

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG



SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

# XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

*(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa)*

Lưu hành nội bộ

cuu duong than cong . com

HÀ NỘI - 2006

SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

# XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Biên soạn : Ths. ĐẶNG HOÀI BẮC

cuu duong than cong . com

# LỜI NÓI ĐẦU

Xử lý tín hiệu số (DSP: Digital Signal Processing) là môn học đề cập đến các phép xử lý các dãy số để có được các thông tin cần thiết như phân tích, tổng hợp mã hoá, biến đổi tín hiệu sang dạng mới phù hợp với hệ thống. So với xử lý tín hiệu tương tự, xử lý tín hiệu số có nhiều ưu điểm như :

- Độ chính xác cao, sao chép trung thực, tin cậy.
- Tính bền vững: không chịu ảnh hưởng nhiều của nhiệt độ hay thời gian
- Linh hoạt và mềm dẻo: thay đổi phần mềm có thể thay đổi các tính năng phần cứng.
- Thời gian thiết kế nhanh, các chip DSP ngày càng hoàn thiện và có độ tích hợp cao.

Trong môn học Xử lý số tín hiệu, những nội dung chính được đề cập bao gồm các khái niệm về tín hiệu và hệ thống, các phép biến đổi cơ bản dùng trong xử lý tín hiệu số như biến đổi  $z$ , biến đổi Fourier, biến đổi FFT, các phương pháp tổng hợp bộ lọc FIR, IIR và cấu trúc bộ lọc.

Tài liệu này được biên soạn phục vụ mục đích hướng dẫn học tập cho sinh viên Đại học hệ Đào tạo từ xa ngành Điện tử Viễn thông và Công nghệ thông tin trong môn học “ Xử lý tín hiệu số” với chủ trương ngắn gọn, nhiều ví dụ, dễ hiểu. Nội dung tài liệu dựa trên giáo trình “Xử lý tín hiệu và lọc số” của tác giả Nguyễn Quốc Trung và một số tài liệu khác chia thành 9 chương:

**Chương I:** Biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền thời gian rời rạc  $n$ .

**Chương II:** Biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền  $z$ .

**Chương III:** Biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số  $\omega$ .

**Chương IV:** Biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số rời rạc  $\omega_k$ .

**Chương V:** Tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn FIR.

**Chương VI:** Tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn IIR.

**Chương VII:** Biến đổi Fourier nhanh - FFT.

**Chương VIII:** Cấu trúc bộ lọc số.

**Chương IX:** Lọc số nhiều nhip.

Ở lần biên soạn đầu tiên, chắc tài liệu còn một số các sơ sót, mong người đọc thông cảm và đóng góp các ý kiến cho tác giả trong quá trình học tập, trao đổi.

*Hà Nội, tháng 5 năm 2006*

**NHÓM BIÊN SOẠN**

## CHƯƠNG I: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN THỜI GIAN RỜI RẠC $n$

### GIỚI THIỆU

Trong chương này, chúng ta sẽ đề cập đến các vấn đề biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền thời gian rời rạc  $n$ , đây là miền biểu diễn tín hiệu sau khi đã lấy mẫu tín hiệu. Để nắm được kiến thức của chương này, chúng ta sẽ nhắc lại một số nội dung chính sau.

#### a. Khái niệm về tín hiệu

**Về mặt vật lý:** tín hiệu là dạng biểu diễn vật lý của thông tin.

**Ví dụ:**

- Các tín hiệu ta nghe thấy là do âm thanh phát ra gây nên sự nén dãn áp suất không khí đưa đến tai chúng ta.
- Ánh sáng ta nhìn được là do sóng ánh sáng chuyển tải các thông tin về màu sắc, hình khối đến mắt chúng ta.

**Về mặt toán học:** tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của một hoặc nhiều biến số độc lập.

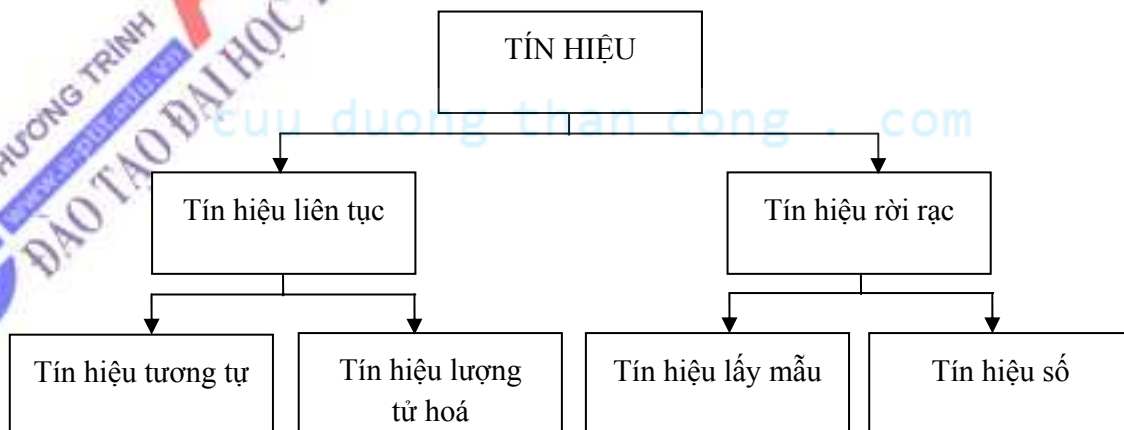
**Ví dụ:**

- Tín hiệu âm thanh  $x(t)$  là hàm của một biến độc lập trong đó  $x$  là hàm  $t$  là biến.
- Tín hiệu ảnh  $x(i,j)$  là hàm của hai biến độc lập  $i$  và  $j$ .

Trong môn học này chúng ta chỉ tập trung nghiên cứu đối với các tín hiệu là hàm của một biến độc lập.

#### b. Phân loại tín hiệu

Các tín hiệu trên thực tế được phân loại như sau:



- **Định nghĩa tín hiệu liên tục:** Nếu biến độc lập của biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu liên tục.

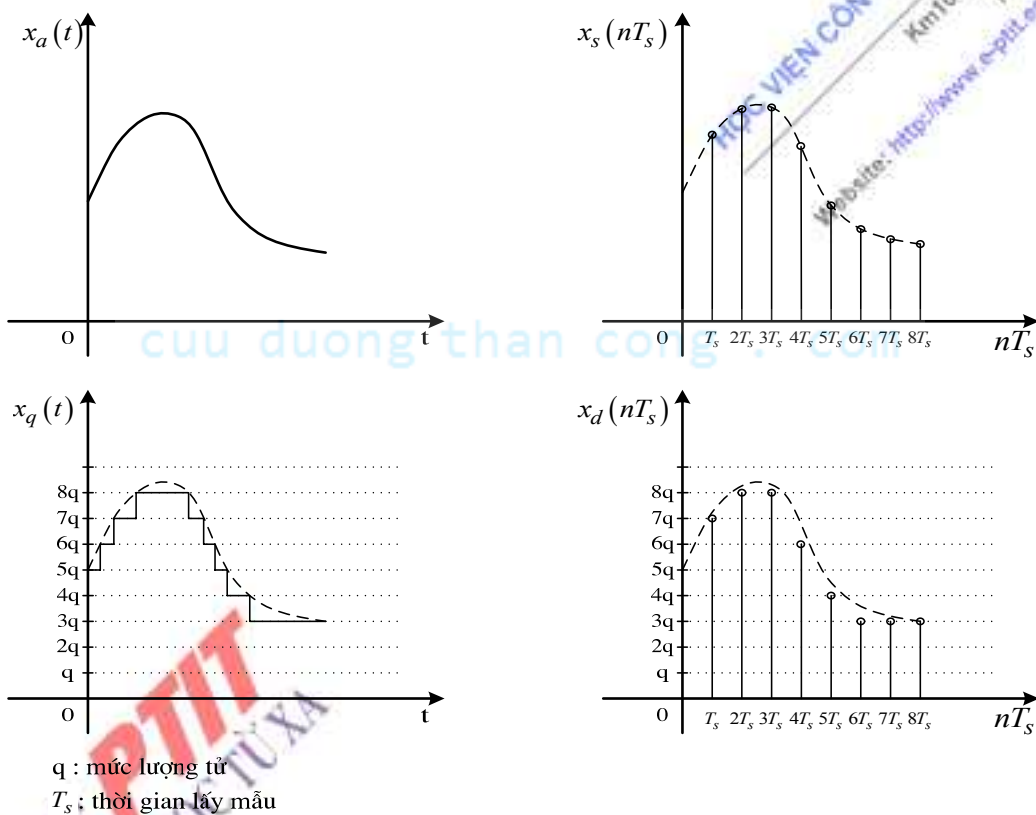
Nhận xét: Tín hiệu liên tục là tín hiệu liên tục theo biến, xét theo hàm hay biên độ ta có tín hiệu tương tự và tín hiệu lượng tử hoá.

+ **Định nghĩa tín hiệu tương tự:** Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu tương tự.

Nhận xét: Tín hiệu tương tự liên tục theo cả biến và hàm.

+ **Định nghĩa tín hiệu lượng tử hoá:** Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu lượng tử hoá.

Nhận xét: Tín hiệu lượng tử hoá liên tục theo biến và rời rạc theo biên độ.



Hình 1.1 Minh họa sự phân loại tín hiệu

- **Định nghĩa tín hiệu rời rạc:** Nếu biến độc lập của biểu diễn toán học của một tín hiệu là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu rời rạc.

Nhận xét: Tín hiệu liên tục là tín hiệu liên tục theo biến, xét theo hàm ta có tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số.

+ **Định nghĩa tín hiệu lấy mẫu:** Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là liên tục và không bị lượng tử hoá thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu lấy mẫu.

Nhận xét: Tín hiệu lấy mẫu rời rạc theo hàm, liên tục theo biến.

+ **Định nghĩa tín hiệu số:** Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là rời rạc thì tín hiệu đó gọi là tín hiệu số.

Nhận xét: Tín hiệu số rời rạc theo cả biến và theo cả hàm.

**Lưu ý:** Việc phân loại tín hiệu sẽ là cơ sở để phân loại hệ thống xử lý, chẳng hạn như ta có hệ thống rời rạc hay hệ thống tương tự được phân loại tương ứng với loại tín hiệu mà hệ thống đó xử lý là tín hiệu rời rạc hay tín hiệu tương tự.

Các tín hiệu được nghiên cứu trong môn học này, chúng ta chỉ đề cập đến tín hiệu rời rạc do vậy chúng ta cần quan tâm đến định lý lấy mẫu của Shannon.

**Định lý lấy mẫu:** Nếu một tín hiệu tương tự  $x_a(t)$  có tần số cao nhất là  $F_{\max} = B$ , được lấy mẫu tại tốc độ  $F_s > 2F_{\max} \equiv 2B$ , thì  $x_a(t)$  có thể được phục hồi một cách chính xác từ giá trị các mẫu của nó nhờ hàm nội suy.

Khi  $F_s = F_{\max} = 2B$  ta gọi  $F_s$  lúc này là tần số lấy mẫu Nyquist, Ký hiệu là  $F_{\text{Nyquist}}$  hay  $F_N$ .

Sau khi đã nhắc lại các kiến thức cơ bản về tín hiệu như trên, chúng ta sẽ nghiên cứu các kiến thức của môn học “Xử lý tín hiệu số” bắt đầu việc biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền n ở chương I này.

**Những nội dung kiến thức được đề cập trong chương I bao gồm:**

- Biểu diễn tín hiệu
- Các tín hiệu cơ bản
- Hệ thống tuyến tính bất biến.
- Phép chập (Convolution).
- Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến.
- Phép tương quan (Correlation).

## NỘI DUNG

### 1.1. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU RỜI RẠC

#### 1.1.1. Các cách biểu diễn tín hiệu rời rạc

Trước khi biểu diễn ta có thể chuẩn hoá  $x(nT_s)$  như sau

$$X(nT_s) \xrightarrow{T_s=1} x(n) \text{ tức là chuẩn hóa } T_s=1.$$

**a. Biểu diễn theo toán học**

$$x(n) = \begin{cases} \text{Biểu thức toán học} & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

**Ví dụ 1.1:** Ta có thể biểu diễn tín hiệu

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Ở đây ta thấy:

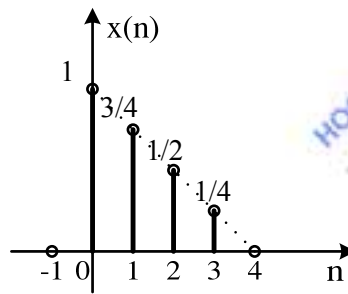
$$x(0)=1; x(1)=3/4; x(2)=1/2; x(3)=1/4; x(4)=0.$$

### b. Biểu diễn bằng đồ thị

Cách biểu diễn này cho ta cách nhìn trực quan về một tín hiệu rời rạc.

#### Ví dụ 1.2

Với tín hiệu như ở ví dụ 1.1, ta có thể biểu diễn bằng đồ thị như sau:



Hình 1.2 Biểu diễn tín hiệu bằng đồ thị

### c. Biểu diễn bằng dãy số

$$x(n) = \{..., x(n-1), x(n), x(n+1), ...\}$$

Lưu ý ở đây, ta phải có mốc đánh dấu  $\vec{0}$  để thể hiện thời điểm gốc.

Do cách biểu diễn này, ta còn gọi **tín hiệu rời rạc** là **dãy**

**Ví dụ 1.3:** Biểu diễn bằng dãy số tín hiệu trong ví dụ 1.1 và 1.2:

$$x(n) = \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

Ta thấy, cả ba ví dụ trên đều biểu diễn một tín hiệu theo ba cách khác nhau.

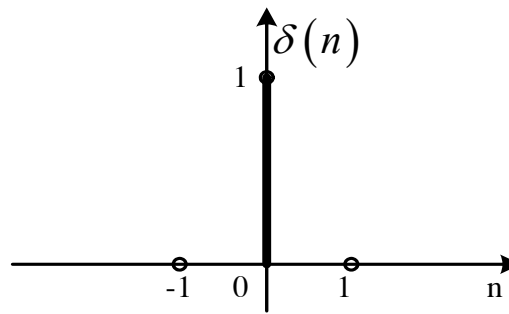
#### 1.1.2. Một số dãy cơ bản (Tín hiệu rời rạc cơ bản)

##### a. Dãy xung đơn vị:

Trong miền  $n$ , dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

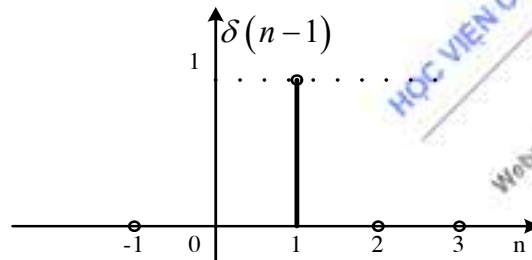
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (1.1)$$





Hình 1.3 Dãy xung đơn vị  $\delta(n)$

Ví dụ 1.4: Hãy biểu diễn dãy  $\delta(n-1)$

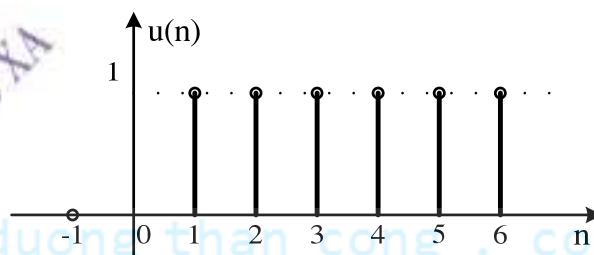


Hình 1.4 Dãy xung  $\delta(n-1)$

### b. Dãy nhảy đơn vị

Trong miền  $n$ , dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

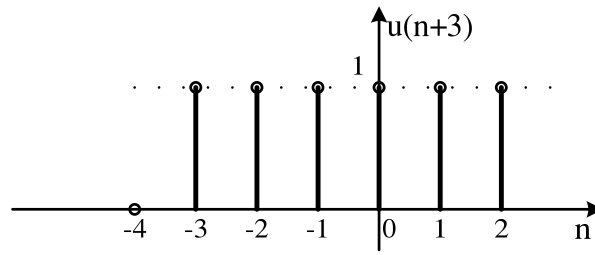


Hình 1.5 Dãy nhảy đơn vị  $u(n)$

Ví dụ 1.5

Hãy biểu diễn dãy  $u(n+3) = \begin{cases} 1 & n \geq -3 \\ 0 & n < -3 \end{cases}$



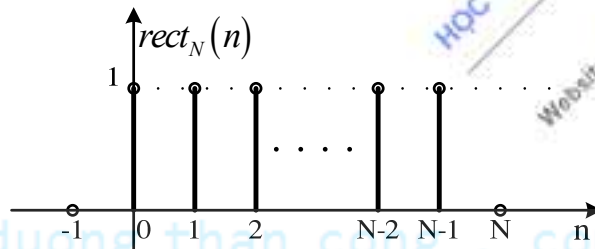


Hình 1.6 Dãy  $u(n+3)$

**c. Dãy chữ nhật:**

Trong miền  $n$ , dãy chữ nhật được định nghĩa như sau:

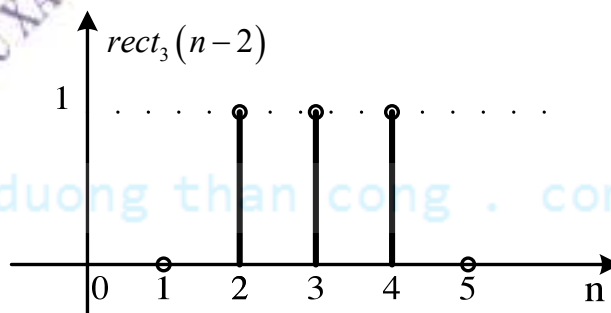
$$rect_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.3)$$



Hình 1.7 Dãy chữ nhật  $rect_N(n)$

**Ví dụ 1.6:** Hãy biểu diễn dãy  $rect_3(n-2)$

$$rect_3(n-2) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n-2 \leq 2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

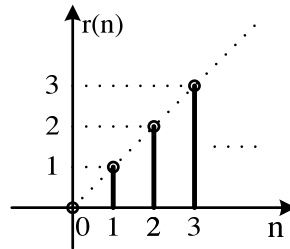


Hình 1.8 Dãy chữ nhật  $rect_3(n-2)$

**d. Dãy dốc đơn vị:**

Trong miền  $n$ , dãy dốc đơn vị được định nghĩa như sau:

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.4)$$

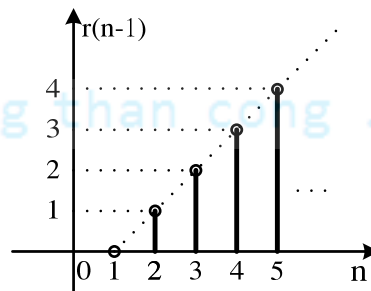


Hình 1.9 Dãy dốc đơn vị  $r(n)$

**Ví dụ 1.7**

Hãy biểu diễn dãy  $r(n-1)$ .

$$r(n-1) = \begin{cases} n-1 & n-1 \geq 0 (n \geq 1) \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$



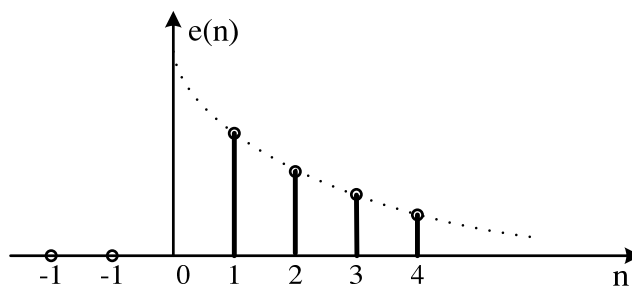
Hình 1.10 Dãy dốc đơn vị  $r(n-1)$

**e. Dãy hàm mũ:**

Trong miền  $n$ , dãy hàm mũ được định nghĩa như sau:

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (1.5)$$

**Ví dụ 1.8:** Hãy biểu diễn  $e(n)$  với  $0 \leq a \leq 1$ .



Hình 1.11 Dãy hàm mũ  $e(n)$

### 1.1.3. Một số định nghĩa

#### a. Dãy tuần hoàn:

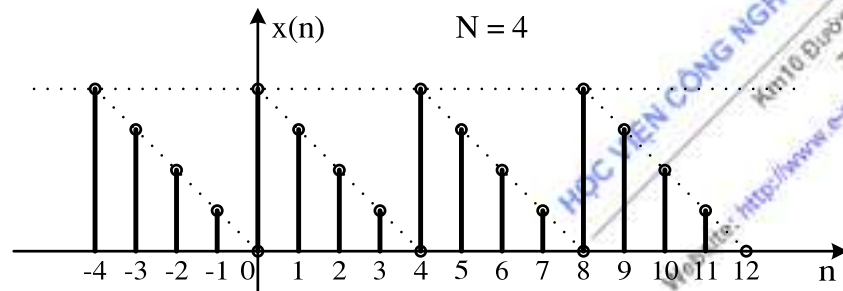
Ta nói rằng một dãy  $x(n)$  là tuần hoàn với chu kỳ  $N$  nếu thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$x(n) = x(n + N) = x(n + lN) \quad l: \text{số nguyên}; N: \text{chu kỳ}$$

Khi cần nhấn mạnh tính tuần hoàn, người ta ký hiệu dấu  $\sim$  phía trên. Ký hiệu:  $\tilde{x}(n)_N$ .

#### Ví dụ 1.9

Biểu diễn dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)$  với  $N = 4$ .



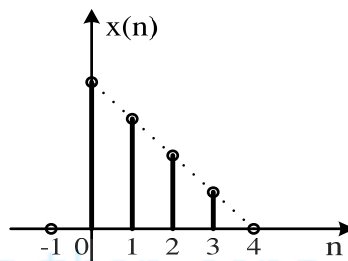
Hình 1.12 Dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)_4$

#### b. Dãy có chiều dài hữu hạn:

Một dãy được xác định với số hữu hạn  $N$  mẫu ta gọi là dãy có chiều dài hữu hạn với  $N$  là chiều dài của dãy.

L: Toán tử chiều dài

$$L[x(n)] = [0, 3] = 4$$



Hình 1.13 Dãy có chiều dài hữu hạn

#### c. Năng lượng của dãy:

Năng lượng của một dãy  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.6)$$

#### Ví dụ 1.10

Tìm năng lượng của 3 dãy

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_N(n)$$

$$x_3(n) = u(n)$$

**Giải:**

$$E_{x_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1 \quad \text{Dãy có năng lượng hữu hạn}$$

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{rect}_N(n)|^2 = N \quad \text{Dãy có năng lượng hữu hạn}$$

$$E_{x_3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty \quad \text{Dãy có năng lượng vô hạn (không tồn tại thực tế)}$$

#### d. Công suất trung bình của một tín hiệu

Công suất trung bình của một tín hiệu  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.7)$$

Nếu ta định nghĩa năng lượng của tín hiệu  $x(n)$  trong một khoảng hữu hạn  $-N \leq n \leq N$  là:

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.8)$$

Thì có thể biểu diễn năng lượng tín hiệu  $E$  như sau:

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \quad (1.9)$$

và công suất trung bình của tín hiệu  $x(n)$  là

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (1.10)$$

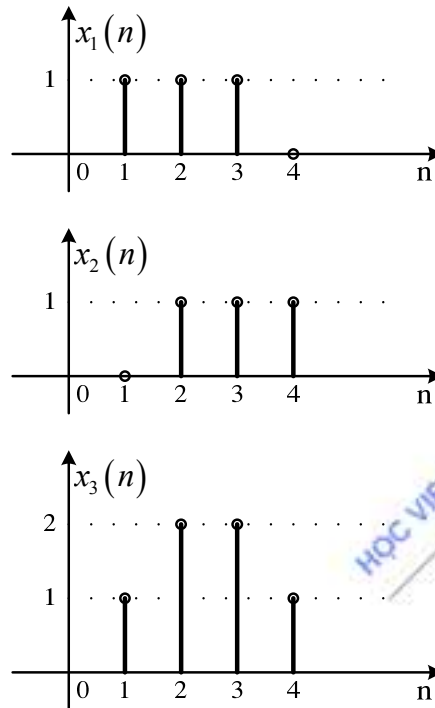
Như vậy, nếu  $E$  là hữu hạn thì  $P = 0$ . Mặt khác, nếu  $E$  là vô hạn thì công suất trung bình  $P$  có thể là hữu hạn hoặc vô hạn. Nếu  $P$  là hữu hạn (và không zero) thì tín hiệu gọi là *tín hiệu công suất*.

