều kiện và cách chứng minh đồ thị là Euler, nửa Euler
- ▶ Khái niệm đường đi Hamilton, chu trình Hamilton, đồ thị nửa Hamilton, đồ thị Hamilton
- ▶ Nắm được các thuật toán và cách kiểm nghiệm thuật toán
- ▶ Viết chương trình cài đặt các thuật toán cho phép thực hiện trên máy tính