#### e. Tổng của 2 dãy:

Tổng của 2 dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

#### Ví dụ 1.11

Hãy thực hiện  $x_3(n) = x_1(n) + x_2(n)$



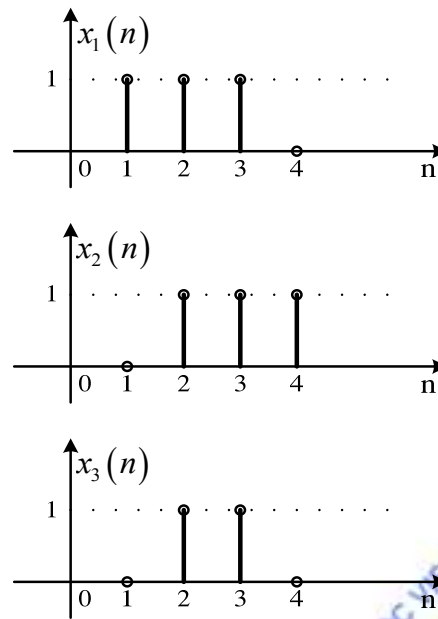
Hình 1.14 Tổng của hai dãy

**f. Tích của 2 dãy:**

Tích của 2 dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

**Ví dụ 1.12**

Hãy thực hiện  $x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

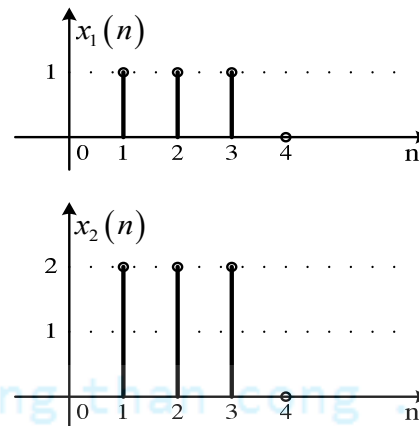


Hình 1.15 Tích của hai dãy

**g. Tích của một dãy với hằng số:**

Tích của một dãy với các hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy với hằng số đó.

**Ví dụ 1.13**  $x_2(n) = \alpha \cdot x_1(n)$ ,  $\alpha$  là hằng số giả sử cho bằng 2 ta có:



Hình 1.16 Tích của dãy với hằng số 2

**h. Trễ:**

Ta nói rằng dãy  $x_2(n)$  là dãy lặp lại trễ của dãy  $x_1(n)$  nếu có quan hệ sau đây:

$$x_2(n) = x_1(n - n_0) \quad n_0: \text{nguyên}$$

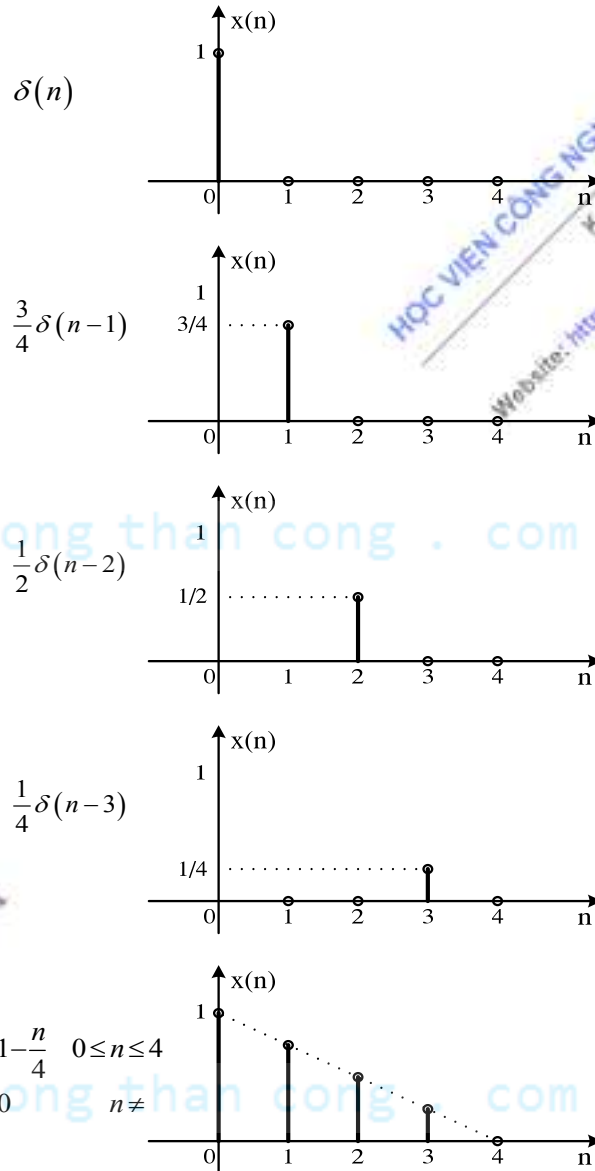
**Ví dụ 1.14**

Biểu diễn tín hiệu  $x(n]$  được mô tả như sau:

$$x(n) = \delta(n) + \frac{3}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n-3)$$

**Giải:**

Ta biểu diễn lần lượt các thành phần trong mô tả trên, sau đó thực hiện phép cộng như minh họa dưới đây để xác định  $x(n]$ .



Hình 1.17 Minh họa  $x(n]$  trong ví dụ 1.14

Từ ví dụ 1.14, ta thấy rằng: Một dãy  $x(n]$  bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng sau đây:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \quad (1.11)$$



Trong đó ta chú ý  $x(k)$  là giá trị  $x(n)$  tại thời điểm  $n = k$ , do vậy về mặt bản chất  $x(k)$  và  $x(n)$  khác nhau ( $n$  là biến thời gian rời rạc,  $k$  là chỉ số), nhưng về mặt thể hiện  $x(n)$  và  $x(k)$  là như nhau.

## 1.2. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN

### 1.2.1. Các hệ thống tuyến tính

#### a. Một số khái niệm



#### Kích thích và đáp ứng:

- + Dãy vào của hệ thống được gọi là kích thích
- + Dãy ra được gọi là đáp ứng của hệ thống ứng với kích thích đang khảo sát.

#### Toán tử T:

- + Một hệ thống tuyến tính đặc trưng bởi toán tử  $T$  làm nhiệm vụ biến đổi dãy vào thành dãy ra.



$$T[x(n)] = y(n) \quad (1.12)$$

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

#### b. Hệ thống tuyến tính:

Đối với các hệ thống tuyến tính toán tử  $T$  phải tuân theo nguyên lý xếp chồng, tức là phải tuân theo quan hệ sau đây:

$$\begin{aligned} T[a.x_1(n) + b.x_2(n)] &= a.T[x_1(n)] + b.T[x_2(n)] \\ &= a.y_1(n) + b.y_2(n) \end{aligned} \quad (1.13)$$

#### c. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính:

Trong (1.11) ta có biểu diễn của tín hiệu đầu vào  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$

Thực hiện biến đổi theo toán tử  $T$  ta xác định  $y(n)$

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h_k(n) \quad (1.14)$$

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)] \text{ được gọi là } \textbf{đáp ứng xung}. \quad (1.15)$$

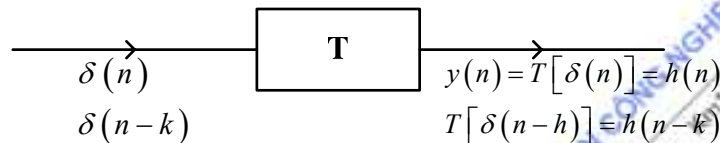
Đáp ứng xung  $h_k(n)$  đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống thay cho toán tử T.

### 1.2.2. Các hệ thống tuyến tính bất biến

#### a. Định nghĩa:

Nếu ta có  $y(n)$  là đáp ứng với kích thích  $x(n)$  thì hệ thống được gọi là bất biến nếu  $y(n-k)$  là đáp ứng với kích thích  $x(n-k)$ .

#### b. Phép chập:

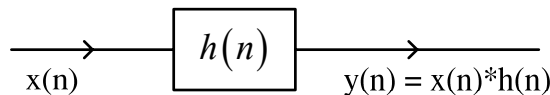


$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) \quad (1.16)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1.17)$$

Ở đây  $h(n)$  được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB)

Dấu hoa thị (\*) ký hiệu phép chập.



Như vậy, đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB) sẽ bằng dãy vào chập với đáp ứng xung.

#### Phương pháp tính phép chập

Về nguyên tắc chúng ta phải tính  $y(n) = x(n) * h(n)$  theo cách tìm từng giá trị  $y(n)$  ứng với từng giá trị  $n$  cụ thể từ  $n = -\infty$  đến  $n = \infty$ .

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) \quad (n: -\infty \rightarrow \infty)$$

$$n = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(0-k)$$

$$n = 1 \Rightarrow y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(1-k)$$

$n=2 \dots$  Cứ thay vào như vậy về nguyên tắc ta phải tính đến giá trị  $n = \infty$ .

Đối với các giá trị  $n < 0$  ta cũng phải tính lần lượt

$$n = -1 \Rightarrow y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(-1-k)$$

$n = -2$  và phải tính đến giá trị  $n = -\infty$

Tập hợp các giá trị tìm được ta có kết quả phép chập  $y(n)$  cần tìm.

Để dễ dàng trong việc tính toán người ta đưa ra nhiều phương pháp tính phép chập trong đó có phương pháp đồ thị như sau:

#### Các bước tính phép chập bằng đồ thị:

**Bước 1:** Đổi biến  $n$  thành biến  $k$ ,  $x(n) \rightarrow x(k)$ ,  $h(n) \rightarrow h(k)$ , cố định  $h(k)$

**Bước 2:** Quay  $h(k)$  đối xứng qua trục tung để thu được  $h(-k)$ , tức  $h(0-k)$  ứng với  $n=0$ .

**Bước 3:** Dịch chuyển  $h(-k)$  theo từng giá trị  $n$ , nếu  $n > 0$  dịch chuyển về bên phải, nếu  $n < 0$  dịch chuyển về phía trái ta thu được  $h(n-k)$ .

**Bước 4:** Thực hiện phép nhân  $x(k) \cdot h(n-k)$  theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của  $k$ .

**Bước 5:** Cộng các giá trị thu được ta có một giá trị của  $y(n)$ , tổng hợp các kết quả ta có dãy  $y(n)$  cần tìm.

**Lưu ý:** ta có thể cố định  $h(k)$  rồi lấy đối xứng  $x(k)$  qua trục tung rồi tiến hành các bước như trên, kết quả sẽ không thay đổi do phép chập có tính chất giao hoán.

Các bước trên sẽ được minh hoạ ở ví dụ 1.15

#### Ví dụ 1.15

Cho một HTTTBB có:

$$x(n) = \text{rect}_5(n)$$

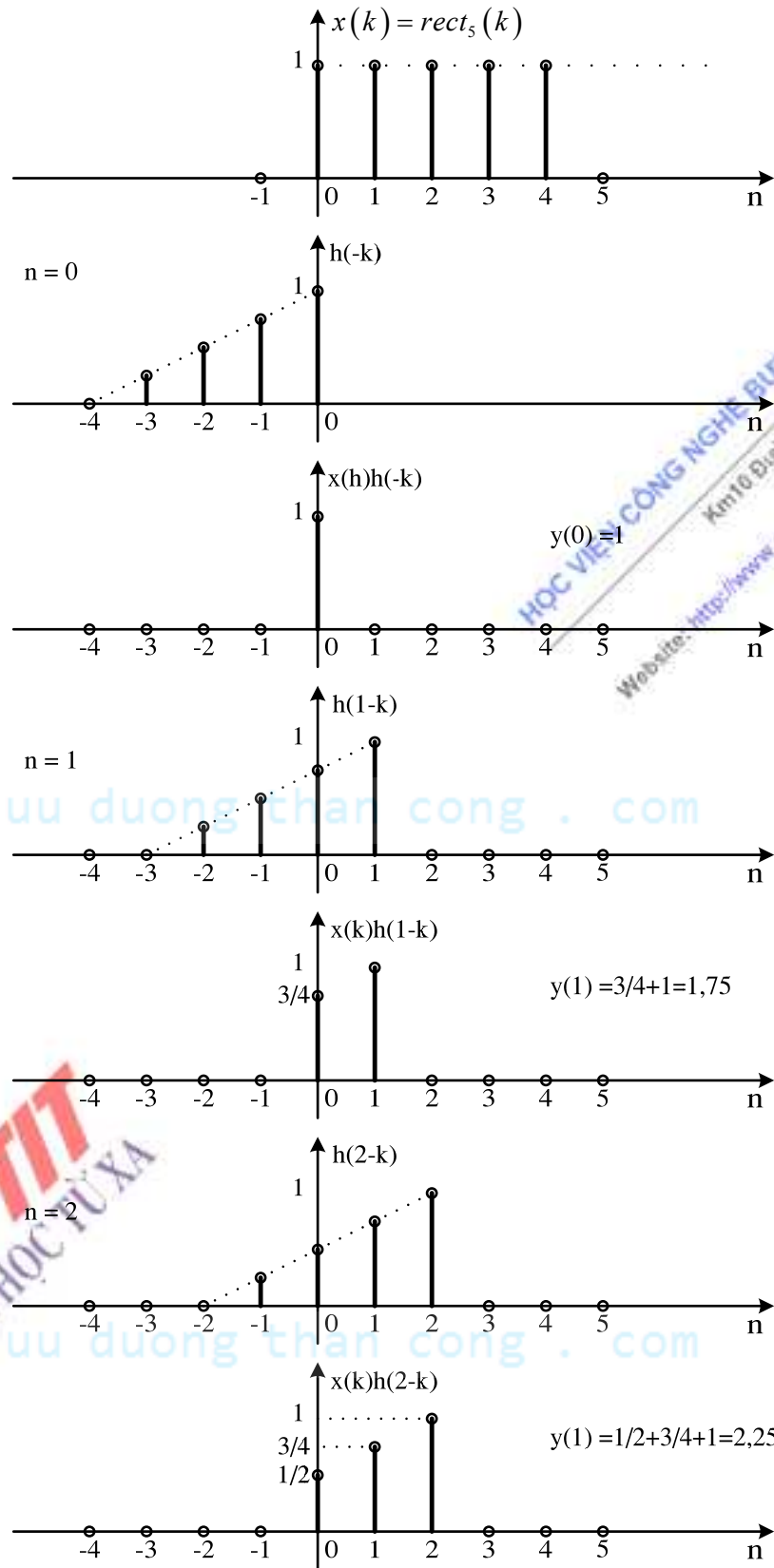
$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống  $y(n)$ ?

**Giải:**

Ta thực hiện theo phương pháp tính phép chập bằng đồ thị:

- + Đổi biến  $n$  thành biến  $k$
- + Giữ nguyên  $x(k)$ , lấy đối xứng  $h(k)$  thành  $h(-k)$
- + Dịch  $h(-k)$  sang trái ( $n < 0$ ) hoặc sang phải ( $n > 0$ ) theo từng mẫu, sau đó tính từng giá trị của  $y(n)$  ứng với từng  $n$  cụ thể như đồ thị sau.

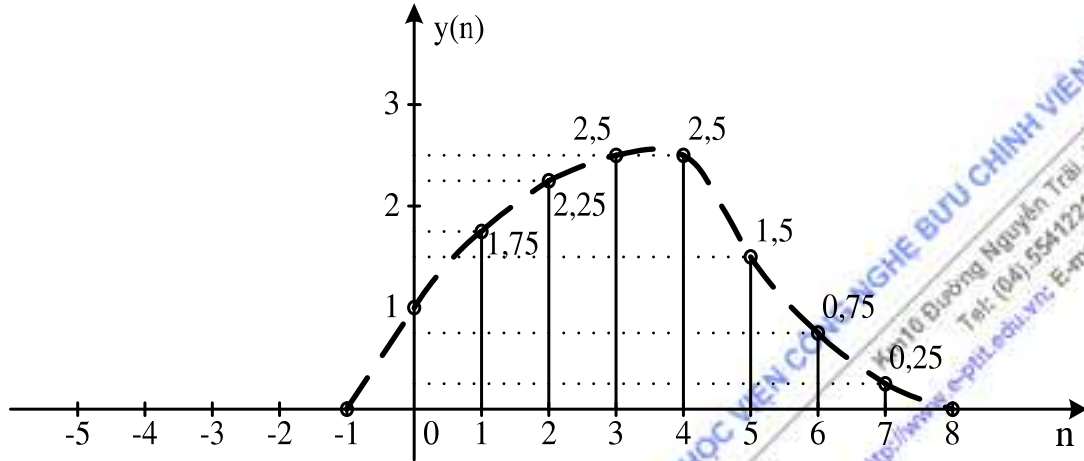


Hình 1.18 Minh họa tính phép chập bằng đồ thị trong ví dụ 1.15

Tiếp tục tính như trên ta được các giá trị:

$$\begin{aligned} y(3) &= 2,5 & y(5) &= 1,5 & y(7) &= 0,25 & y(-1) &= 0 & \dots & y(-\infty) &= 0 \\ y(4) &= 2,5 & y(6) &= 0,75 & y(8) &= 0 & & & \dots & y(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Dựa vào kết quả tính toán, ta vẽ được đáp ứng ra của hệ thống:



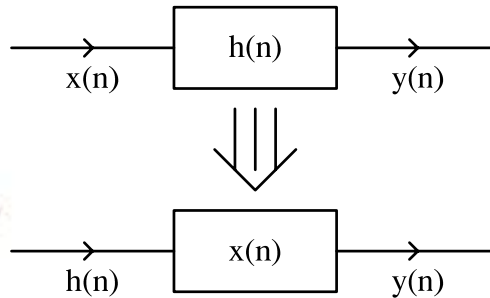
Hình 1.19 Kết quả phép chập trong ví dụ 1.15

### c. Các tính chất của phép chập:

#### - Tính giao hoán:

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1.18)$$

Ý nghĩa:

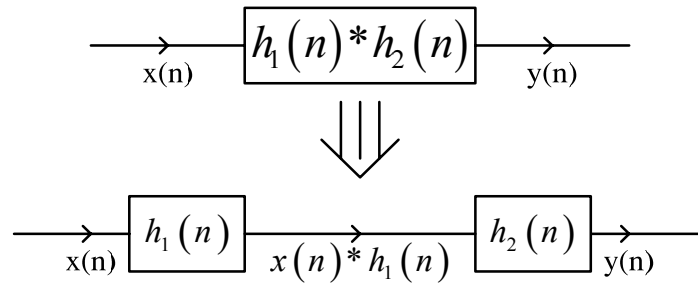


Trong một hệ thống, ta có thể hoán vị đầu vào  $x(n)$  và đáp ứng xung  $h(n)$  cho nhau thì đáp ứng ra  $y(n)$  không thay đổi.

#### - Tính kết hợp:

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (1.19)$$

Ý nghĩa:

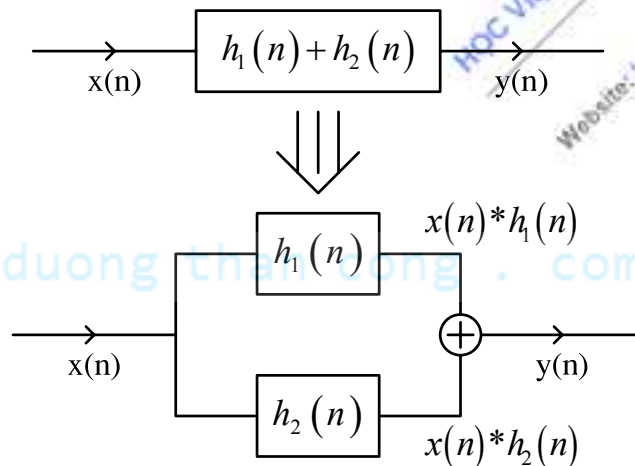


Nếu ta có hai hệ thống ghép nối tiếp với nhau thì đáp ứng xung của hệ thống tổng quát sẽ là chập của đáp ứng xung của các hệ thống thành phần.

- Tính phân phối (chập và cộng):

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)] \quad (1.20)$$

Ý nghĩa:



Nếu ta có hai hệ thống ghép song song với nhau thì đáp ứng xung của hệ thống tổng quát sẽ là tổng đáp ứng xung của các hệ thống thành phần.

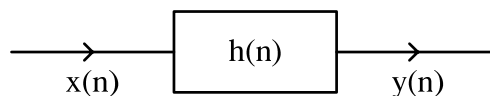
### 1.2.3. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

**Định nghĩa:** Một hệ thống tuyến tính bất biến được gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở thời điểm bất kỳ  $n = n_0$  hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai,  $n > n_0$ .

**Định lý:** Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả phải bằng 0 với  $n < 0$  ( $h(n) = 0$  với mọi  $n < 0$ ).

- Một dãy  $x(n]$  được gọi là nhân quả nếu  $x(n) = 0$  với  $n < 0$ .

Xét phép chập để xác định đáp ứng ra  $y(n)$  với tín hiệu và hệ thống TTBB nhân quả.



- Nếu  $x(n]$  nhân quả:



$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad x(k) \neq 0 \text{ khi } k \geq 0$$

- Nếu  $h(n)$  nhân quả:  $h(n) \neq 0$  khi  $n \geq 0$ :

$$\text{Vì } h(n-k) \neq 0; (n-k) \geq 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

#### 1.2.4. Hệ thống tuyến tính bất biến và ổn định

**Định nghĩa:** Một hệ thống tuyến tính bất biến gọi là ổn định nếu ứng với dãy vào bị chặn ta cũng có dãy ra bị chặn (biên độ bị hạn chế  $\neq \pm\infty$ ).

$$|x(n)| < \infty \rightarrow |y(n)| < \infty \quad (1.21)$$

Hệ thống này còn được gọi là hệ thống BIBO (Bounded Input Bounded Output)

**Định lý về hệ thống ổn định:**

Một hệ thống tuyến tính bất biến được gọi là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung  $h(n)$  của nó thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.22)$$

(Tổng giá trị tuyệt đối của mọi giá trị đáp ứng xung)

#### Ví dụ 1.17

Xét sự ổn định của các hệ thống có đáp ứng xung sau:

$$h_1(n) = u(n)$$

$$h_2(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

**Giải:**

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |1| = \infty \quad \rightarrow \text{Hệ thống không ổn định}$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ nếu } a < 1 \quad \rightarrow \text{Hệ thống ổn định}$$

$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \infty \text{ nếu } a \geq 1 \quad \rightarrow \text{Hệ thống không ổn định}$$

### 1.3. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG

#### 1.3.1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số biến đổi

Về mặt tín hiệu, một hệ thống tuyến tính (HTTT) sẽ được mô tả bởi một phương trình sai phân tuyến tính có dạng:



$$\sum_{k=0}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r) \quad (1.23)$$

$$a_0(n) y_0(n) + \sum_{k=1}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r(n)}{a_0(n)} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k(n)}{a_0(n)} y(n-k) \quad (1.24)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n)$$

$a_k(n)$ ,  $b_r(n)$  hệ số phương trình đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính, thay cho đáp ứng xung.

### 1.3.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Một HTTT bất biến về mặt toán học được mô tả bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng dạng tổng quát sau đây:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (1.25)$$

$a_k$ ,  $b_r$  hệ số hằng.

N: Bậc của phương trình

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k)$$

$a_0 = 1$ , thì

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (1.26)$$

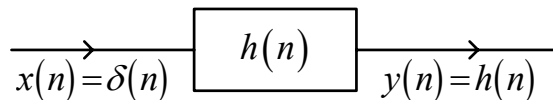
$b_r$ ,  $a_k$  đặc trưng cho hệ thống, thay cho đáp ứng xung.

Đáp ứng ra  $y(n)$  được xác định bởi phương trình sai phân (PTSP) như trên tương đương với đáp ứng ra được xác định theo phép chập:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (1.27)$$

đáp ứng xung  $h(n)$  đặc trưng cho hệ thống.

Lưu ý: Nếu đầu vào là xung đơn vị  $\delta(n)$  thì đầu ra ta có đáp ứng xung  $h(n)$ .



Có hai phương pháp giải phương trình sai phân để xác định đáp ứng ra  $y(n)$ , đáp ứng xung  $h(n)$ :

- Phương pháp thế
- Phương pháp tìm nghiệm tổng quát: giải phương trình tìm nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng rồi xác định nghiệm tổng quát.

Việc giải phương trình sai phân theo phương pháp thế sẽ được mô tả trong ví dụ 1.18.

### Ví dụ 1.18

Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau:

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung  $h(n)$  của phương trình sai phân đã mô tả với điều kiện:  $y(-1) = 0$ .

**Giải:**

$N = 1, a_0 = 1$ : Phương trình bậc 1.

$a_1 = -A, M = 0, b_0 = 1$ , cho  $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) \equiv h(n)$

$$h(n) = Ah(n-1) + \delta(n)$$

Tìm  $h(n)$  với hệ thống nhân quả. Thay vào:

$$n = 0: h(0) = Ah(-1) + \delta(0) = 0 + 1 \quad h(0) = 1 \quad (\text{Do } h(-1) = y(-1) = 0)$$

$$n = 1: h(1) = Ah(0) + \delta(1) = A.1 + 0 \quad h(1) = A$$

$$n = 2: h(2) = Ah(1) + \delta(2) = A.A + 0 \quad h(2) = A^2$$

$$n = 3: h(3) = Ah(2) + \delta(3) = A.A^2 + 0 \quad h(3) = A^3$$

.....

Cứ thế tiếp tục ta có:

$$h(n) = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

### Phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sẽ bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất  $y_0(n)$  và nghiệm riêng của phương trình  $y_p(n)$ :

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) \quad (1.28)$$

**Tìm  $y_0(n)$ :**

Phương trình thuần nhất là phương trình sai phân mà đầu vào  $x(n) = 0$ , theo (1.25) nó sẽ có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.29)$$

Ta thường tìm nghiệm dưới dạng hàm mũ  $y_0(n) = \alpha^n$ , thay vào ta có:

$$\begin{aligned} a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{N-1} \alpha^{n-N+1} + a_N \alpha^n &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^{n-N} (a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + a_2 \alpha^{N-2} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N) &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nghiệm  $\alpha^{n-N} = 0$  tức  $\alpha = 0$  là nghiệm tầm thường ta không xét đến, từ (1.30) ta có phương trình đặc trưng

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + a_2 \alpha^{N-2} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (1.31)$$

Phương trình này sẽ có n nghiệm, nếu các nghiệm này là nghiệm đơn ta có sẽ có dạng nghiệm của phương trình thuần nhất như sau:

$$y_0(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + A_3 \alpha_3^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (1.32)$$

Các hệ số  $A_1$  và  $A_2$  được xác định nhờ các điều kiện đầu.

#### Tìm $y_p(n)$ :

Đây chính là nghiệm phương trình sai phân khi đầu vào  $x(n) \neq 0$ , Nó sẽ có dạng của phương trình sai phân như mô tả (1.25) :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Ở đây ta thường chọn  $y_p(n)$  giống dạng đầu vào  $x(n)$ :

- Nếu dạng đầu vào  $x(n) = \beta^n (\beta \neq \alpha_k)$  ta đặt  $y_p(n) = B \cdot \beta^n$
- Nếu dạng đầu vào  $x(n) = \beta^n$  mà  $\beta$  trùng với dạng nghiệm  $\alpha_k$  của phương trình đặc trưng ta phải đặt  $y_p(n) = B \cdot n \cdot \beta^n$

Sau đó ta xác định B bằng cách thay  $y_p(n)$  vào phương trình (1.25)

#### Xác định nghiệm tổng quát $y(n)$ :

Đến đây ta sẽ có:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n + B \cdot \beta^n & (\beta \neq \alpha_k) \\ \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n + B \cdot n \cdot \beta^n & (\beta = \alpha_k) \end{cases} \quad (1.33)$$

Các hệ số  $A_1$  và  $A_2$  sẽ được xác định nhờ các điều kiện đầu.

Ta sẽ tìm hiểu cụ thể cách giải phương trình sai phân tìm nghiệm tổng quát thông qua ví dụ 1.19 như sau.

### Ví dụ 1.19

Hãy xác định đáp ứng  $y(n]$ ,  $n \geq 0$  của hệ được biểu diễn bởi phương trình sai phân bậc hai:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

khi đầu vào là:  $x(n) = 4^n$  và điều kiện đầu:  $y(-1) = y(-2) = 0$

**Giải:**

**Tìm  $y_0(n)$**

Ta chọn dạng nghiệm của  $y_0(n) = \alpha^n$  ta có:

Ta có phương trình đặc trưng :  $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$  có 2 nghiệm  $\alpha_1 = -1$ ;  $\alpha_2 = 4$ .

Dạng nghiệm thuần nhất sẽ là:

$$y_0(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n$$

**Tìm  $y_p(n)$**

Nghiệm riêng là một chuỗi hàm mũ giống như  $x(n)$ . Do  $\alpha_2 = 4$  trùng với dạng của  $x(n) = 4^n$  nên dạng nghiệm sẽ là:

$$y_p(n) = B.n.(4)^n$$

Thay vào phương trình đầu bài cho ta có:

$$B.n(4)^n - 3B.(n-1)(4)^{n-1} - 4B(n-2)(4)^{n-2} = (4)^n + 2(4)^{n-1}$$

Giải ra ta có  $B = \frac{6}{5}$ . Do vậy:

$$y_p(n) = \frac{6}{5}n(4)^n$$

**Xác định nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:**

Nghiệm chung của phương trình sai phân có được bằng cách cộng nghiệm thuần nhất với nghiệm riêng ta có:

$$y(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n \quad n \geq 0$$

Ở đây, các hằng số  $C_1$  và  $C_2$  sẽ được xác định theo điều kiện đầu  $y(-1) = y(-2) = 0$ .

Thay vào:

$$y(-1) = A_1(-1)^{-1} + A_2(4)^{-1} + \frac{6}{5}(-1)(4)^{-1} = 0$$

$$y(-2) = A_1(-1)^{-2} + A_2(4)^{-2} + \frac{6}{5}(-2)(4)^{-2} = 0$$

Giải ra ta có kết quả:

$$A_1 = \frac{3}{50} \text{ và } A_2 = \frac{36}{25}.$$

Vậy, ta có kết quả cần tìm là:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{3}{50}(-1)^n + \frac{36}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

## 1.4. CÁC HỆ THỐNG KHÔNG ĐỆ QUY VÀ ĐỆ QUY

### 1.4.1. Các hệ thống không đệ quy

Từ phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Trong trường hợp đặc biệt cho  $N = 0$  thì:

$$a_0 y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$a_0 = 1: \quad y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

**Định nghĩa:** Một HTTT bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc 0 được gọi là hệ thống không đệ quy.

Nhận xét:

$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$  chỉ phụ thuộc đầu vào ở thời điểm hiện tại và các thời điểm quá khứ.

Từ phương trình này, ta đổi chữ r thành chữ k,  $b_k$  thành  $h_k$ , ta thấy đây chính là quan hệ của phép chập

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot x(n-k) = h(n) * x(n)$$

$h(n)$  nhân quả vì  $\forall n < 0$  thì  $h(n) = 0$ .

Vì chiều dài chỉ chạy từ 0 đến M

$$L[h(n)] = [0, M] = M + 1$$

Như vậy, từ nhận xét trên ta thấy:

Hệ thống không đệ quy chính là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn. Ký hiệu FIR (Finite-Duration Impulse Response)

**Xét ổn định:**

$$\text{Tiêu chuẩn ổn định: } S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty; \quad S = \sum_{n=0}^M |h(n)| < \infty$$



Điều kiện ổn định đối với đáp ứng xung luôn luôn được thỏa mãn, vì vậy hệ thống FIR là hệ thống luôn luôn ổn định, đây là đặc điểm ưu việt nhất của hệ thống này nên hay dùng trong đa số mạch điện.

#### 1.4.2. Hệ thống đệ qui

Phương trình sai phân:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Nếu  $N > 0$ ,  $a_0 = 1$ :

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

**Định nghĩa:** Một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân bậc  $N > 0$  được gọi là hệ thống đệ qui.

**Nhận xét:**

+ Đầu ra phụ thuộc

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)]$$

Trong trường hợp này đầu ra (đáp ứng hệ thống) không những chỉ phụ thuộc vào đầu vào ở các thời điểm hiện tại và quá khứ, mà còn phụ thuộc vào đầu ra ở các thời điểm quá khứ. Chẳng hạn ta xem xét hệ thống được biểu diễn theo phương trình sai phân sau:

$$y(n) = Ay(n-1) + x(n), \quad N = 1: \text{phương trình bậc nhất.}$$

Như trên ta đã có, giải phương trình trên ta được:

$$h(n) = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$L[h(n)] = \infty$ , đáp ứng xung của hệ thống có chiều dài vô hạn, do vậy hệ thống này (hệ thống đệ qui) còn gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn IIR. (Infinite-Duration Impulse Response)

**Xét ổn định:**

$$S = \frac{1}{1-A}$$

+ Hệ thống đệ qui ổn định khi tham số  $A < 1$

+ Hệ thống này không ổn định nếu tham số  $A \geq 1$

Như vậy hệ thống đệ quy có thể ổn định hoặc không ổn định. Khi xét hệ thống đệ quy, ta phải xét tính ổn định hệ thống.

### 1.4.3. Hệ thống đệ qui thuần túy

$N > 0, M = 0$ : ta có hệ thống đệ qui thuần túy

$$a_0 = 1: y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$N=1>0, M=0, a_0 = 1$  có:  $y(n) = Ay(n-1) + x(n)$

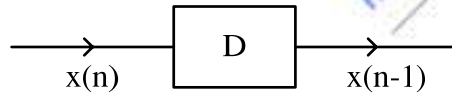
**Định nghĩa:** Một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bởi phương trình sai phân bậc  $N>0$  và  $M=0$  được gọi là hệ thống đệ qui thuần túy (trường hợp riêng của hệ thống đệ qui).

## 1.5. THỰC HIỆN HỆ THỐNG

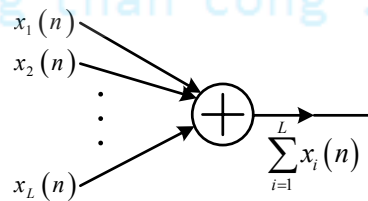
### 1.5.1. Các phần tử thực hiện

Có 3 phần tử chính để thực hiện hệ thống trong miền rời rạc như sau:

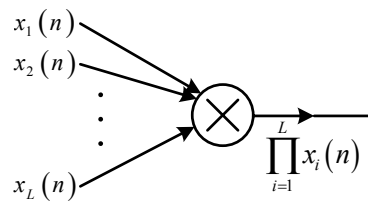
+ Phần tử trễ:



+ Phần tử cộng:



+ Phần tử nhân:



### 1.5.2. Thực hiện hệ thống

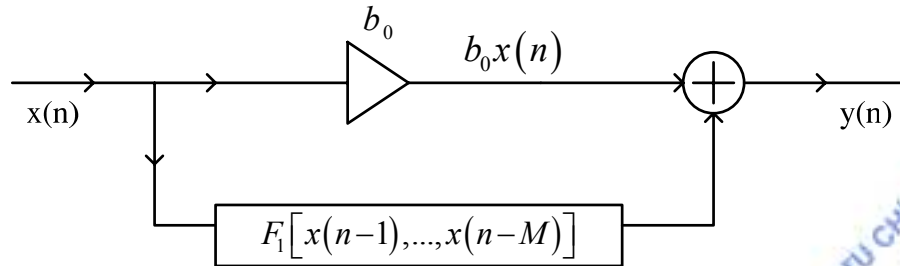
Từ các phần tử trên ta sẽ mô tả các hệ thống đệ quy, không đệ quy, đệ quy thuần túy như sau:

**Hệ thống không đệ qui:**

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) = b_0 x(n) + \sum_{r=1}^M b_r x(n-r)$$



$$\sum_{r=1}^M b_r x(n-r) = F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

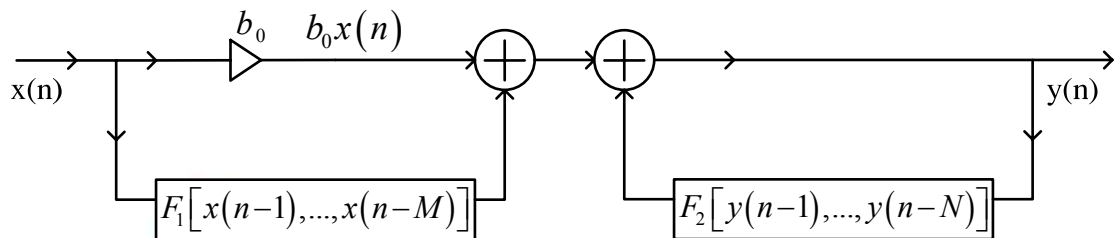


Hệ thống đệ qui:

$$y(n) = b_0 x(n) + \sum_{r=1}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$$

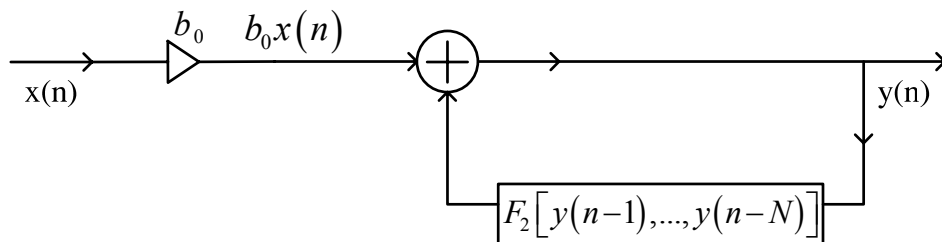
$$\sum_{r=1}^M b_r x(n-r) = F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

$$\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k) = F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]$$



Hệ thống đệ qui thuần túy:

$$y(n) = b_0 x(n) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$$



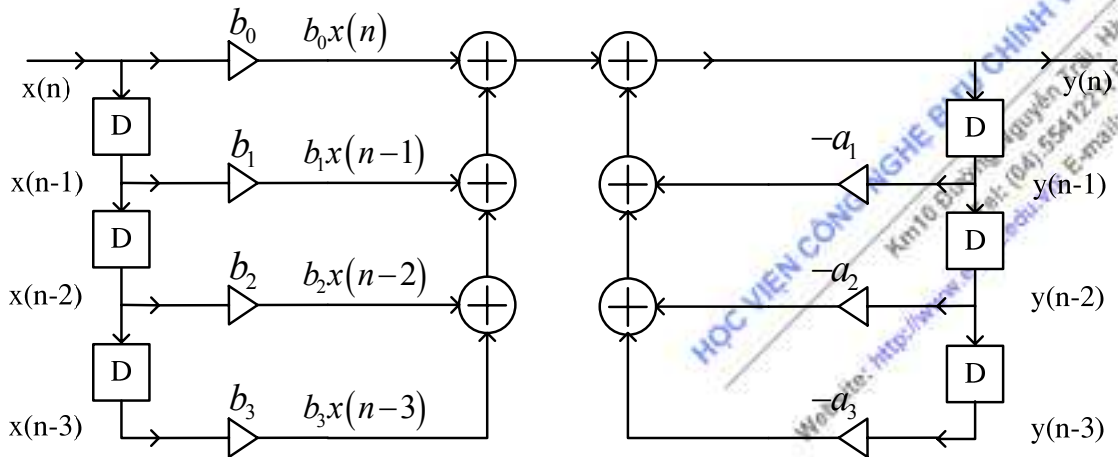
Ví dụ 1.20

Hãy biểu diễn HTTTBB được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n] = b_0x(n] + \sum_{r=1}^3 b_rx(n-r] + \sum_{k=1}^3 (-a_k)y(n-k]$$

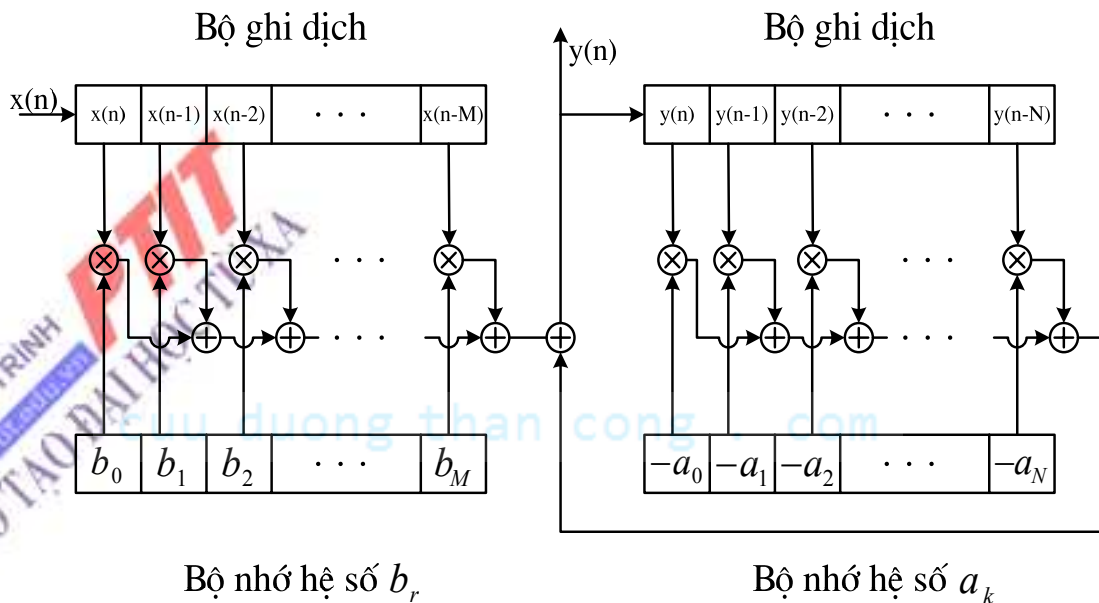
**Giải:**

Dùng các phân tử thực hiện hệ thống ta có sơ đồ cấu trúc như sau:



**Hình 1.20** Sơ đồ hệ thống trong ví dụ 1.20

Khi thực hiện các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng phần cứng, ta sẽ thực hiện bằng các thanh ghi dịch, bộ nhớ và các bộ xử lý toán học như sau



**Hình 1.21** Sơ đồ thực hiện hệ thống.

## 1.6. TƯƠNG QUAN TÍN HIỆU

Phép tương quan thường dùng để so sánh nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... rất hay dùng khi xử lý các tín hiệu Radar dùng trong quân sự, có hai loại tương quan:

### Tương quan chéo (cross – correlation):

Tương quan chéo giữa tín hiệu  $x(n)$  với  $y(n)$  (một trong hai tín hiệu phải có năng lượng hữu hạn) được định nghĩa như sau:

$$R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n) \quad (1.34)$$

### Tự tương quan (auto – correlation):

Trong phép tương quan chéo khi  $x(n) \equiv y(n)$  ta có phép tự tương quan của tín hiệu  $x(n)$  với chính nó và được định nghĩa như sau:

$$R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n) \quad (1.35)$$

Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu cách thực hiện phép tương quan thông qua ví dụ 1.21.

### Ví dụ 1.21

Hãy xác định chuỗi tương quan chéo  $R_{xy}(n)$  của các chuỗi

$$x(n) = \left\{ \dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \frac{1}{0}, 2, -3, 0, 0, \dots \right\}$$

$$y(n) = \left\{ \dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \frac{4}{0}, 1, -2, 5, 0, 0, \dots \right\}$$

**Giải :**

Ta dùng định nghĩa (1.34) để tính  $R_{xy}(n)$ .

- Đối với  $n=0$ ; ta có

$$R_{xy}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)y(m)$$

$$R_{xy}(0) = 7$$

- Đối với  $n > 0$ , ta dịch  $y(n)$  sang phải n đơn vị so với  $x(m)$ , tính tích  $x(m)y(m-n)$  và lấy tổng theo tất cả giá trị của tích.

Kết quả ta có

$$\begin{aligned} R_{xy}(1) &= 13 & R_{xy}(2) &= -18 & R_{xy}(3) &= 16 & R_{xy}(4) &= -7 \\ R_{xy}(5) &= 5 & R_{xy}(6) &= -3 & R_{xy}(n) &= 0 & n &\geq 7 \end{aligned}$$

- Đối với  $n < 0$ , ta dịch  $y(n)$  sang trái  $n$  đơn vị so với  $x(m)$ , tính tích  $x(m)y(m-n)$  và lấy tổng theo tất cả giá trị của tích.

Kết quả ta có:

$$\begin{aligned} R_{xy}(-1) &= 0 & R_{xy}(-2) &= 33 & R_{xy}(-3) &= -14 & R_{xy}(-4) &= 36 \\ R_{xy}(-5) &= 19 & R_{xy}(-6) &= -9 & R_{xy}(-7) &= 10 & R_{xy}(n) &= 0, n \leq -8 \end{aligned}$$

Bởi vậy, chuỗi tương quan chéo của  $x(n)$  và  $y(n)$  là

$$R_{xy}(n) = \begin{cases} 10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, -3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 1

Chương 1 là chương đề cập đến các khái niệm cơ bản nhất về tín hiệu rời rạc, hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc, các biểu diễn cơ bản, các phép toán cơ bản, tất nhiên tất cả các vấn đề được đề cập trong chương này đều được xét ở miền thời gian rời rạc.

Những vấn đề chính được đề cập trong chương này cần lưu ý là:

### 1. Định lý lấy mẫu

Ta chú ý rằng một tín hiệu sẽ được khôi phục khi tần số lấy mẫu phải lớn hơn hoặc bằng hai lần bề rộng phổ của tín hiệu.  $F_s \geq 2B$  ( $B = F_{\max}$ )

### 2. Phân loại tín hiệu, hệ thống xử lý tín hiệu.

Theo định nghĩa về mặt toán học, tín hiệu bao gồm *tín hiệu liên tục* và *tín hiệu rời rạc*.

Tín hiệu liên tục bao gồm *tín hiệu tương tự* và *tín hiệu lượng tử hoá*.

Tín hiệu rời rạc bao gồm *tín hiệu lấy mẫu* và *tín hiệu số*.

Các hệ thống xử lý tín hiệu được phân loại theo tín hiệu xuất hiện trong hệ. Ví dụ: các tín hiệu trong hệ thống là tín hiệu số thì hệ thống đó gọi là hệ thống xử lý tín hiệu số.

Chú ý: Phân biệt khái niệm xử lý tín hiệu số và xử lý số tín hiệu.

### 3. Cách biểu diễn tín hiệu rời rạc.

Lưu ý khi biểu diễn tín hiệu người ta thường chuẩn hoá chu kỳ lấy mẫu  $T_s = 1$ . Tức là  $x(nT_s) = x(n)$ .

Có 3 cách biểu diễn tín hiệu:

- Biểu diễn bằng biểu thức toán học.
- Biểu diễn bằng đồ thị.

- Biểu diễn bằng dãy số.

Còn một cách biểu diễn nữa rất quan trọng chúng ta cần phải nhớ đó là một tín hiệu bất kỳ  $x(n)$  đều được biểu diễn thông qua đáp ứng xung dạng tổng quát như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

#### 4. Các tín hiệu (dãy) cơ bản

Các dãy cơ bản cần nhớ bao gồm:

- Dãy xung đơn vị  $\delta(n)$
- Dãy nhảy đơn vị  $u(n)$
- Dãy chữ nhật  $\text{rect}_N(n)$
- Dãy dốc đơn vị  $r(n)$
- Dãy hàm mũ  $e(n)$

Có thể xem thêm dãy tuần hoàn.

#### 5. Các phép toán cơ bản

Các phép toán cơ bản cần nhớ bao gồm:

- Phép cộng, phép nhân hai tín hiệu.
- Phép nhân một tín hiệu với hằng số.
- Phép trễ tín hiệu.

#### 6. Các khái niệm cơ bản

Một số khái niệm cơ bản bao gồm:

- Dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)_N$
- Dãy có chiều dài hữu hạn N.
- Năng lượng của dãy.
- Công suất của dãy.

#### 7. Hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB). Đáp ứng xung $h(n)$

- Cần lưu ý hệ thống tuyến tính bất biến phải thỏa mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)] = a \cdot T[x_1(n)] + b \cdot T[x_2(n)].$$

- Hệ thống tuyến tính bất biến: ứng với kích thích đầu vào  $x(n)$  ta có đáp ứng ra là  $y(n)$  thì tương tự ứng với kích thích đầu vào  $x(n-k)$  ta có đáp ứng ra là  $y(n-k)$ .

- Khi ta có đầu vào hệ thống tuyến tính bất biến là xung đơn vị  $\delta(n)$  thì đầu ra là đáp ứng xung  $h(n)$ . Đáp ứng xung  $h(n)$  là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính bất biến.

#### 8. Phép chập



Đây là phép toán quan trọng nhất trong xử lý tín hiệu để xác định đầu ra  $y(n)$  hệ thống khi biết đầu vào  $x(n)$  và đáp ứng xung  $h(n)$ .

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

phép chập có tính chất: giao hoán, phân phối, kết hợp.

### 9. Hệ thống TTBB nhân quả, tín hiệu nhân quả.

Hệ thống TTBB được gọi là hệ thống nhân quả khi đáp ứng xung  $h(n)$  của nó thỏa mãn  $h(n) = 0$  với  $\forall n < 0$ .

Tín hiệu  $x(n)$  được gọi tín hiệu nhân quả khi nó thỏa mãn  $x(n) = 0$  với  $\forall n < 0$ .

Lưu ý: Các hệ thống nhân quả và tín hiệu nhân quả mới tồn tại trong thực tế.

### Hệ thống TTBB ổn định

Hệ thống ổn định là hệ thống BIBO, đáp ứng xung  $h(n)$  của nó phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

### 10. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng.

Quan hệ vào ra của hệ thống tuyến tính bất biến sẽ được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n) y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n) x(n-r)$$

Trong đó x: đầu vào.

y: đầu ra.

Các hệ số  $a_k, b_r$  đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống có vai trò tương tự như đáp ứng xung  $h(n)$ .

Việc giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng để tìm ra đầu ra  $y(n)$  có hai phương pháp chính:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp tìm nghiệm riêng và nghiệm thuần nhất.

Từ phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng trên ta sẽ có một số khái niệm về:

- Hệ thống không đệ quy khi  $N = 0$ . Bản chất của hệ thống này là không có thành phần hồi tiếp.
- Hệ thống đệ quy khi  $N \neq 0$ . Bản chất của hệ thống này là có thành phần hồi tiếp.
- Hệ thống đệ quy thuần túy khi  $N \neq 0, M = 0$ . Hệ thống này chỉ gồm duy nhất các thành phần đệ quy.

Lưu ý: Như vậy đến đây ta có hai cách thể hiện quan hệ vào ra hệ thống rời rạc.

- Thể hiện theo phép chập:  $y(n) = x(n) * h(n)$
- Thể hiện theo phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \text{ thường phải chuẩn hoá } a_0 = 1$$

### 11. Thực hiện hệ thống

Các phần tử thực hiện hệ thống bao gồm: phần tử cộng, phần tử nhân, nhân với hằng số, phần tử trễ D.

Khi thực hiện hệ thống phải dựa vào phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, luôn nhớ phải chuẩn hoá hệ số  $a_0 = 1$  để có  $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$  rồi mới vẽ sơ đồ hệ thống. Trên thực tế người ta sẽ dùng các bộ xử lý toán học ALU, các thanh ghi dịch... để thực hiện hệ thống xử lý tín hiệu số theo sơ đồ.

### 12. Tương quan tín hiệu

Phép tương quan thường dùng để nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... có hai loại tương quan:

Tự tương quan: Tương quan tín hiệu  $x(n)$  với chính nó:  $R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n)$

Tương quan chéo: Tương quan tín hiệu  $x(n)$  với  $y(n)$ :  $R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n)$

### Nhắc lại kiến thức toán học

Tổng cấp số nhân.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1 \text{ và}$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

### Bài 1.1

Cho tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3 \cos 50\pi t + 10 \sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Hãy xác định tốc độ lấy mẫu Nyquist đối với tín hiệu này?

### Bài 1.2

Cho tín hiệu  $x_a(t) = 3 \cos 100\pi t$



a) Xác định tốc độ lấy mẫu nhỏ nhất cần thiết để khôi phục tín hiệu ban đầu.

b) Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ  $F_s = 200$  Hz. Tín hiệu rời rạc nào sẽ có được sau lấy mẫu?

### Bài 1.3

Tìm quan hệ giữa dãy nhảy đơn vị  $u(n)$  và dãy xung đơn vị  $\delta(n)$

### Bài 1.4

Tương tự bài trên tìm quan hệ biểu diễn dãy chữ nhật  $\text{rect}_N(n)$  theo dãy nhảy đơn vị  $u(n)$ .

### Bài 1.5

Hãy biểu diễn dãy  $\delta(n+1)$

### Bài 1.6

Xác định  $x(n) = u(n-5) - u(n-2)$

### Bài 1.7

Xác định năng lượng của chuỗi

$$x(n) = \begin{cases} (1/2)^2 & n \geq 0 \\ 3^n & n < 0 \end{cases}$$

### Bài 1.8

Hãy xác định năng lượng của tín hiệu  $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$

### Bài 1.9

Xác định công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị  $u(n)$

### Bài 1.10

Xác định công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị  $u(n)$

### Bài 1.11

Hãy xác định công suất trung bình của tín hiệu  $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$

### Bài 1.12

Đáp ứng xung và đầu vào của một hệ TTBB là:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy xác định đáp ứng ra  $y(n)$  của hệ.

### Bài 1.13

Tương tự như bài trên hãy tính phép chập  $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$  với:

$$a) x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}; \quad x_2(n) = \text{rect}_2(n-1).$$

$$b) x_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n-2); \quad x_2(n) = \text{rect}_3(n).$$

### Bài 1.14

Cho HTTT bất biến có  $h(n)$  và  $x(n)$  như sau:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} b^n & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$0 < a < 1, 0 < b < 1, a \neq b$ . Tìm tín hiệu ra (đáp ứng ra)?

### Bài 1.15

Hãy xác định xem các hệ có phương trình mô tả quan hệ vào ra dưới đây có tuyến tính không:

$$a) y(n) = nx(n)$$

$$b) y(n) = x^2(n)$$

### Bài 1.16

Hãy xác định xem các hệ có phương trình mô tả quan hệ vào ra dưới đây có tuyến tính không:

$$a) y(n) = x(n^2)$$

$$b) y(n) = Ax(n) + B$$

### Bài 1.17

Xác định xem các hệ được mô tả bằng những phương trình dưới đây là nhân quả hay không:

$$a) y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$b) y(n) = ax(n)$$

### Bài 1.18

Xác định xem các hệ được mô tả bằng những phương trình dưới đây là nhân quả hay không:

$$a) y(n) = x(n) + 3x(n+4);$$

$$b) y(n) = x(n^2);$$

$$c) y(n) = x(2n);$$

d)  $y(n] = x(-n)$

**Bài 1.19**

Xét tính ổn định của hệ thống có đáp ứng xung  $h(n) = \text{rect}_N(n)$ .

**Bài 1.20**

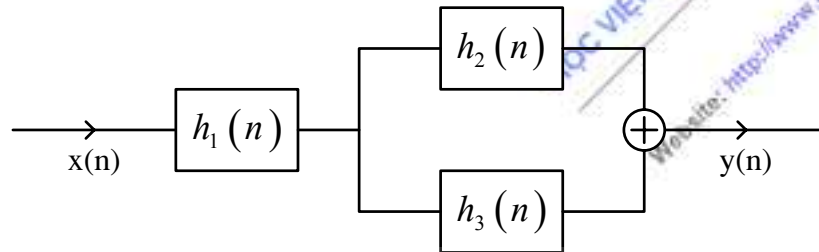
Xác định khoảng giá trị của  $a$  và  $b$  để cho hệ TT BB có đáp ứng xung

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

là ổn định.

**Bài 1.21.**

Hãy tìm đáp ứng xung  $h(n)$  của một hệ thống số được cho bởi sơ đồ sau đây:



**Bài 1.22**

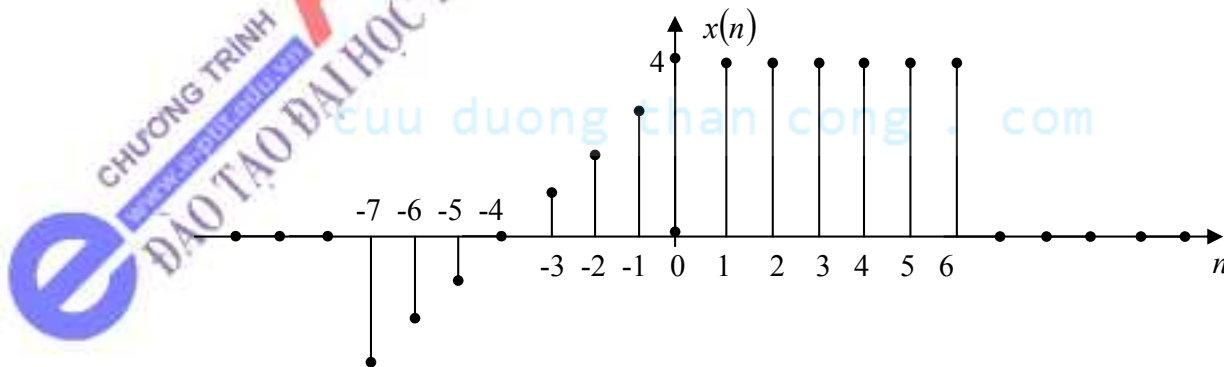
Cho một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n] = b_0x(n] + b_1x(n-1] + b_2x(n-2] + b_4x(n-4]$$

Hãy biểu diễn hệ thống đó.

**Bài 1.23**

Hãy biểu diễn bằng đồ thị tín hiệu  $y(n] = x(2n]$ , ở đây  $x(n]$  là tín hiệu được mô tả như sau:.



**Bài 1.24**

Hãy xác định nghiệm riêng của phương trình sai phân.

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

khi hàm cưỡng bức đầu vào  $x(n) = 2^n$ ,  $n \geq 0$  và bằng không với  $n$  khác.

#### Bài 1.25

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + x(n-2)$$

Với điều kiện đầu  $y(-1) = y(-2) = 0$  và  $x(n) = 5^n$

#### Bài 1.26

Cho  $x(n] = \text{rect}_3(n)$

Hãy xác định hàm tự tương quan  $R_{xx}(n)$ .

#### Bài 1.27

Hãy cho biết cách nào sau đây biểu diễn tổng quát một tín hiệu rời rạc bất kỳ  $x(n)$ ?

$$\text{a) } x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n-k)$$

$$\text{b) } x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$\text{c) } x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$\text{d) } x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)$$

#### Bài 1.28

Hệ thống được đặc trưng bởi đáp ứng xung  $h(n)$  nào sau đây là hệ thống nhân quả:

$$\text{a) } h(n) = u(n+1)$$

$$\text{b) } h(n) = -u(n-1)$$

$$\text{c) } h(n) = -u(-n-1)$$

$$\text{d) } h(n) = -u(n+1)$$

#### Bài 1.29

Phép chập làm nhiệm vụ nào sau đây:

a) Phân tích một tín hiệu ở miền rời rạc

b) Xác định đáp ứng ra của hệ thống

c) Xác định công suất của tín hiệu

d) Xác định năng lượng tín hiệu

#### Bài 1.30

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng mô tả hệ thống rời rạc nào sau đây:

a) Hệ thống tuyến tính bất biến.

b) Hệ thống tuyến tính.

c) Hệ thống ổn định.

d) Hệ thống bất biến.

## CHƯƠNG II: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

### GIỚI THIỆU

Phép biến đổi là một công cụ quan trọng trong phân tích tín hiệu và các hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian. Chương 2 này sẽ trình bày về phép biến đổi  $z$ , các tính chất của biến đổi  $z$  chứng minh tầm quan trọng của nó trong việc phân tích đặc trưng của các hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc theo thời gian.

Như ta đã biết, tại miền thời gian rời rạc các tín hiệu được biểu diễn trực quan, thấy ngay các kết quả cụ thể. Nhưng khi phân tích mạch là rất khó giống trường hợp ta gặp ở miền thời gian liên tục khi nghiên cứu các hệ thống tương tự, do vậy cần có sự biến đổi để việc nghiên cứu trở nên dễ dàng hơn.

Ở đây, ta sẽ thấy, vai trò của biến đổi  $z$  trong phân tích tín hiệu rời rạc và các hệ thống tuyến tính bất biến tương tự như biến đổi Laplace trong phân tích tín hiệu liên tục theo thời gian và các hệ thống tuyến tính bất biến liên tục. Sau khi biến đổi  $z$ , các phép toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Chẳng hạn, trong miền  $z$  phép chập hai tín hiệu miền thời gian là tương đương với phép nhân các biến đổi  $z$  tương ứng của chúng. Tính chất này đã làm đơn giản đáng kể việc phân tích đáp ứng của hệ thống tuyến tính bất biến đối với các loại tín hiệu khác nhau. Ngoài ra, biến đổi  $z$  còn cung cấp cho ta phương pháp đặc trưng hoá một hệ thống tuyến tính bất biến, đáp ứng của nó đối với các loại tín hiệu theo các điểm cực - điểm không (zero) của hệ thống.

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền  $z$ , khi chúng ta ánh xạ các tín hiệu ở miền thời gian rời rạc sang miền  $z$  thông qua biến đổi  $z$ . Sau khi nghiên cứu chúng ta sẽ thấy sự thuận lợi khi phân tích hệ thống trong miền  $z$ , (giống miền Laplace  $s$  khi phân tích hệ thống tương tự).

#### Các nội dung chính của chương bao gồm:

- + Biến đổi  $z$  (ZT).
- + Biến đổi  $z$  ngược (IZT).
- + Quan hệ giữa biến đổi  $z$  và phương trình sai phân.
- + Biểu diễn hệ thống trong miền  $z$  – Hàm truyền đạt.
- + Sự ổn định của hệ thống trong miền  $z$ .

## NỘI DUNG

### 2.1. BIẾN ĐỔI Z (ZT: Z TRANSFORM)

#### 2.1.1. Định nghĩa biến đổi z

**Định nghĩa:** Biến đổi z của một dãy  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.1)$$

Định nghĩa trên còn được gọi là biến đổi z 2 phía

Ta sẽ có biến đổi z một phía nếu thay đổi cận n chạy từ 0 đến  $+\infty$  :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Ký hiệu bởi toán tử:

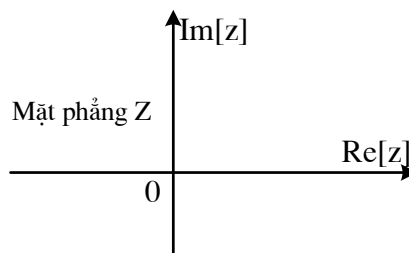
$$ZT[x(n)] = X(z)$$

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(z)$$

Ở đây ta phải thấy được z là một biến số phức và được biểu diễn theo hai dạng:

+ **Biểu diễn theo phần thực, phần ảo  $\text{Re}[z]$ ,  $\text{Im}[z]$**

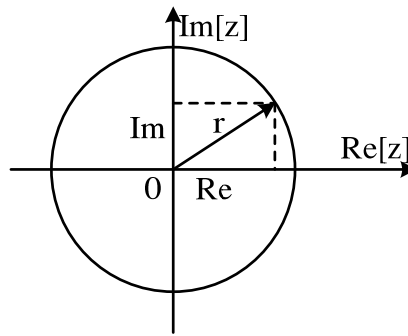
$$z = \text{Re}[z] + j.\text{Im}[z]$$



+ **Biểu diễn theo tọa độ cực:**

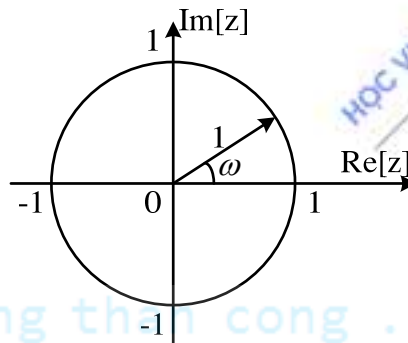
$$z = r e^{j\omega} = r (\cos \omega + j \sin \omega) = r \cos \omega + j \sin \omega = \text{Re}[z] + j \text{Im}[z]$$





Hình 2.1. Biểu diễn  $z$  trên mặt phẳng phức

- Trường hợp đặc biệt:  $|z| = r = 1$ , ta có vòng tròn đơn vị.



Hình 2.2. Vòng tròn đơn vị

Ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về biến đổi  $z$  thông qua các ví dụ sau:

### Ví dụ 2.1

Tìm  $zT$  của các dãy sau:

a.  $x_1(n) = \delta(n)$

d.  $x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

b.  $x_2(n) = \delta(n-1)$

e.  $x_5(n) = 2^n u(n)$

c.  $x_3(n) = \delta(n+1)$

**Giải:**

a.  $X_1(z) = ZT[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1$

b.  $X_2(z) = ZT[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$

$$c. X_3(z) = ZT[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n} = 1 \cdot z^1 = z$$

$$d. X_4(z) = ZT[x_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

$$X_4(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \text{ với } \left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

$$e. X_5(z) = ZT[x_5(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

với  $|z| > 2$

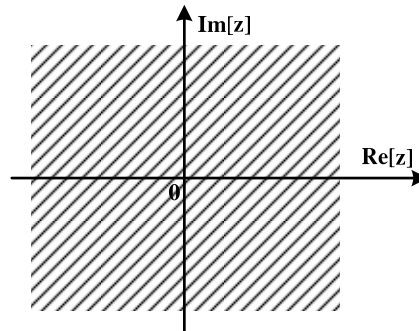
### 2.1.2. Miền hội tụ của biến đổi z

Tập hợp tất cả các giá trị của  $z$  mà tại đó chuỗi  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$  hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi z.

**Ký hiệu:** RC: miền hội tụ (Region of Convergence)

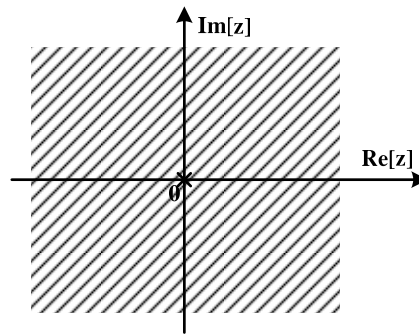
**Ví dụ 2.2:** Hãy tìm miền hội tụ của biến đổi z trong ví dụ 2.1

a.  $RC[X_1(z)]$ ,  $RC[X_2(z)]$  Toàn bộ mặt phẳng z như hình 2.3



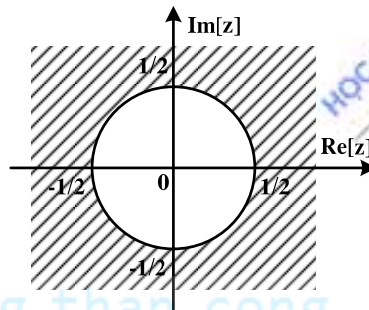
Hình 2.3. Miền hội tụ của  $X_1(z)$ ,  $X_3(z)$

b.  $RC[X_2(z)]$ : Toàn bộ mặt phẳng z trừ gốc tọa độ  $z = 0$  như hình 2.4



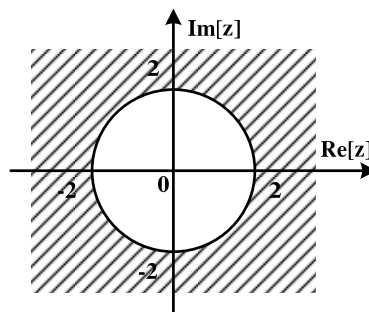
Hình 2.4. Miền hội tụ của  $X_2(z)$

c.  $RC[X_4(z)]$ : Ngoài vòng tròn bán kính  $\frac{1}{2}$  như hình 2.5.



Hình 2.5. Miền hội tụ của  $X_4(z)$

$RC[X_5(z)]$ : Ngoài vòng tròn bán kính 2 như hình 2.6.



Hình 2.6. Miền hội tụ của  $X_4(z)$

## 2.2. CỰC VÀ KHÔNG (POLE AND ZERO)

### 2.2.1. Định nghĩa điểm không

Trong biến đổi  $z$  nếu tại các điểm  $z_{or}$  mà tại đó  $X(z)$  triệt tiêu  $X(z)|_{z=z_{or}} = 0$  thì  $z_{or}$  gọi là các điểm không của  $X(z)$ .

Biểu diễn:  $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

Như vậy  $z_{or}$  là nghiệm của đa thức  $N(z)$ .

Nếu  $N(z)$  có bậc là  $M$  và viết là:

$$N(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_M z^M$$

$\Rightarrow M$  nghiệm  $\rightarrow X(z)$  có  $M$  điểm không.

Viết lại dưới dạng các nghiệm:

$$N(z) = b_M (z - z_{01})(z - z_{02}) \dots (z - z_{0M}) = b_M \prod_{r=1}^M (z - z_{0r})$$

### 2.2.2. Định nghĩa điểm cực

Nếu tại các điểm  $z_{pk}$  mà tại đó  $X(z)$  không xác định  $X(z) \Big|_{z=z_{pk}} \rightarrow \infty$  thì những điểm  $z_{pk}$  này gọi là các điểm cực của  $X(z)$ .

Như vậy  $z_{pk}$  chính là nghiệm của  $D(z)$  (mẫu số).

Nếu  $D(z)$  có bậc là  $N$  và viết là:

$$D(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_N z^N$$

$\Rightarrow N$  nghiệm  $\rightarrow X(z)$  có  $N$  điểm cực  $z_{p1}, z_{p2}, \dots, z_{pN}$ .

$$D(z) = a_N (z - z_{p1})(z - z_{p2}) \dots (z - z_{pN}) = a_N \prod_{k=1}^N (z - z_{pk})$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M \prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{a_N \prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

#### Ví dụ 2.3

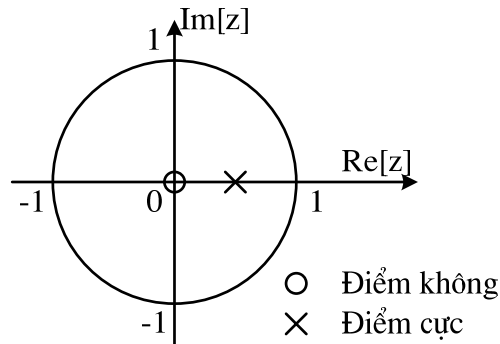
Cho  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ . Tìm điểm cực và điểm không?

**Giải:** Biến đổi:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$N(z) = z \rightarrow z_{01} = 0$$

$$D(z) = z - \frac{1}{2} \rightarrow z_{p1} = \frac{1}{2}$$



Hình 2.7. Biểu diễn điểm cực, điểm không trong mặt phẳng z

### 2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM)

#### 2.3.1. Định nghĩa biến đổi z ngược

$$\text{IZT}[X(z)] = x(n)$$

$$X(z) \xrightarrow{\text{IZT}} x(n)$$

Biến đổi z ngược được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad (2.2)$$

Ta hoàn toàn có thể chứng minh được bằng định lý cosin

$\oint_C$  - Đường cong kín đi qua gốc tọa độ. Tích phân đường đi theo chiều dương.

Có 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:

1. Phương pháp thặng dư để tìm trực tiếp tích phân, cho chúng ta cách tìm cơ bản..
2. Khai triển thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi z ngược cơ bản.
3. Khai triển thành các phân thức tối giản.

#### 2.3.2. Phương pháp thặng dư

Trong phương pháp này ta tính trực tiếp tích phân theo công thức sau:

$$x(n) = \sum_k \text{Res} \left[ X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_{pk}} \right] \quad (2.3)$$

$z_{pk}$  : cực của  $X(z)$  nhân với  $z^{n-1}$ .

$$\text{Viết dưới dạng: } X(z) \cdot z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - z_{pk})^{s_k}} \quad (2.4)$$

$z_{pk}$  : cực bội bậc  $s_k$

$$\psi(z) = (z - z_{pk})^{s_k} X(z) \cdot z^{n-1}$$

Thặng dư tìm được bằng công thức sau đây:

$$\text{Res} \left[ X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_{pk}} \right] = \frac{1}{0!} \frac{d^0 \psi(z)}{dz^0} \Big|_{z=z_{pk}} = \psi(z_{pk}) \quad (2.5)$$

#### Ví dụ 2.4

Cho  $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ ; miền hội tụ RC[X(z)]:  $|z| > 1/2$ .

**Giải:**

$$X(z) z^{n-1} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} z^{n-1} = \frac{z^n}{z - \frac{1}{2}}$$

$x(n) \geq 0$ ,  $x(n)$  nhân quả.

$\Rightarrow$  có một cực đơn  $z_{pk} = \frac{1}{2}$ ;  $s_k = 1$

$$x(n) = \text{Res} \left[ X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=\frac{1}{2}} \right] = \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\psi(z) = (z - z_{pk})^{s_k} X(z) \cdot z^{n-1} = z^n$$

$$\Rightarrow \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

#### 2.3.3. Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa

Ở phương pháp này, ta khai triển biến đổi  $z$  thành một chuỗi lũy thừa có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^{-n}, \text{ trong đó } \alpha_n \text{ là hệ số của chuỗi lũy thừa.}$$

So sánh với định nghĩa:



$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Rightarrow x(n) \equiv \alpha_n$ : nhận thấy rằng, hệ số của chuỗi chính là các mẫu của tín hiệu  $x(n)$ .

### Ví dụ 2.5

Cho  $X(z) = \frac{z}{z-2}$

Tìm  $x(n)$  với điều kiện miền hội tụ  $RC[X(z)] : |z| > 2$  (nằm ngoài vòng tròn bán kính 2).

**Giải:**

Biến đổi  $X(z) = \frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$

Thực hiện chia đa thức:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \frac{1-2z^{-1}}{2z^{-1}} \\ - \frac{2z^{-1}-4z^{-2}}{4z^{-2}} \\ - \frac{4z^{-2}-8z^{-3}}{8z^{-3}} \\ - \frac{8z^{-3}-16z^{-4}}{16z^{-4}} \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1-2z^{-1} \\ 1+2z^{-1}+4z^{-2}+8z^{-3}+16z^{-4} \dots \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n$$

Vậy:  $x(n) = (2)^n u(n)$

### 2.3.4. Phương pháp khai triển thành các phân thức tối giản

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}; \text{ Bậc của } N(z) \text{ là } M, \text{ bậc của } D(z) \text{ là } N.$$

\*  $M \geq N$ : Để phân thức tối giản thì:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = S(z) + \frac{P(z)}{Q(z)}, \text{ với } S(z) \text{ là phần nguyên.}$$

$$D(z) \equiv Q(z)$$

Bậc của  $S(z)$ :  $M - N$

$$S(z) = B_{M-N}z^{M-N} + B_{M-N-1}z^{M-N-1} + \dots + B_1z^1 + B_0$$

$$s(x) = B_{M-N}\delta[n + (M-N)] + B_{M-N-1}\delta[n + (M-N-1)] + \dots + B_1\delta[n+1] + B_0$$

\*  $M < N$ :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Xét  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $M < N$

- **Trường hợp 1:**  $X(z)$  chỉ có các cực đơn

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_{pk}} \quad (2.6)$$

$z_{pk}$ : điểm cực của  $Q(z)$ , có  $N$  cực

$$A_k = \left. (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \right|_{z=z_{pk}} \quad (2.7)$$

- **Trường hợp 2:**  $X(z)$  có một cực bội, còn lại là đơn

Giả sử  $X(z)$  có một cực bội là  $z_{pl}$  bậc  $s$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{j=1}^s \frac{C_j}{(z - z_{pl})^j} \quad (2.8)$$

$z_{pl}$ : Cực bội bậc  $s$

$z_{pk}$ : Cực đơn

$$A_k = \left. (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \right|_{z=z_{pk}} \quad (2.9)$$

$$C_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} \left[ (z - z_{pl})^s \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \Big|_{z=z_{pl}} \quad (2.10)$$

- **Trường hợp 3:**  $X(z)$  có  $L$  cực bội

Giả sử  $X(z)$  có  $L$  cực bội bậc  $s_1, s_2, \dots, s_L$ . Các cực còn lại là cực đơn.

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N'} \frac{A_k}{(z - z_{pk})} + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{s_i} \frac{C_{js_i}}{(z - z_{pl_i})^j} \quad (2.11)$$

$$N' = N - \sum_{i=1}^L s_i$$

$z_{pl_i}$ : Cực bội bậc  $s_i$

$z_{pk}$ : Cực đơn

$$A_k = (z - z_{pk}) \frac{P(z)}{Q(z)} \Big|_{z=z_{pk}} \quad (2.12)$$

$$C_{js_i} = \frac{1}{(s_i - j)!} \frac{d^{s_i-j}}{dz^{s_i-j}} \left[ (z - z_{pl_i})^{s_i} \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \Big|_{z=z_{pl_i}} \quad (2.13)$$

Ta lưu ý:

$$\text{IZT} \left[ \frac{z}{(z - z_{pk})^{n-1}} \right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} z_{pk}^{n-m} u(n)$$

**Ví dụ 2.6**

Cho  $X(z) = \frac{z+2}{z^2-3z+2}$ , hãy tìm  $x(n)$ .

**Giải:**

Ta phân tích  $X(z)/z$  thành phân thức tối giản:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z^2-3z+2)z} \text{ có 3 điểm cực } z_{p1}=1, z_{p2}=2, z_{p3}=0$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-1)(z-2)z} = \frac{A_1}{(z-1)} + \frac{A_2}{z-2} + \frac{A_3}{z}$$

Đều là cực đơn nên:

$$A_1 = \cancel{(z-1)} \frac{z+2}{(\cancel{(z-1)})(z-2)z} \Big|_{z=1} = -3$$

$$A_2 = \cancel{(z-2)} \frac{z+2}{(z-1)(\cancel{(z-2)})z} \Big|_{z=2} = 2$$

$$A_3 = \cancel{z} \frac{z+2}{(z-1)(z-2)\cancel{z}} \Big|_{z=0} = 1$$

Vậy:  $\frac{X(z)}{z} = \frac{-3}{(z-1)} + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z}$

$$X(z) = \frac{-3z}{z-1} + \frac{2z}{z-2} + 1$$

m = 0 thì:

$$x(n) = (-3) \cdot (1)^n u(n) + 2 \cdot 2^n u(n) + \delta(n) \quad (\text{Vì } \frac{z}{z-\alpha} \leftrightarrow \alpha^n u(n))$$

Như vậy đã hoàn thành biến đổi z ngược.

## 2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Các tính chất của biến đổi z được tổng kết lại trong bảng sau:

**Bảng 2.1 Các tính chất biến đổi Z**

Miền n	Miền z
$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{-1} dz$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$
$ax_1(n) + bx_2(n)$ ; a, b là hằng số	$aX_1(z) + bX_2(z)$
$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
$x^*(n)$ ; (*: liên hợp phức)	$X^*(z^*)$
$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$

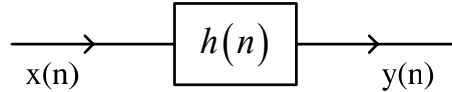
## 2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

### 2.5.1. Hàm truyền đạt

- Hàm truyền đạt:

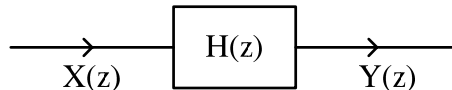
Miền n:

Trong miền thời gian rời rạc n ta có quan hệ vào ra của hệ thống được thể hiện qua phép chập:



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Miền z: Trong miền z ta có:



$$X(z) = ZT [x(n)]$$

$$H(z) = ZT [h(n)]$$

$$Y(z) = ZT [y(n)]$$

$$Y(z) = X(z).H(z)$$

Trong miền z phép chập đã được chuyển thành phép nhân đại số thông thường, đây chính là một trong những ưu điểm của biến đổi Z.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.15)$$

$$h(n) = IZT [H(z)]$$

Trong miền z quan hệ vào ra của hệ thống được thực hiện nhờ phép nhân đại số thông thường thay thế cho phép chập, điều này dẫn đến hiệu năng tính toán cao.

$H(z)$ : Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc là biến đổi z của đáp ứng xung) hay nó còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi z của tín hiệu ra trên biến đổi z của tín hiệu vào.

$H(z)$  là hàm truyền đạt của hệ thống đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền z có vai trò tương tự như đáp ứng xung  $h(n)$  trong miền thời gian rời rạc.

#### - Liên hệ với phương trình sai phân:

Xét phương trình sai phân tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Biến đổi z hai phía của phương trình sai phân:

$$ZT \left[ \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \right] = ZT \left[ \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \right]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k ZT[y(n-k)] = \sum_{r=0}^M b_r ZT[x(n-r)]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

Ta rút ra:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.16)$$

Nếu  $a_0 = 1$  sẽ được:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.17)$$

Đây chính là hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc tìm được thông qua biến đổi Z đối với phương trình sai phân.

### Thực hiện hệ thống:

Trong miền z các phần tử thực hiện hệ thống cũng tương tự như ở chương 1, chỉ có thể hiện khâu trễ là khác nhau.

#### + Các phần tử thực hiện:

- Phần tử trễ:

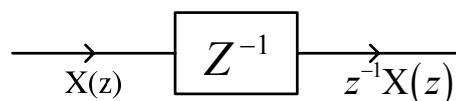
Miền n:



Miền z:

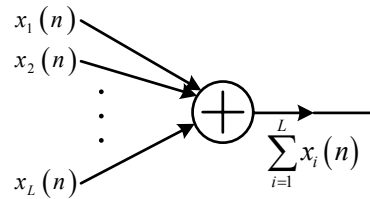
$$ZT[x(n)] \equiv X(z)$$

$$ZT[x(n-1)] \equiv z^{-1} X(z)$$

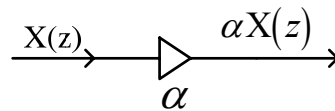


- Phần tử cộng:





- Phần tử nhân với hằng số:



**Cách mắc sơ đồ hệ thống trong miền z:**

- Nếu có các hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tổng các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

$$H(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z) \quad (2.18)$$

- Nếu có các hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng tích các hàm truyền đạt của các hệ thống thành phần.

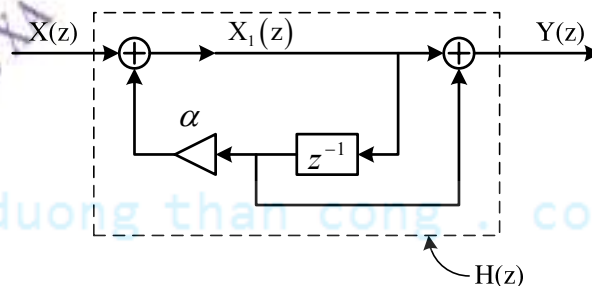
$$H(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z) \quad (2.19)$$

- Nếu  $H_2(z)$  mắc hồi tiếp với  $H_1(z)$  thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z).H_2(z)} \quad (2.20)$$

### Ví dụ 2.7

Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ sau đây:



Tìm hàm truyền đạt  $H(z)$ ? Tìm đáp ứng xung  $h(n)$  của hệ thống?

**Giải:**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X_1(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X_1(z)$$

$$X(z) = X_1(z)[1 - \alpha z^{-1}]$$

$$Y(z) = X_1(z) + z^{-1} X_1(z) = X_1(z)[1 + z^{-1}]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Tìm  $h(n)$  = ?

Phân tích  $H(z)$  làm 2 thành phần:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - \alpha} + z^{-1} \frac{z}{z - \alpha} \\ &= \underbrace{\frac{z}{z - \alpha}}_{\alpha^n u(n)} + \underbrace{z^{-1} \frac{z}{z - \alpha}}_{\alpha^{n-1} u(n-1)} \end{aligned}$$

$$h(n) = \alpha^n u(n) + \alpha^{n-1} u(n-1)$$

### 2.5.2. Độ ổn định

Ta nhắc lại điều kiện ổn định đã học trong chương 1

**Điều kiện ổn định trong miền thời gian rời rạc n:**

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) < \infty$$

**Điều kiện ổn định trong miền z:**

Trong miền z một hệ thống ổn định sẽ phải thỏa mãn định lý sau:

**Định lý ổn định:** Một HTTTBB nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt  $H(z)$  nằm bên trong vòng tròn đơn vị (tức là chỉ cần một điểm cực nằm trên hoặc nằm trong vòng tròn đơn vị là hệ thống mất ổn định).

#### Ví dụ 2.9

Cho HTTTBB được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = Ay(n) + x(n)$$

Hãy tìm hàm truyền đạt  $H(z)$ , tìm  $h(n)$  và xét ổn định trong miền z.

**Giải:**

Lấy biến đổi z cả hai vế

$$Y(z) = Az^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$Y(z)(1 - Az^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - Az^{-1}} = \frac{z}{z - A}, \text{ điểm cực } z = A.$$

$$h(n) = \text{IZT}[H(z)] = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Xét ổn định:

$$H(z) = \frac{z}{z - A}$$

$$D(z) = z - A \rightarrow z_{p1} = A.$$

$A < 1 \rightarrow$  Hệ thống ổn định.

$A \geq 1 \rightarrow$  Hệ thống không ổn định.

### Tiêu chuẩn ổn định Jury:

Theo tiêu chuẩn này việc xét tính ổn định sẽ đơn giản hơn vì đối với hệ thống có bậc cao, tức là số điểm cực nhiều thì việc xác định các điểm cực gặp nhiều khó khăn. Sau đây chúng ta sẽ xem xét tiêu chuẩn Jury:

Ta biết hàm truyền đạt của hệ thống được biểu diễn như sau:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Từ công thức này, gọi  $D(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$ .

Từ các hệ số  $a_k$  của  $D(z)$  chúng ta lập bảng Jury có  $2N - 3$  hàng bằng cách sau đây:

Hàng	Hệ số
1	1 $a_1$ $a_2$ $a_3$ ... $a_{N-1}$ $a_N$
2	$a_N$ $a_{N-1}$ $a_{N-2}$ $a_{N-3}$ ... $a_1$ 1
3	$c_0$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ ... $c_{N-2}$ $c_{N-1}$
4	$c_{N-1}$ $c_{N-2}$ $c_{N-3}$ $c_{N-4}$ ... $c_1$ $c_0$
5	$d_0$ $d_1$ $d_2$ $d_3$ ...
6	$d_{N-2}$ $d_{N-3}$ $d_{N-4}$ $d_{N-5}$ ...
$\vdots$	$\vdots$
$2N - 3$	$r_0$ $r_1$ $r_2$

Công thức tính:

$$c_i = \det \begin{bmatrix} 1 & a_{N-1} \\ a_N & a_i \end{bmatrix} = a_i - a_N \cdot a_{N-1}; \quad i: 0 \rightarrow N-1.$$

$$d_i = \det \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix} = c_0 c_i - c_{N-1} \cdot c_{N-1-i}; \quad i: 0 \rightarrow N-2.$$

Sau khi lập xong  $2N-3$  hàng như vậy ta có tiêu chuẩn

Một hệ thống là ổn định nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$1. \quad D(z) \Big|_{z=1} > 0$$

$$2. \quad D(z) \Big|_{z=-1} > 0 \text{ với } N \text{ chẵn}$$

$$D(z) \Big|_{z=-1} < 0 \text{ với } N \text{ lẻ}$$

$$1 > |a_N|$$

$$|c_0| > |c_{N-1}|$$

$$3. \quad |d_0| > |d_{N-2}|$$

$$|r_0| > |r_2|$$

Chỉ cần không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên là hệ thống không ổn định.

### Ví dụ 2.10

Cho HTTTBB được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = x(n)$$

Tìm  $H(z)$

Xét ổn định theo tiêu chuẩn Jury.

**Giải:**

Lấy biến đổi z cả 2 vế

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

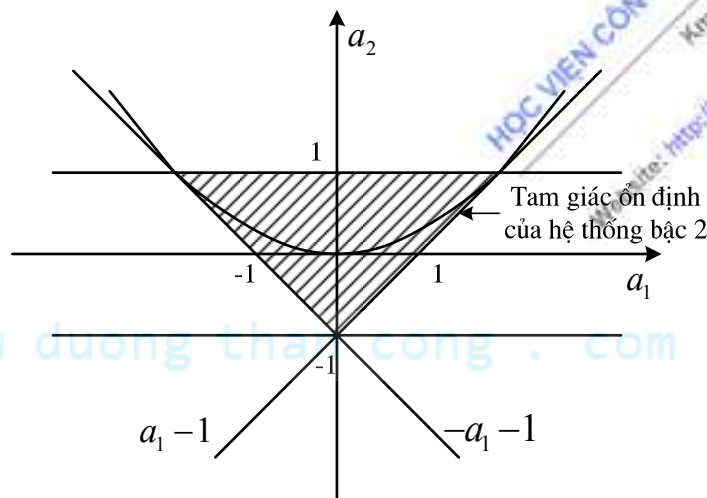
Ta có:

$$D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Theo chuẩn Jury như trình bày ở trên ta có:

1.  $D(z)|_{z=1} = 1 + a_1 + a_2 > 0$   
 $\Rightarrow a_2 > -(1 + a_1)$
2.  $D(z)|_{z=-1} = 1 - a_1 + a_2 > 0$  N chẵn  
 $\Rightarrow a_2 > -(1 - a_1)$
3.  $1 > |a_2| \Rightarrow -1 < a_2 < 1$

Dựa vào 3 điều kiện trên ta sẽ xác định được miền ổn định của hệ thống theo hai tham số  $a_1$  và  $a_2$  như sau:



Hình 2.8 Miền ổn định của hệ thống trong ví dụ 2.10

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG II.

Trong chương 2, chúng ta đã xem xét cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền z. Có thể nói rằng, vai trò của biến đổi z trong miền rời rạc tương tự như vai trò của biến đổi Laplace trong miền liên tục. Khi thực hiện biến đổi z, ánh xạ các tín hiệu và hệ thống từ miền n sang miền z, ta thấy các công cụ toán học trong miền z đơn giản hơn so với các công cụ toán học trong miền thời gian rời rạc n, ví dụ như trong miền z, hệ thống xử lý tín hiệu đều được khảo sát bằng các phương pháp đại số thông qua hàm truyền đạt của hệ thống, còn trong miền thời gian rời rạc n chúng ta phải khảo sát thông qua phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, khi bậc của phương trình sai phân lớn hơn 2 ta thấy việc giải phương trình này gặp nhiều khó khăn. Hơn nữa, trong miền z, phép chập trong miền thời gian rời rạc n đã được chuyển thành phép nhân.

Những vấn đề cần tập trung xem xét kỹ trong chương 2 bao gồm:

### 1. Biến đổi z

Định nghĩa biến đổi z :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Nếu thay đổi cận:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Ta có biến đổi Z một phía.

Nhớ rằng Z là một biến số phức nên có thể được biểu diễn theo 2 cách.

## 2. Miền hội tụ của biến đổi Z

Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$  hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z.

Ký hiệu miền hội tụ là RC. Ta phải chú ý đến miền hội tụ khi thực hiện biến đổi z.

## 3. Điểm cực điểm không

Cần phân biệt điểm cực, điểm không của tín hiệu và điểm cực, điểm không của hệ thống.

Nếu tín hiệu X(z) có dạng phân thức  $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  thì:

- Điểm cực  $z_{pk}$  của tín hiệu X(z) là tập các điểm làm cho X(z) không xác định:  $X(z) \Big|_{z=z_{pk}} = \infty$ . Nghĩa là  $z_{pk}$  là nghiệm của D(z)

- Điểm không  $z_{0r}$  của tín hiệu X(z) là tập các điểm làm cho X(z) triệt tiêu:  $X(z) \Big|_{z=z_{0r}} = 0$ .

Nghĩa là  $z_{0r}$  là nghiệm của N(z)

Lưu ý rằng điểm cực điểm không của hệ thống được xác định theo hàm truyền đạt H(z).

- Điểm cực của hệ thống là tập các điểm  $z_{pk}$  làm cho H(z) không xác định  $H(z) \Big|_{z=z_{pk}} = \infty$

- Điểm không của hệ thống là tập các điểm  $z_{0r}$  làm cho H(z) triệt tiêu  $H(z) \Big|_{z=z_{0r}} = 0$

Do vậy hàm truyền đạt H(z) còn được biểu diễn theo dạng điểm cực và điểm không:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})} \text{ hay:}$$

$$H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

Trong đó  $G = \frac{b_M}{a_N}$  là hệ số truyền



#### 4. Biến đổi Z ngược

Định nghĩa biến đổi Z ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Trong đó  $\oint_C$  - Đường cong kín đi qua gốc tọa độ đi ngược chiều kim đồng hồ.

Chúng ta phải nhớ 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:

1. Phương pháp thặng dư để tìm trực tiếp tích phân.
2. Khai triển thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi z ngược cơ bản.
3. Khai triển thành các phân thức tối giản.

Trong đó các bài tập sẽ tập trung ở phương pháp thứ ba. Khi làm bài tập về biến đổi Z ngược chúng ta phải nhớ các biến đổi tương đương hay gặp như:

Nếu ta đưa  $X(z)$  về dạng phân thức tối giản  $X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_{pk}}$

thì ta phải sử dụng biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} \text{miền } z &\Leftrightarrow \text{miền } n \\ \frac{A_k}{z - z_{pk}} &\Leftrightarrow A_k \cdot (z_{pk})^{n-1} \cdot u(n-1) \end{aligned}$$

#### 5. Các tính chất biến đổi z

Phải nhớ tính chất quan trọng là khi chuyển sang miền z thì phép chập trở thành phép nhân thông thường.

$$x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z).$$

#### 6. Biểu diễn hệ thống trong miền z.

Ta phải nhớ rằng đặc trưng cho hệ thống trong miền z là hàm truyền đạt  $H(z)$ . Hàm truyền đạt có vai trò như đáp ứng xung  $h(n)$  của hệ thống trong miền thời gian rời rạc.

Hàm truyền đạt  $H(z)$  được hiểu theo hai khái niệm:

- Hàm truyền đạt  $H(z)$  là tỷ số của biến đổi z tín hiệu ra trên biến đổi z tín hiệu vào.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Hàm truyền đạt  $H(z)$  là biến đổi z của đáp ứng xung  $h(n)$ .

#### 7. Liên hệ giữa biến đổi z và phương trình sai phân.

Biến đổi z hai vế của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

ta thu được:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \text{ nên nhớ luôn chuẩn hoá } a_0 = 1 \text{ để dễ vẽ sơ đồ thực hiện.}$$

Các phần tử thực hiện hệ thống trong miền z cũng giống như trong miền thời gian rời rạc n: phần tử cộng, nhân, nhân với hằng số. Phần tử trễ D trong miền n khi sang miền z trở thành phần tử  $z^{-1}$ .

Có 3 dạng cấu trúc thông thường của hệ thống: song song, nối tiếp, hồi tiếp. Cách xác định hàm truyền đạt hệ thống tổng quát tương ứng như sau:

- Nếu có N hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z)$$

- Nếu có N hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z)$$

- Nếu  $H_2(z)$  mắc hồi tiếp với  $H_1(z)$  thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z).H_2(z)}$$

## 8. Sự ổn định của hệ thống trong miền z.

Một hệ thống TTBB nhân quả trong miền z muốn ổn định phải thỏa mãn:

Tất cả các điểm cực  $z_{pk}$  của hàm truyền đạt  $H(z)$  phải nằm bên trong vòng tròn đơn vị tức là:

$$\forall |z_{pk}| < 1.$$

Ta có  $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ . Khi bậc N của hệ thống tức bậc của đa thức đặc trưng  $D(z)$  lớn hơn 2 thì ta phải dùng tiêu chuẩn Jury để xét tính ổn định.

**Một số phép toán cần nắm vững để làm học tập trong chương này.**

- Các khái niệm về chuỗi, chuỗi hội tụ.
- Các phép toán về số phức.
- Tổng cấp số nhân.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1 \quad \text{và tổng quát} \quad \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

### Bài 2.1

Xác định biến đổi  $z$  của các tín hiệu hữu hạn sau

a)  $x_1(n) = \{1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

b)  $x_2(n) = \{1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

c)  $x_3(n) = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

d)  $x_4(n) = \{2 \ 4 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$

### Bài 2.2

Xác định biến đổi  $z$  của các tín hiệu hữu hạn sau

a)  $x_1(n) = \delta(n - k), \quad k > 0$

b)  $x_2(n) = \delta(n + k), \quad k > 0$

### Bài 2.3

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu:

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

### Bài 2.4

Cho  $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$

Xác định  $X(z)$ .

### Bài 2.5

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

### Bài 2.6

Cho  $X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{3}}$

Xác định  $x(n)$  bằng phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa.

### Bài 2.7

Cho  $H(z) = \frac{z+3}{(z^2+z+1)(z-\frac{1}{2})}$

Xác định điểm cực điểm không hệ thống. Biểu diễn trên mặt phẳng z.

**Bài 2.8**

Cho  $H(z) = \frac{3}{(z^2+z+1)(z+\frac{1}{4})}$

Xét ổn định hệ thống?

**Bài 2.9**

Cho tín hiệu  $X(z) = \frac{z+2}{2z^2-7z+3}$ , Hãy xác định  $x(n) = ?$

**Bài 2.10**

Cho hệ thống có hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{2z+3}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

- Xác định điểm cực điểm không của hệ thống.
- Xét xem hệ thống có ổn định không.
- Tìm đáp ứng xung  $h(n)$  của hệ thống.

**Bài 2.11**

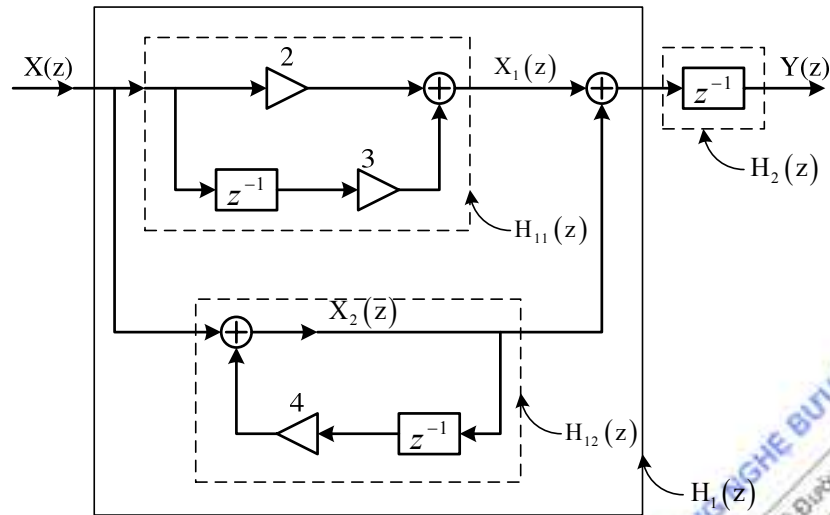
Cho hệ thống có:

$$H(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}$$

- Hãy xét xem hệ thống có ổn định không
- Hãy xác định đáp ứng xung của hệ thống.
- Xác định  $h(n)$  khi  $H(z) = \frac{z^{2006}}{2z^2 - 3z + 1}$

**Bài 2.12**

Cho sơ đồ hệ thống:



Hãy xác định hàm truyền đạt  $H(z)$

### Bài 2.13

Cho hệ thống có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{1}{4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}$$

Hãy xét sự ổn định của hệ thống.

### Bài 2.14

Tìm hệ thống và đáp ứng mẫu đơn vị của hệ thống được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 2x(n)$$

### Bài 2.15

Cho tín hiệu  $x(n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u(n)$

Biến đổi z của nó sẽ là:

$$\text{a) } X(z) = \frac{z}{z - \frac{3}{2}} \text{ với } |z| > \frac{3}{2} \quad \text{b) } X(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}} \text{ với } |z| > \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} \text{ với } |z| < \frac{3}{2} \quad \text{d) } X(z) = \frac{z}{z + \frac{3}{2}} \text{ với } |z| > \frac{3}{2}$$

### Bài 2.16

Cách biểu diễn nào sau đây thường được dùng để biểu diễn hàm truyền đạt  $H(Z)$  của hệ thống:

$$a) H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$b) H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$c) H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^r}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^k}$$

$$d) H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}}$$

### Bài 2.17

Cho tín hiệu  $x(n) = n a^n u(n)$  hãy cho biết trường hợp nào sau đây là biến đổi  $X(z)$  của nó:

$$a) \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \text{ với } |z| > |a|$$

$$b) \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \text{ với } |z| > |a|$$

$$c) \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \text{ với } |z| < |a|$$

$$d) \frac{az}{(1 - az^{-1})^2} \text{ với } |z| > |a|$$

### Bài 2.18

Phần tử  $Z^{-1}$  trong hệ thống rời rạc là phần tử:

a) phần tử trễ

b) phần tử tích phân

c) phần tử vi phân

c) phần tử nghịch đảo

### Bài 2.19

Hệ thống số đặc trưng bởi hàm truyền đạt  $H(z)$  sẽ ổn định nếu:

a) Tất cả các điểm không (Zero)  $z_{or}$  phân bố bên trong vòng tròn đơn vị.

b) Tất cả các điểm cực (Pole)  $z_{pk}$  của hệ thống phân bố bên trong vòng tròn đơn vị.

c) Tất cả các điểm cực (Pole)  $z_{pk}$  của hệ thống phân bố bên ngoài vòng tròn đơn vị.

d) Tất cả các điểm không (Zero)  $z_{or}$  phân bố bên ngoài vòng tròn đơn vị.

### Bài 2.20

Phương án nào sau đây thể hiện hàm truyền đạt của hệ thống biểu diễn theo dạng điểm cực và điểm không?

$$a) H(z) = G \cdot \frac{\sum_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\sum_{k=1}^N (z - z_{0k})}$$

$$b) H(z) = G \cdot \frac{\sum_{k=1}^N (z - z_{pk})}{\sum_{r=1}^M (z - z_{0r})}$$



$$c) H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$$

$$d) H(z) = G \cdot \frac{\prod_{r=0}^M (z - z_{0r})}{\prod_{k=0}^N (z - z_{pk})}$$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA

cuu duong than cong . com

## CHƯƠNG III: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

### GIỚI THIỆU

Bên cạnh biến đổi  $z$ , một công cụ toán học khác cũng rất quan trọng và hữu hiệu thường được dùng trong việc phân tích và tổng hợp các hệ thống tuyến tính bất biến, đó là *chuỗi và biến đổi Fourier*. Ở đây, tín hiệu được phân giải thành các thành phần hình sin (hoặc mũ phức). Do đó, ta nói tín hiệu được biểu diễn trong miền tần số.

Biểu diễn toán học cơ bản của tín hiệu tuần hoàn là chuỗi Fourier, là tổng trọng số tuyến tính của các hàm hình sin hoặc mũ phức. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), một nhà toán học người Pháp, đã dùng khai triển chuỗi lượng giác như thế để mô tả hiện tượng dẫn nhiệt và sự phân bố nhiệt độ của vật thể. Mặc dù công trình của ông chỉ là giải quyết bài toán dẫn nhiệt, nhưng phương pháp toán học được xây dựng vào nửa đầu thế kỷ thứ 19 này đến bây giờ vẫn được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như: quang, dao động cơ học, lý thuyết hệ thống và điện từ trường và đặc biệt trong xử lý tín hiệu.

Tương tự như việc phân tích phổ ánh sáng, trong việc phân tích tín hiệu ở miền tần số, thay cho ánh sáng, dạng tín hiệu của ta là các hàm theo thời gian. Vai trò của thấu kính chính là công cụ phân tích Fourier như chuỗi và biến đổi Fourier. Việc tổ hợp các thành phần hình sin để phục hồi tín hiệu ban đầu là bài toán tổng hợp Fourier. Giống như ánh sáng bức xạ của các nguyên tố hoá học, mỗi tín hiệu sẽ có phổ khác nhau. Như vậy phổ là sở cứ để nhận dạng tín hiệu.

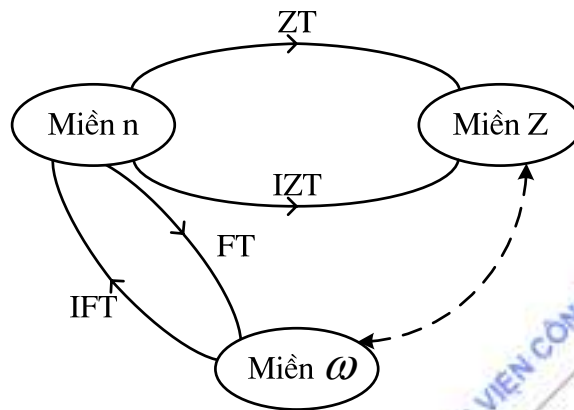
Cũng như trong vật lý, từ “phổ” được dùng khi muốn nói về nội dung tần số tín hiệu. Quá trình vận dụng công cụ toán học để có được phổ của tín hiệu đã cho trong chương này được gọi là *phân tích tần số hay phân tích phổ*. Ngược lại, quá trình xác định phổ của tín hiệu trong thực tế dựa trên các phép đo tín hiệu được gọi là *đánh giá phổ*. Sự phân biệt này là rất quan trọng. Trong bài toán thực tế, tín hiệu cần phân tích tự nó không được mô tả bằng một hàm toán học chính xác mà nó luôn luôn là dạng thể hiện một thông tin nào đấy mà từ đó ta tách ra tín tức thích hợp.

Kết quả phân tích *tín hiệu tuần hoàn* được gọi là *chuỗi Fourier*. Sự phân giải đối với *tín hiệu có năng lượng hữu hạn* được gọi là *biến đổi Fourier*. Việc phân giải này đóng vai trò quan trọng trong phân tích hệ thống tuyến tính bất biến vì đáp ứng của hệ này đối với tín hiệu hình sin cũng có dạng hình sin cùng tần số nhưng khác biên độ và pha. Hơn nữa, tính tuyến tính của hệ tuyến tính bất biến nói lên rằng tổng tuyến tính của các thành phần hình sin ở đầu vào sẽ sinh ra một tổng tuyến tính tương tự của các thành phần hình sin trên đầu ra, chỉ khác về biên độ và pha so với tín hiệu vào. Mặc dù có nhiều phương pháp phân tích khác nhau, nhưng chỉ có tín hiệu hình sin (hay mũ phức) là thoả mãn tính chất này khi đi qua một hệ tuyến tính bất biến.

Nội dung chương này được bắt đầu từ việc biểu diễn các tín hiệu tuần hoàn và không tuần hoàn liên tục theo thời gian dưới dạng chuỗi và biến đổi Fourier tương ứng. Kết quả của chương này là nền tảng cho việc nghiên cứu biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của một dãy hữu hạn, một biến

đôi có vai trò rất quan trọng trong nhiều ứng dụng khác nhau, đặc biệt là lĩnh vực xử lý tín hiệu số.

Sau đây ta sẽ quan sát các hình ảnh tương quan giữa các miền đã học: miền thời gian rời rạc  $n$ , miền  $z$  với miền tần số  $\omega$  như hình vẽ dưới đây



**Hình 3.1. Quan hệ giữa miền tần số  $\omega$  và các miền khác**

Việc ánh xạ tín hiệu từ miền thời gian rời rạc sang miền tần số  $\omega$  được thực hiện nhờ biến đổi Fourier và ngược lại, việc ánh xạ tín hiệu từ miền tần số  $\omega$  sang miền thời gian rời rạc được thực hiện nhờ biến đổi Fourier ngược.

Ký hiệu:

FT: Fourier Transform

IFT: Inverse Fourier Transform

Trong chương này chúng ta cũng thấy sự liên quan giữa biến đổi  $Z$  và biến đổi Fourier và việc chuyển đổi giữa chúng.

**Các nội dung chính được đề cập trong chương này bao gồm:**

- Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược, điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier.
- Các khái niệm về phổ, phổ biên độ, pha, phổ pha, mật độ phổ năng lượng(PSD)... của tín hiệu.
- Các khái niệm về đáp ứng tần số, pha tần số của hệ thống.
- Biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền tần số.
- Quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi  $z$ .
- Các bộ lọc số lý tưởng: Bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải, chắn dải.
- Các tiêu chuẩn của bộ lọc số thực tế.

## NỘI DUNG

### 3.1. BIẾN ĐỔI FOURIER

#### 3.1.1. Định nghĩa biến đổi Fourier (Fourier Transform: FT)

Biến đổi Fourier của một tín hiệu  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.1)$$

Ký hiệu toán tử:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

Ta thấy rằng  $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ : tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ , do vậy khi thể hiện  $X(e^{j\omega})$  ta chỉ cần thể hiện với dải từ 0 đến  $2\pi$  hoặc từ  $-\pi$  đến  $\pi$  rồi lấy tuần hoàn.

**Các cách thể hiện  $X(e^{j\omega})$**

+ **Biểu diễn theo phần thực phần ảo Re, Im**

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (3.2)$$

Đây là dạng biểu diễn quen thuộc của số phức.

+ **Biểu diễn theo Modul và Argument**

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]} \quad (3.3)$$

Ở đây:

$|X(e^{j\omega})|$ : Modul;

$\arg[X(e^{j\omega})]$ : Argument

(Tên gọi theo Newton)

Ta có một số khái niệm như sau:

-  $X(e^{j\omega})$ : Phổ của tín hiệu  $x(n)$ .

-  $|X(e^{j\omega})|$ : Phổ biên độ của tín hiệu  $x(n)$ .

-  $\arg[X(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$ : Phổ pha của tín hiệu  $x(n)$ .

-  $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$

+ **Biểu diễn theo độ lớn và pha**

Độ lớn có thể lấy giá trị âm và dương.

$$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)} \quad (3.4)$$

$A(e^{j\omega})$ : độ lớn của tín hiệu  $x(n)$ , có thể dương ( $>0$ ) hoặc âm ( $<0$ ).

$\theta(\omega)$ : pha của tín hiệu  $x(n)$ .

**Một số các quan hệ:**

$$|X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

khi  $\omega \geq 0$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) \quad \text{khi} \quad A(e^{j\omega}) \geq 0$$

$$\varphi(\omega) = \theta(\omega) + \pi \quad \text{khi} \quad A(e^{j\omega}) < 0$$

### Ví dụ 3.1

Cho phổ tín hiệu  $X(e^{j\omega}) = \sin 3\omega \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$ .

Hãy xác định:

- Các thành phần phần thực, ảo Re, Im
- $A(e^{j\omega})$ ,  $\theta(\omega)$ ,  $|X(e^{j\omega})|$ ,  $\varphi(\omega)$ .

**Giải:**

Từ biểu thức đã cho của đầu bài ta có:

$$\text{- Re}[X(e^{j\omega})] = \sin 3\omega \cdot \cos \frac{\omega}{2};$$

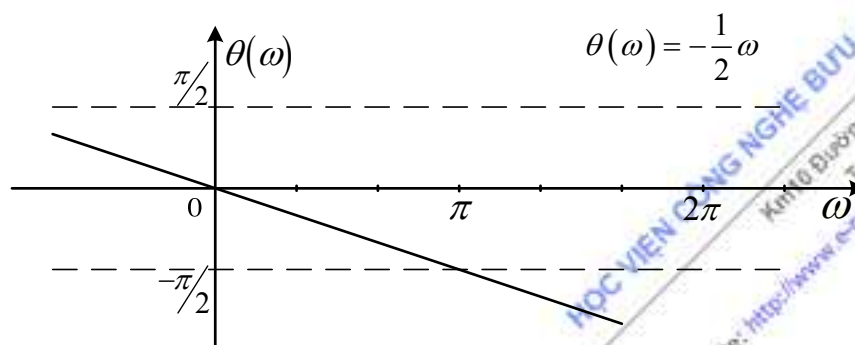
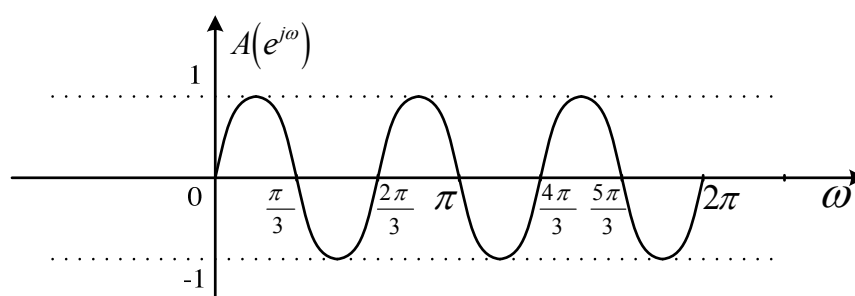
$$\text{- Im}[X(e^{j\omega})] = -\sin 3\omega \cdot \sin \frac{\omega}{2}$$

$$\text{- } A(e^{j\omega}) = \sin 3\omega;$$

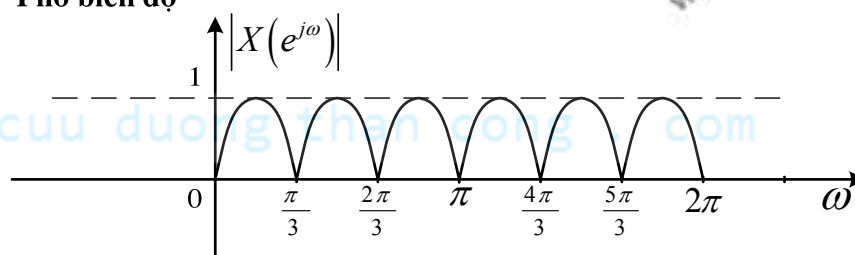
$$\text{- } \theta(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

$$\text{- } |X(e^{j\omega})| = |\sin 3\omega|$$

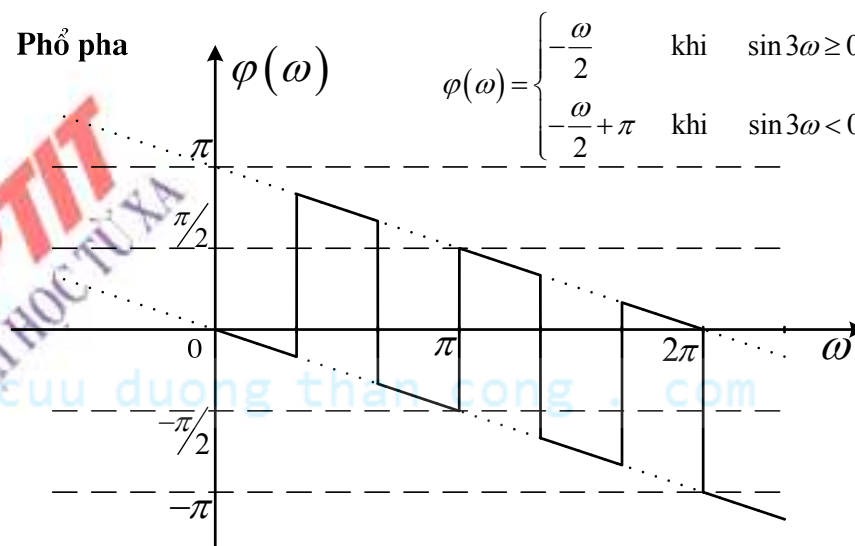
$$\text{- } \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega}{2} & \text{khi } \sin 3\omega \geq 0 \\ -\frac{\omega}{2} + \pi & \text{khi } \sin 3\omega < 0 \end{cases}$$



Phổ biên độ



Phổ pha



Hình 3.2. Biểu diễn độ lớn, pha, phổ biên độ, phổ pha của  $X(e^{j\omega}) = \sin 3\omega e^{-j\frac{\omega}{2}}$

Tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về biến đổi Fourier rời rạc thông qua các ví dụ sau:

**Ví dụ 3.2:** Hãy tìm biến đổi Fourier các dãy sau đây:



a.  $x_1(n) = \delta(n)$

b.  $x_2(n) = \delta(n-1)$

c.  $x_3(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$

d.  $x_4(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

e.  $x_5(n) = u(n)$

f.  $x_6(n) = 2^n u(n)$

**Giải:**

a.  $X_1(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_1(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=0} = 1$

b.  $X_2(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=1} = e^{-j\omega}$

c.  $X_3(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1) e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) e^{-jn\omega}$   
 $= 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=-1} + 1 \cdot e^{-j\omega n} \Big|_{n=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2 \cos \omega$

d.  $X_4(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_4(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$

vì  $\left| \frac{1}{2} e^{-j\omega} \right| = \frac{1}{2} < 1$

e.  $X_5(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_5(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$   
 $= 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} + \dots$

Đây là chuỗi lũy thừa, không hội tụ do  $|e^{-j\omega}| = |\cos\omega - j\sin\omega| = \sqrt{\cos^2\omega + \sin^2\omega} = 1$

(Ta nhớ rằng muốn chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  hội tụ thì  $|a| < 1$ )

Do vậy ta kết luận là không tồn tại biến đổi Fourier.

f.  $X_6(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_6(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n$

cũng với lý do như phần trên ta thấy rằng do:

$|2e^{-j\omega}| = |2\cos\omega - 2j\sin\omega| = \sqrt{4\cos^2\omega + 4\sin^2\omega} = 2$

Cho nên chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} (2e^{-j\omega})^n$  không hội tụ do vậy không tồn tại biến đổi Fourier.

Như vậy, thông qua các ví dụ trên chúng ta thấy rằng không phải đối với tín hiệu rời rạc  $x(n)$  nào cũng thực hiện được biến đổi Fourier, rõ ràng phải có một điều kiện để cho biến đổi Fourier tồn tại.

### 3.1.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier

Căn cứ vào các tính chất hội tụ của chuỗi và sự ánh xạ đầy đủ từ miền thời gian rời rạc  $n$  sang miền tần số  $\omega$  (tức là khi sang miền tần số  $\omega$ , chỉ tồn tại biến  $\omega$  chứ không tồn tại biến  $n$ ), ta có:

Biến đổi Fourier của một dãy  $x(n)$  sẽ tồn tại nếu và chỉ nếu:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

(Có nghĩa là chuỗi  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$  hội tụ).

### 3.1.3. Biến đổi Fourier ngược (IFT: Inverse Fourier Transform)

Biến đổi Fourier ngược của phổ tín hiệu  $X(e^{j\omega})$  được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.5)$$

Ký hiệu:

$$IFT[X(e^{j\omega})] = x(n)$$

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{IFT} x(n)$$

Ở đây biến đổi Fourier ngược giúp ta xác định được  $x(n)$  từ  $X(e^{j\omega})$ .

**Ví dụ 3.3:** Cho

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

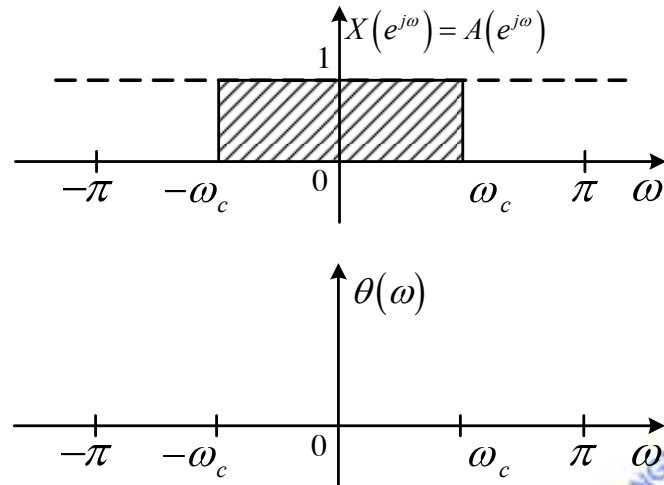
Hãy xác định  $x(n)$  và vẽ  $x(n)$  với  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

**Giải:**

Ta có:  $X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\theta(\omega)}$

Từ đây theo đầu bài ta suy ra:  $A(e^{j\omega}) = 1$

$$\theta(\omega) = 0$$



Theo định nghĩa biến đổi IFT (3.5) ta tính tích phân:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n$$

Khi  $n=0$   $x(n)$  có dạng  $\frac{0}{0}$  nên ta phải biến đổi tiếp thành dạng:

$$x(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

Vẽ với  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ; Thay vào ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n}$$

$$n = 0: \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

$$n = 1: \quad x(1) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} = x(-1)$$

$$n = 2: \quad x(2) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 2}{\frac{\pi}{2} \cdot 2} = 0 = x(-2)$$

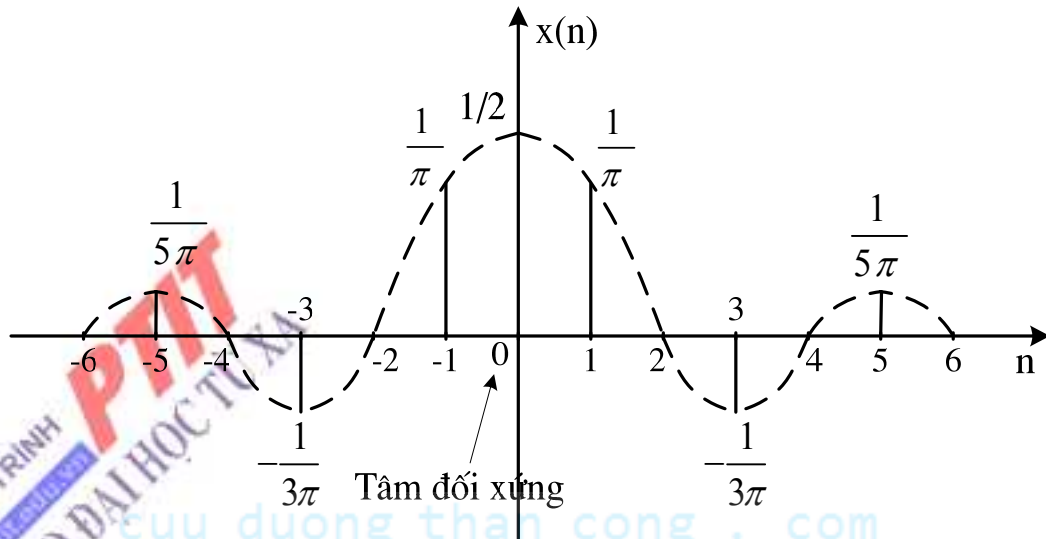
$$n = 3: \quad x(3) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 3}{\frac{\pi}{2} \cdot 3} = -\frac{1}{3\pi} = x(-3)$$

$$n = 4: \quad x(4) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 4}{\frac{\pi}{2} \cdot 4} = 0 = x(-4)$$

$$n = 5: \quad x(5) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 5}{\frac{\pi}{2} \cdot 5} = \frac{1}{5\pi} = x(-5)$$

$$n = 6: \quad x(6) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot 6}{\frac{\pi}{2} \cdot 6} = 0 = x(-6)$$

Đây chính là đáp ứng xung bộ lọc nửa băng tần, rất có lợi trên thực tế. Đặc điểm của bộ lọc này là tất cả những điểm chẵn đều bằng 0, lợi dụng tính chất này người ta thường chia thành 2 băng nên tốc độ tính toán và truyền đi nhanh.



Hình 3.3. Biểu diễn  $x(n]$  tìm được sau khi biến đổi IFT

Ở đây ta rút ra 3 nhận xét:

- Tín hiệu  $x(n]$  đối xứng qua trục tung; pha  $\theta(\omega)$  cũng đối xứng.
- $\theta(\omega) = 0$  (pha bằng không) dẫn đến tâm đối xứng nằm tại  $n = 0$  (gốc tọa độ).

- $x(n)$ : đối với tín hiệu thực có tính đối xứng vì phổ đối xứng (Đối xứng Helmitle).

### 3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

Các tính chất của biến đổi Fourier được tổng kết trong bảng sau:

**Bảng 3.1 Tính chất của biến đổi Fourier**

Miền $n$	Miền $\omega$
$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$
$ax_1(n) + bx_2(n)$ ; (a, b: hằng số)	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$x(n)$ là thực (tính chất đối xứng)	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$
	$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})]$
	$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})]$
	$ X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) $
	$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j(\omega-\omega')}) \cdot X_2(e^{j\omega'}) d\omega'$
$nx(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2} X[e^{j(\omega-\omega_0)}] + \frac{1}{2} X[e^{j(\omega+\omega_0)}]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot x_2^*(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2^*(e^{j\omega}) d\omega$
Quan hệ Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

**Ghi chú:**  $|X(e^{j\omega})|^2$ : phổ biên mật độ năng lượng tín hiệu  $x(n)$ , thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm mũ của tần số. Ký hiệu là  $S_{xx}(e^{j\omega})$ .

### 3.3. QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ta thấy, theo định nghĩa của biến đổi z :

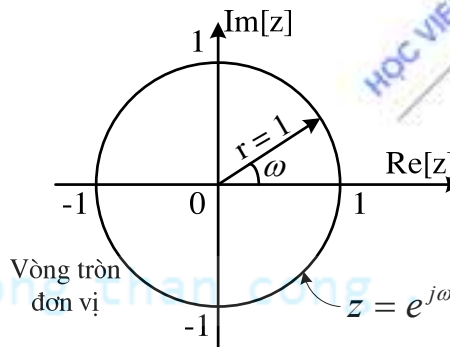
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Mặt khác z là một biến số phức và được biểu diễn trong mặt phẳng phức theo tọa độ cực như sau:

$$z = r \cdot e^{j\omega}$$

Nếu chúng ta đánh giá biến đổi Z trên vòng tròn đơn vị ( $r=1$ ), ta có:

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \quad (3.6)$$



Hình 3.4. Thực hiện biến đổi z trên vòng tròn đơn vị

Như vậy, ta rút ra một số nhận xét:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị.
- Như vậy, biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi z.
- Như vậy, chúng ta có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

#### Ví dụ 3.4

Hãy tìm biến đổi Fourier từ các biến đổi Z sau:

$$\text{a) } X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}; \quad |z| > \frac{1}{2} \quad \text{b) } X_2(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}; \quad |z| > 2$$

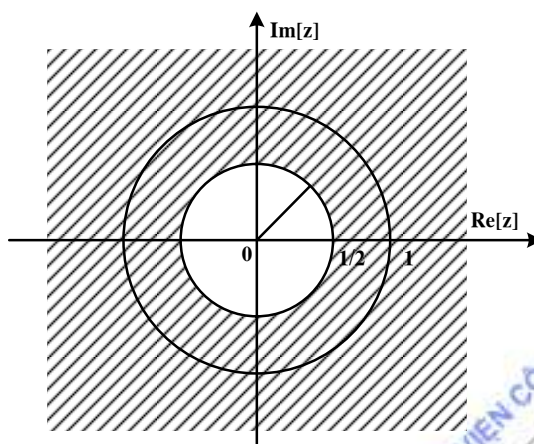
**Giải:**

Đầu tiên phải xem vòng tròn đơn vị có nằm trong miền hội tụ không.

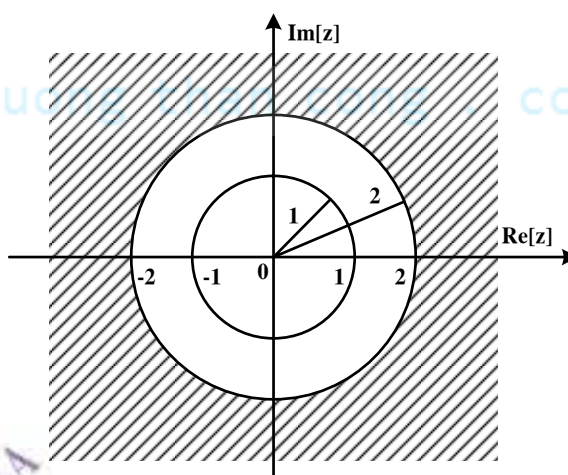
- a) Vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ, ta viết được biến đổi Fourier



$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$



b) Vòng tròn đơn vị không nằm trong miền hội tụ, nên ta không thực hiện được biến đổi Fourier.

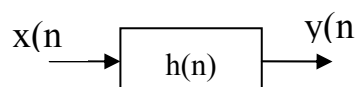


### 3.4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

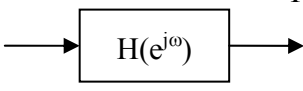
#### 3.4.1. Đáp ứng tần số

Trong miền thời gian rời rạc  $n$  ta có đặc trưng cho hệ thống là đáp ứng xung và quan hệ vào ra của hệ thống được thể hiện bởi phép chập:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$



Trong miền tần số  $\omega$  ta thấy rằng:

$$\begin{aligned} x(n) &\xrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \\ y(n) &\xrightarrow{FT} Y(e^{j\omega}) \\ h(n) &\xrightarrow{FT} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$


Quan hệ vào ra của hệ thống trong miền  $\omega$  được thể hiện bằng phép nhân như sau:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \text{ hay:}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (3.7)$$

Ở đây  $H(e^{j\omega})$  được gọi là **đáp ứng tần số** và nó chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung  $h(n)$  hay còn được xác định bằng tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

Đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền tần số  $\omega$

**Các cách thể hiện  $H(e^{j\omega})$ :**

+ Biểu diễn theo phần thực và phần ảo  $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$ :

$$H(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j \text{Im}[H(e^{j\omega})] \quad (3.8)$$

+ Biểu diễn theo Modul và Argument:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} \quad (3.9)$$

$|H(e^{j\omega})|$ : Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\arg[H(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$ : Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \quad (3.10)$$

### 3.4.2. Các bộ lọc số lý tưởng

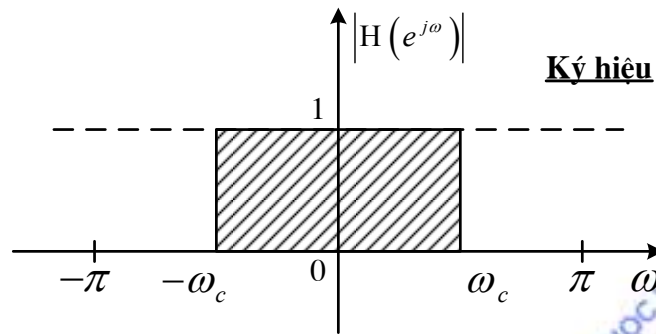
Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu các bộ lọc số lý tưởng: thông thấp, thông cao, thông dải, chặn dải, đây là những nội dung quan trọng làm tiền đề cho việc tổng hợp các bộ lọc số trên

thực tế sẽ học ở các chương sau. Việc định nghĩa các bộ lọc số lý tưởng sẽ dựa vào đáp ứng biên độ tần số  $|H(e^{j\omega})|$  mà không cần quan tâm đến pha.

### a. Bộ lọc thông thấp lý tưởng (Low pass Filter)

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:



**Ký hiệu**

$\omega_c$  : Tần số cắt

: Dải thông

: Dải chặn

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (3.11)$$

Sau đây ta sẽ xác định đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc thông thấp pha 0.

#### Ví dụ 3.5

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không ( $\theta(\omega) = 0$ ):

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Hãy tìm  $h(n)$  và vẽ  $h(n)$  với  $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ .

**Giải:**

Ta thấy rằng  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$  đây là bộ lọc pha 0 ( tức  $\theta(\omega) = 0$  )

Sử dụng biến đổi Fourier ngược (3.5) ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_c n$$

Dạng  $\frac{0}{0}$  nên biến đổi tiếp thành dạng:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

Vẽ với  $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ , ta có: 
$$h(n) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n}$$

n = 0: 
$$h(0) = \frac{1}{3}$$

n = 1: 
$$h(1) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = h(-1)$$

n = 2: 
$$h(2) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 2}{\frac{\pi}{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = h(-2)$$

n = 3: 
$$h(3) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 3}{\frac{\pi}{3} \cdot 3} = 0 = h(-3)$$

n = 4: 
$$h(4) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 4}{\frac{\pi}{3} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} = h(-4)$$

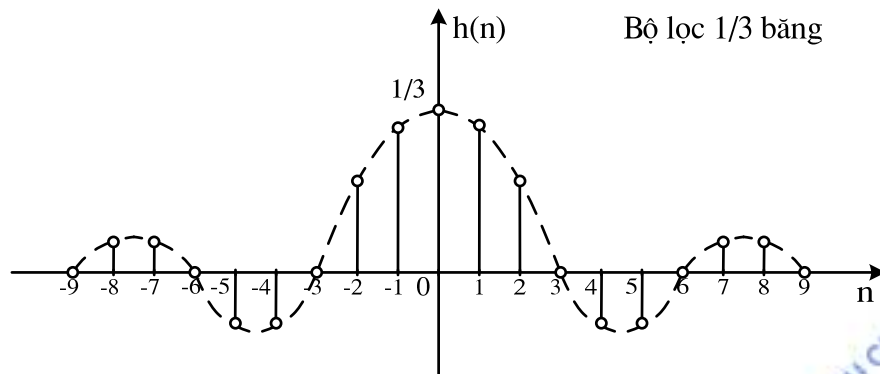
n = 5: 
$$h(5) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 5}{\frac{\pi}{3} \cdot 5} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi} = h(-5)$$

n = 6: 
$$h(6) = \frac{1}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot 6}{\frac{\pi}{3} \cdot 6} = 0 = h(-6)$$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)



**Nhận xét:**

Tất cả các bộ lọc có tần số cắt  $\omega_c = \frac{\pi}{M}$  (M: nguyên dương) gọi là bộ lọc Nyquist vì tại các điểm là bội của M các mẫu đều bằng 0.

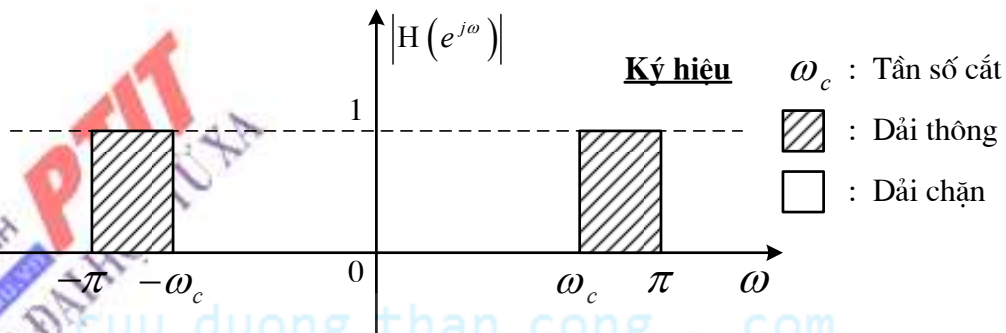
Nhưng bộ lọc này không thực hiện được trên thực tế vì đáp ứng xung  $h(n)$  không nhân quả và có chiều dài vô hạn.

Khi thiết kế bộ lọc số thực tế, người ta phải rời đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số lý tưởng theo tâm đối xứng sang bên phải sau đó cắt đi phần âm (phần không nhân quả) để  $h(n)$  lúc này thành nhân quả và có chiều dài hữu hạn. Lưu ý khi cắt đi sẽ gây hiện tượng gợn sóng trong miền tần số, gây nên hiện tượng Gibbs.

### b. Bộ lọc thông cao lý tưởng (High pass Filter)

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:



$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (3.12)$$

**Ví dụ 3.6:**

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases}$$

Hãy tìm  $h(n)$  và vẽ  $h(n)$  với  $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ .

**Giải:**

Áp dụng (3.5):

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\sin \pi n}{\pi n}} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_c \sin \omega_c n}{\pi \omega_c n}}$$

Ta thấy:

$$\frac{\sin \pi n}{\pi n} = \delta(n) \text{ vì giá trị tại } n=0 \text{ thì bằng } 1, \text{ còn với các giá trị } n \text{ khác thì bằng } 0.$$

Do vậy ta xác định được

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n},$$

Ở đây,  $\delta(n)$  là đáp ứng xung của bộ lọc thông tắt pha 0 (ví dụ như một dây dẫn tín hiệu) vì chúng cho tất cả các tín hiệu đi qua với mọi tần số. Lưu ý rằng  $\delta(n)$  chập với một tín hiệu nào thì cũng chính bằng tín hiệu đó.  $\delta(n) * x(n) = x(n)$ .

Như vậy ta thấy rằng, đáp ứng xung của bộ lọc thông cao lý tưởng pha không bằng đáp ứng xung của bộ lọc thông tắt trừ đi đáp ứng xung bộ lọc thông thấp với điều kiện pha không.

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{x(n)} & \boxed{h(n) = \delta(n)} & \xrightarrow{y(n) = x(n) * h(n)} \\ & & = x(n) * \delta(n) = x(n) \end{array}$$

$$h_{Hp}(n) = h_{Ap}(n) - h_{Lp}(n)$$

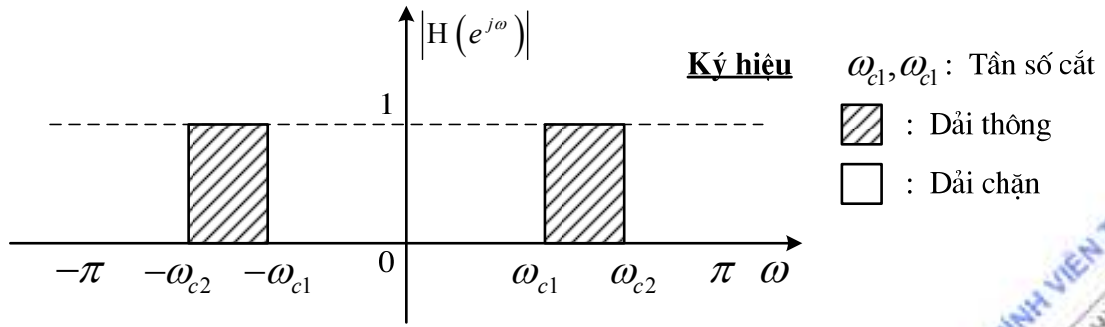
High pass = All pass – Low pass (Thông cao = Thông tắt – Thông thấp).

### c. Bộ lọc thông dải lý tưởng (Band pass Filter)

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau:





$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases}, \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (3.13)$$

### Ví dụ 3.7:

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases}, \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Hãy xác định  $h(n)$ .

**Giải:**

Ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n}} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega}_{\frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}}$$

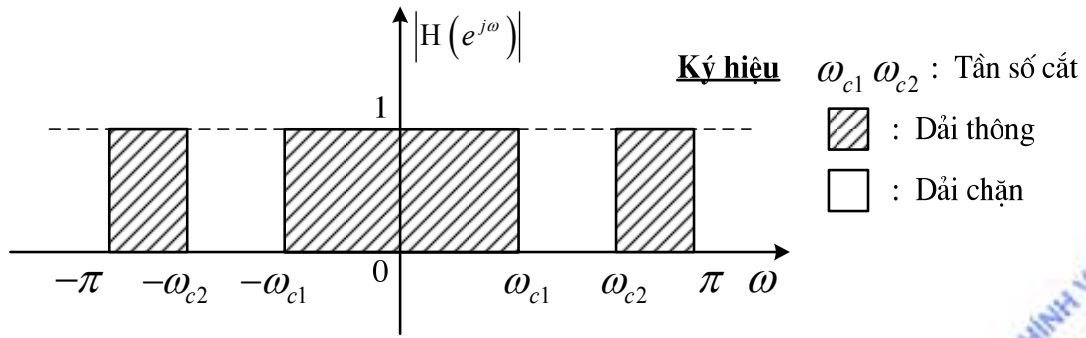
$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

Ta thấy  $h_{BP}(n) = h_{AP}(n) - h_{LP}(n) - h_{HP}(n)$

### d. Bộ lọc chắn dải lý tưởng (Band stop Filter)

**Định nghĩa:**

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:



$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi ; \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (3.14)$$

### Ví dụ 3.8:

Cho:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases}, \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

Tìm  $h(n)$ . Vẽ  $h(n)$  với  $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ .

**Giải:**

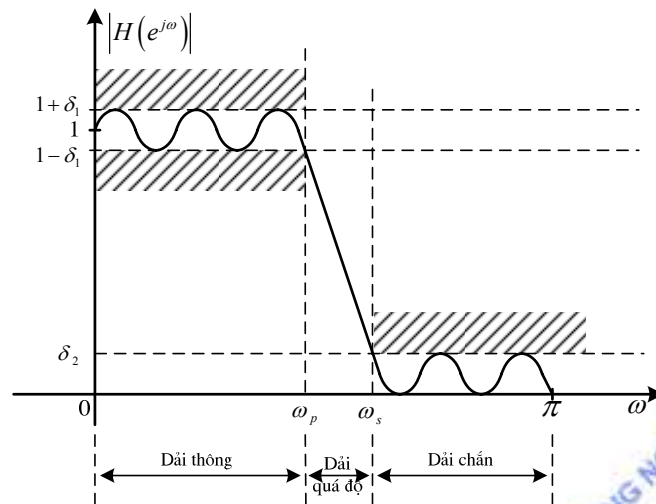
Áp dụng các kết quả đã tính của các bộ lọc lý tưởng trên đây, ta có:

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

Ta thấy  $h_{BS}(n) = h_{LP}(n) + h_{HP}(n)$

### 3.4.3. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế được thể hiện trong hình vẽ sau, ta lưu ý ở đây ta lấy bộ lọc số thông thấp làm ví dụ (các bộ lọc khác cũng tương tự) và thể hiện đáp ứng biên độ của nó trong dải từ 0 đến  $\pi$ , dải từ  $-\pi$  đến 0 lấy đối xứng tương tự sang.



Hình 3.5. Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế thông thấp và các tham số

Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

- + Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$
- + Độ gợn sóng dải thông  $\delta_1$
- + Tần số giới hạn dải thông  $\omega_s$
- + Độ gợn sóng dải thông  $\delta_2$

Về mặt lý tưởng các độ gợn sóng dải thông, dải chắn càng nhỏ càng tốt, tần số giới hạn dải thông và dải chắn càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt. Tuy nhiên trên thực tế đây là các tham số nghịch nhau (độ gợn sóng nhỏ thì dải quá độ phải lớn và ngược lại) nên việc giải quyết bài toán cho các tham số cùng nhỏ gặp nhiều khó khăn, ta phải áp dụng tính tối ưu với từng yêu cầu cụ thể của bài toán thiết kế bộ lọc.

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng ta đã xem xét việc phân tích và xử lý tín hiệu rời rạc trong một miền mới khác với hai chương đã học ở trên đó là miền tần số. Ta thấy rằng các thao tác trong miền này tập trung vào việc khảo sát tần số, phổ của tín hiệu, đây là tiền đề quan trọng cho các phương thức truyền dẫn, điều chế trong viễn thông.

Việc ánh xạ tín hiệu từ miền thời gian rời rạc  $n$  sang miền tần số liên tục  $\omega$  được thực hiện thông qua biến đổi Fourier. Ta cũng nhận thấy rằng biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi  $z$ , do vậy các tính chất của biến đổi Fourier cũng tương tự như biến đổi  $z$ , ví dụ như phép chập trong miền thời gian rời rạc  $n$  trở thành phép nhân trong miền tần số  $\omega$ .

Trong chương này, ngoài việc chúng ta phải hiểu rõ về biến đổi Fourier xuôi và ngược, cần phân biệt được các khái niệm về phổ, phổ biên độ, pha, phổ pha...các đặc tính của bộ lọc số lý tưởng.

Các nội dung kiến thức cần nhớ trong chương này sẽ được đề cập sau đây.

### 1. Biến đổi Fourier – FT

Định nghĩa:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

## 2. Điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier

Một dãy  $x(n)$  thực hiện được biến đổi Fourier nếu và chỉ nếu:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

## 3. Các khái niệm, ký hiệu về tín hiệu trong miền tần số liên tục

- $X(e^{j\omega})$ : Phổ của tín hiệu  $x(n)$ .
- $|X(e^{j\omega})|$ : Phổ biên độ của tín hiệu  $x(n)$ .
- $\arg[X(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$ : Phổ pha của tín hiệu  $x(n)$ .
- $A(e^{j\omega})$ : Độ lớn của tín hiệu  $x(n)$ .
- $\theta(\omega)$ : Pha của tín hiệu  $x(n)$ .

Các quan hệ cần nhớ:

- +  $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$
- +  $X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$
- +  $A(e^{j\omega})$  có thể dương ( $>0$ ) âm ( $<0$ ) hoặc bằng 0.
- +  $|X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$

Với  $\omega \geq 0$

- +  $\varphi(\omega) = \theta(\omega)$  khi  $A(e^{j\omega}) \geq 0$
- +  $\varphi(\omega) = \theta(\omega) + \pi$  khi  $A(e^{j\omega}) < 0$

## 4. Biến đổi Fourier ngược - IFT

Định nghĩa:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

## 5. Tính chất của biến đổi Fourier

Ở đây, ta sẽ chú ý một số tính chất:

- Phép chập trong miền thời gian rời rạc sẽ trở thành phép nhân:

$$x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

- Trễ tín hiệu:

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- Trễ tần số:

$$e^{j\omega_0 n} x(n) \Leftrightarrow X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$$

- Quan hệ Parseval: thể hiện sự bảo toàn về mặt năng lượng khi chuyển từ miền thời gian sang miền tần số.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

## 6. Đáp ứng tần số

Đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  của hệ thống trong miền tần số liên tục được xây dựng theo hai cách:

- Đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  của hệ thống là tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.

- Đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  là biến đổi Fourier của đáp ứng xung  $h(n)$ .

Đáp ứng tần số của hệ thống được thể hiện như sau:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

trong đó:

$|H(e^{j\omega})|$ : Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})]$ : Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).

hay Độ lớn và pha:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$$

## 7. Các bộ lọc số lý tưởng

Trong phần này, chúng ta phải nắm được bốn bộ lọc số lý tưởng thông qua các đáp ứng biên độ của chúng.

Bộ lọc thông thấp:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc thông cao:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \\ 0 & \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc thông dải:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\omega_{c2} \leq \omega \leq -\omega_{c1} \\ 0 & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Bộ lọc chắn dải:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_{c2} \\ 1 & -\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ 0 & \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \neq \end{cases} \quad (-\pi \leq \omega_c \leq \pi)$$

Một số vấn đề của bộ lọc số lý tưởng cần lưu ý:

- Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số lý tưởng có chiều dài vô hạn, và đáp ứng xung này là không nhân quả. Do vậy các bộ lọc số lý tưởng này không thực hiện được trong thực tế.
- Đối với bộ lọc số lý tưởng pha 0 ta có đáp ứng biên độ trùng với đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$$

- Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số lý tưởng pha 0 đối xứng qua trục tung, đối xứng Helmitte.

- Các đáp ứng xung  $h(n)$  của các bộ lọc số lý tưởng pha 0 có quan hệ như sau:

$$\begin{aligned} + h_{HP}(n) &= h_{AP}(n) - h_{LP}(n) \\ + h_{BP}(n) &= h_{AP}(n) - h_{LP}(n) - h_{HP}(n) \\ + h_{BS}(n) &= h_{LP}(n) + h_{HP}(n) \end{aligned}$$

### 8. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số

Chúng ta phải nắm vững các thông số chỉ tiêu của bộ lọc số thực tế:

- + Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$
- + Độ gợn sóng dải thông  $\delta_1$
- + Tần số giới hạn dải thông  $\omega_s$
- + Độ gợn sóng dải thông  $\delta_2$

Việc nắm vững những kiến thức trong chương này rất cần thiết để tiếp cận các nội dung kiến thức tiếp theo như:

- Biến đổi Fourier rời rạc DFT. Đây là một trong những biến đổi quan trọng nhất của xử lý tín hiệu số.
- Tổng hợp các bộ lọc số FIR, IIR.



Một số kiến thức toán học cần thiết để nghiên cứu học tập trong chương này.

+ Tích phân thông dụng để tính IFT:

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$$

+ Tổng cấp số nhân:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

+ Khai triển Ole:

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

$$e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$$

+ Một số khai triển thông thường:

$$1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} \cdot (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = 2j \cdot \sin(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2}$$

$$1 + e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2} \cdot (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) = 2\cos(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2}$$

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3

### Bài 3.1

Xác định biến đổi Fourier của tín hiệu

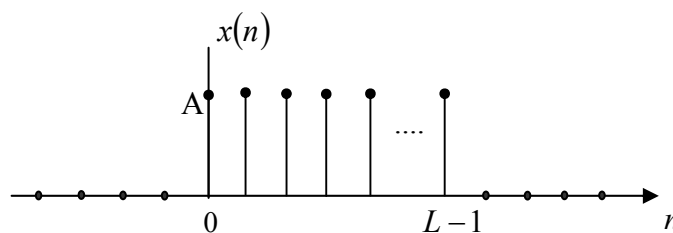
$$x(n) = a^{|n|} \quad -1 < a < 1$$

### Bài 3.2

Tìm biến đổi Fourier và phổ biên độ của dãy

$$x(n) = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

với minh họa như hình sau



### Bài 3.3

Hãy tính phép chập các dãy  $x_1(n) * x_2(n)$  với

$$x_1(n) = x_2(n) = \left\{ 1, \frac{1}{0}, 1 \right\}$$

thông qua biến đổi Fourier.

#### Bài 3.4

Xác định mật độ phổ năng lượng  $S_{xx}(e^{j\omega})$  của tín hiệu

$$x(n) = a^n u(n) \quad -1 < a < 1$$

#### Bài 3.5

Cho  $x(n) = a^n u(n)$  với  $a = 0.5$  và  $a = -0.5$ . Hãy biểu diễn mật độ phổ năng lượng  $S_{xx}(e^{j\omega})$

#### Bài 3.6

Cho tín hiệu  $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$ . Phổ của tín hiệu sẽ là đáp án nào sau đây:

a) Không tồn tại.

$$b) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

$$c) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{j\omega}}$$

$$d) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

#### Bài 3.7

Cho tín hiệu  $x(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n u(n)$ . Phổ của tín hiệu sẽ là đáp án nào sau đây:

a) Không tồn tại.

$$b) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}e^{-j\omega}}$$

$$c) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}e^{j\omega}}$$

$$d) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}e^{-j\omega}}$$

#### Bài 3.8

Thành phần tương ứng của  $x(n - k)$  khi chuyển sang miền tần số  $\omega$  sẽ là:

$$a) e^{j\omega k} X(e^{j\omega})$$

$$b) e^{j\omega k} X(e^{-j\omega})$$

c)  $e^{-j\omega k} X(e^{-j\omega})$

d)  $e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

### Bài 3.9

Thành phần tương ứng của  $x(n)\cos \omega_0 n$  khi chuyển sang miền tần số  $\omega$  sẽ là:

a)  $\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$

b)  $\frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$

c)  $\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$

d)  $\frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) - \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$

### Bài 3.10

Thành phần tương ứng của  $e^{j\omega_0 n} x(n)$  khi chuyển sang miền tần số  $\omega$  sẽ là:

a)  $X(e^{j(\omega + \omega_0)})$

b)  $X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

c)  $e^{j\omega_0} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

d)  $e^{j\omega_0} X(e^{j(\omega + \omega_0)})$

### Bài 3.11

Khi nào pha của bộ lọc số lý tưởng bằng 0 thì quan hệ giữa đáp ứng tần số và đáp ứng biên độ tần số sẽ là:

a)  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|$

b)  $H(e^{j\omega}) = -|H(e^{j\omega})|$

c)  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\omega}$

d)  $H(e^{j\omega}) = -|H(e^{j\omega})| e^{j\omega}$

### Bài 3.12

Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha 0 được biểu diễn ở dạng nào sau đây:

a)  $h(n) = -\frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$

b)  $h(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$

c)  $h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$

d)  $h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{n}$

### Bài 3.13

Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số thông cao lý tưởng pha 0 được biểu diễn ở dạng nào sau đây:

a)  $h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$

b)  $h(n) = \delta(n) - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$

c)  $h(n) = \delta(n) + \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$

d)  $h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{n}$

### Bài 3.14

Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha 0 với tần số cắt  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$  được biểu diễn ở dạng nào sau đây:

$$a) h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$b) h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$c) h(n) = -\frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$d) h(n) = \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n} - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n}$$

### Bài 3.15

Đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số chặn dải lý tưởng pha 0 với tần số cắt  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$  được biểu diễn ở dạng nào sau đây:

$$a) h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n} + \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n}$$

$$b) h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$c) h(n) = \delta(n) + \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

$$d) h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c2} n}{\omega_{c2} n} + \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c1} n}{\omega_{c1} n}$$

### Bài 3.16

Chất lượng bộ lọc số tốt khi:

a) + Độ gọn sóng dải thông  $\delta_1$ , dải chặn  $\delta_2$  đều nhỏ.

+ Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$ , tần số giới hạn dải chặn  $\omega_s$  cách xa nhau (nghĩa là dải quá độ lớn).

b) + Độ gọn sóng dải thông  $\delta_1$ , dải chặn  $\delta_2$  lớn.

+ Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$ , tần số giới hạn dải chặn  $\omega_s$  gần nhau (nghĩa là dải quá độ nhỏ).

c) + Độ gọn sóng dải thông  $\delta_1$ , dải chặn  $\delta_2$  đều nhỏ.

+ Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$ , tần số giới hạn dải chặn  $\omega_s$  gần nhau (nghĩa là dải quá độ nhỏ).

d) + Độ gọn sóng dải thông  $\delta_1$ , dải chặn  $\delta_2$  đều lớn.

+ Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$ , tần số giới hạn dải chắn  $\omega_s$  cách xa nhau (nghĩa là dải quá độ lớn).

### Bài 3.17

Những câu trả lời nào sau đây là đúng:

- a) Biến đổi Fourier là trường hợp riêng của biến đổi Z
- b) Biến đổi Z là trường hợp riêng của biến đổi Fourier
- c) Biến đổi Fourier là biến đổi Z thực hiện trên vòng tròn đơn vị
- d) Biến đổi Fourier hoàn toàn độc lập với biến đổi Z.

### Bài 3.18

Các tín hiệu trong miền tần số  $\omega$  có tính chất:

- a) Tuần hoàn với chu kỳ là  $\pi$
- b) Tuần hoàn với chu kỳ là  $2\pi$
- c) Không phải là tín hiệu tuần hoàn
- d) Tuần hoàn khi  $\omega \geq 0$ .

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhx@e-ptit.edu.vn](mailto:dhx@e-ptit.edu.vn)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)

CHƯƠNG TRÌNH  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA  
PTIT  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)

## CHƯƠNG IV: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC $k$ (HOẶC $\omega_k$ )

### GIỚI THIỆU

Trong bốn miền biểu diễn tín hiệu & hệ thống rời rạc hay dùng, chúng ta đã xét cả 3 miền: miền thời gian rời rạc  $n$ , miền  $z$ , miền tần số  $\omega$  thông qua các biến đổi  $z$  hay biến đổi Fourier. Trong chương này, ta tập trung nghiên cứu đến biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ  $N$  và từ đó xây dựng biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy không tuần hoàn bất kỳ có chiều dài hữu hạn  $N$  tức là chúng ta sẽ nghiên cứu tín hiệu và hệ thống trong miền tần số rời rạc  $k$ . Một trong những vấn đề chính của chương này là biến đổi Fourier rời rạc với những ưu điểm nổi bật của nó trong việc xử lý tín hiệu rời rạc.

#### Các nội dung chính của chương bao gồm:

- Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ  $N$ .
- Biến đổi Fourier rời rạc DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn  $N$ .
- Tính phép chập tuyến tính bằng phép chập vòng thông qua biến đổi DFT.
- Phép chập nhanh.

### NỘI DUNG

#### 4.1. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DÃY TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ $N$ .

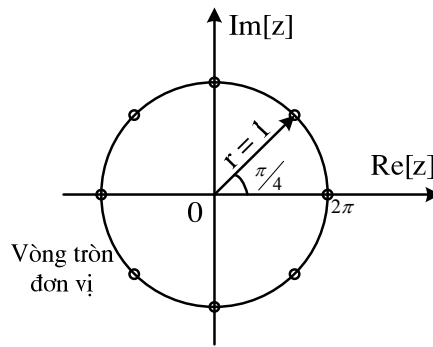
Ta đã biết rằng biến đổi Fourier vừa xét ở chương 3 là một trường hợp riêng của biến đổi  $z$  hay nói cách khác biến đổi Fourier chính là biến đổi  $z$  được thực hiện trên vòng tròn đơn vị. Nhưng đối với một dãy tuần hoàn bất kỳ với chu kỳ  $N$   $\tilde{x}(n)_N$ , ta thấy không cần thiết phải thực hiện biến đổi Fourier liên tục mà chỉ cần lợi dụng tính chất tuần hoàn của  $\tilde{x}(n)_N$  với chu kỳ  $N$  và tính tuần hoàn của biến  $e^{j\omega}$  chu kỳ  $2\pi$ , nghĩa là chỉ cần lấy các điểm đặc biệt  $\frac{2\pi}{N}$  trên đường tròn đơn vị tương ứng với chu kỳ  $N$  của tín hiệu tuần hoàn  $\tilde{x}(n)_N$ .

#### Ví dụ:

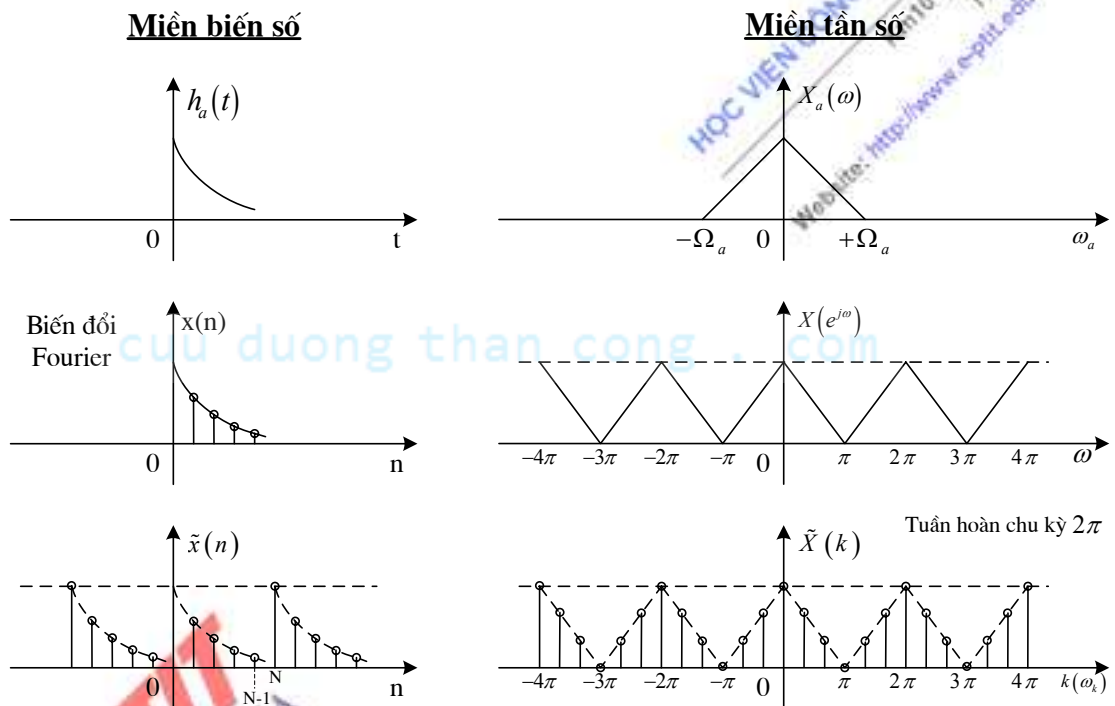
Chia 8 phần:

$$\text{Thay } \omega_k = \frac{2\pi}{N}k, N=8 \rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{8}k = \frac{\pi}{4}k, k=0 \div N.$$



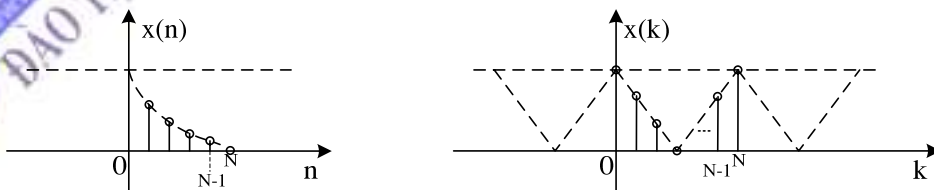


Khái quát hóa ta sẽ so sánh các dạng phổ của các dạng tín hiệu khác nhau trên hai miền: miền biến số thời gian liên tục và miền tần số..



Hình 4.1 Các dạng phổ của các dạng tín hiệu khác nhau

Khi biến đổi DFT đối với tín hiệu tuần hoàn, đúng ra là ta phải xét từ  $-\infty$  đến  $\infty$  nhưng trên thực tế, khi biến đổi thường nghiên cứu trong một chu kỳ từ 0 đến  $N-1$  để xét cho dễ, các chu kỳ khác coi bằng 0 vì theo tính chất tuần hoàn.



Hình 4.2 Tín hiệu rời rạc và phổ rời rạc tuần hoàn của nó

#### 4.1.1. Định nghĩa

Biến đổi Fourier rời rạc của một dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)$  có chu kỳ  $N$  được định nghĩa như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\omega_k n} \quad (4.1)$$

Trong đó:  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$  với  $\begin{cases} k = 0 \div N-1 \\ n = 0 \div N-1 \end{cases}$

$\tilde{x}(n)$  là dãy tuần hoàn chu kỳ  $N$  nên nó thỏa mãn:  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + lN)$

Đặt:  $W_N^{kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$  (4.2)

$$W_N^{-kn} = e^{-j\omega_k n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}; W_N^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}; W_N^0 = 1$$

Theo cách đặt như trên thì biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn chu kỳ  $N$  được viết lại như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn} \quad (4.3)$$

Để biểu diễn cho gọn người ta thường biểu diễn theo (4.3)

Ký hiệu toán tử:

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$$

#### Ví dụ 4.1

Cho dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases} \quad \text{chu kỳ } N = 10.$$

Hãy xác định  $\tilde{X}(k)$

**Giải:**

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^9 \tilde{x}(n) \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^4 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}, \text{ áp dụng công thức định nghĩa}$$

$$\tilde{X}(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k \cdot 5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k \cdot 5}}, (n + 1 = 4 + 1 = 5).$$

Biến đổi phần thực và ảo ta được

$$\tilde{X}(k) = \frac{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{2j \sin \frac{\pi k}{10} e^{-j\frac{\pi}{10}k}} = \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\sin \frac{\pi k}{10}} e^{-j\frac{\pi}{10}k} = A(k) e^{j\theta(k)} = |\tilde{X}(k)| e^{j\varphi(k)}, k = 0 \div 9$$

**Lưu ý:** Khi tính toán ta chỉ cần xác định với k chạy từ 0 đến 9, các chu kỳ khác lặp lại.

#### 4.1.2. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT đối với dãy tuần hoàn.

Biến đổi Fourier rời rạc ngược IDFT được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.4)$$

Hay viết lại cho gọn:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (4.5)$$

Ký hiệu:  $\text{IDFT}[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$

Toán tử:  $\tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} \tilde{x}(n)$

**Lưu ý:** Cách tính IDFT hoàn toàn giống DFT chỉ khác dấu  $(-)$ ,  $(+)$  và hệ số  $1/N$  trước dấu  $\Sigma$ . Vì vậy ta chỉ cần xét DFT rồi suy ra biến đổi IDFT. Về mặt thuật toán là như nhau.

#### 4.1.3. Biểu diễn DFT dưới dạng ma trận

Xuất phát từ biểu thức (4.3)

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

Ta khai triển:

$$k=0: \quad \tilde{X}(0) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^0 + \tilde{x}(2)W_N^0 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^0$$

$$k=1: \quad \tilde{X}(1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^1 + \tilde{x}(2)W_N^2 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)}$$

$$k=2: \quad \tilde{X}(2) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^2 + \tilde{x}(2)W_N^4 + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{2(N-1)}$$

.....

$$k=N-1: \quad \tilde{X}(N-1) = \tilde{x}(0)W_N^0 + \tilde{x}(1)W_N^{N-1} + \tilde{x}(2)W_N^{2(N-1)} + \dots + \tilde{x}(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)}$$

Ta ký hiệu:

$$\tilde{X}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \tilde{x}(2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$W_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ta có thể viết lại cho gọn dạng biểu diễn theo ma trận như sau:

$$\tilde{X}(k) = \tilde{x}(n).W_N \quad (4.8)$$

## 4.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DÃY TUẦN HOÀN CHU KỲ $N$ .

Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc sẽ được tóm tắt trong bảng tổng kết 4.1, ở đây ta tập trung xem xét khái niệm về phép chập tuần hoàn.

### Phép chập tuần hoàn

Ta thấy rằng tích chập tuyến tính đã học trong chương 1 được biểu diễn dưới dạng:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) \quad (4.9)$$

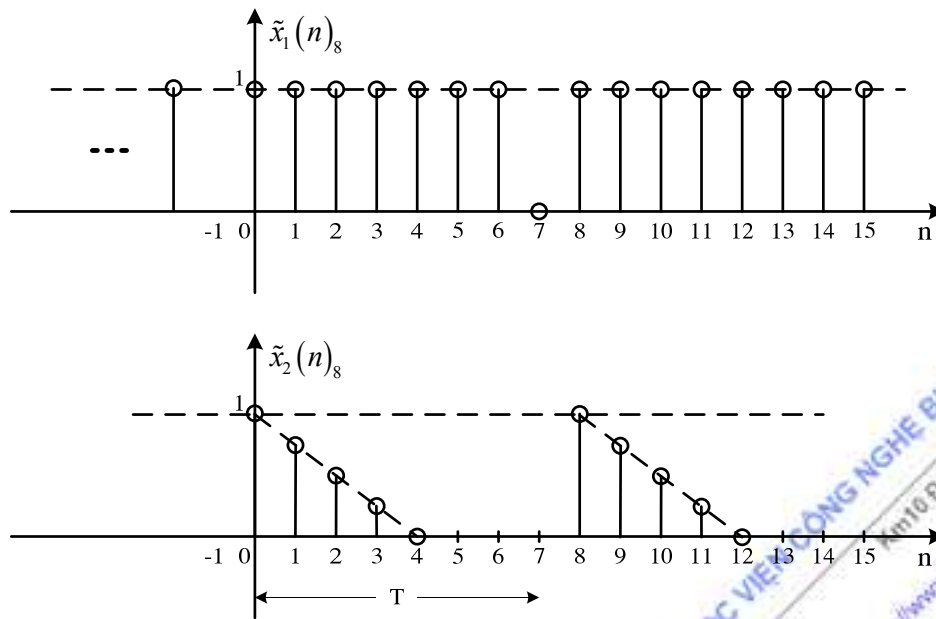
Tích chập tuần hoàn (lấy cùng một chu kỳ) được biểu diễn như sau:

$$\tilde{x}_3(n)_N = \tilde{x}_1(n)_N \left( \tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)_N \tilde{x}_2(n-m)_N \quad (4.10)$$

Ta sẽ tìm hiểu cụ thể về phép chập tuần hoàn thông qua ví dụ 4.2 như sau.

### Ví dụ 4.2

Tính phép chập của 2 dãy tuần hoàn  $\tilde{x}_1(n)_8$  và  $\tilde{x}_2(n)_8$  (có chu kỳ 8) đã cho trong hình 4.3 như sau:



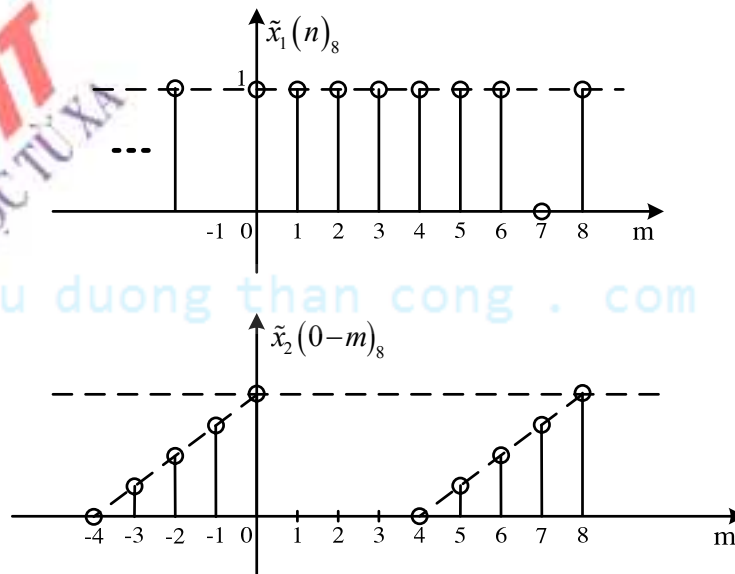
Hình 4.3 Biểu diễn  $\tilde{x}_1(n)_8$  và  $\tilde{x}_2(n)_8$  trong ví dụ 4.2

**Giải:**

Theo công thức ta có:

$$\tilde{x}_3(n)_8 = \tilde{x}_1(n)_8 \left( \tilde{*} \right)_8 \tilde{x}_2(n)_8 = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)_8 \tilde{x}_2(0-m)_8$$

Thực hiện các bước tính phép chập bằng đồ thị giống như chương 1, giữ nguyên  $\tilde{x}_1(n)_8$  và lấy đối xứng  $\tilde{x}_2(n)_8$  ta có:



Hình 4.4 Biểu diễn cách tính phép chập tuần hoàn bằng đồ thị

$$\tilde{x}_3(0)_8 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1,75$$

$$\tilde{x}_3(1)_8 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

$$\tilde{x}_3(2)_8 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = 2,25$$

$$\tilde{x}_3(3)_8 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = 2,5$$

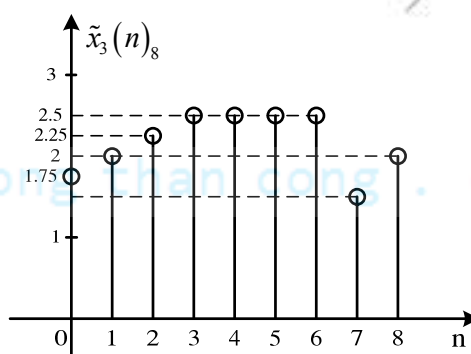
$$\tilde{x}_3(4)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(5)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(6)_8 = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(7)_8 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,5$$

Biểu diễn trong một chu kỳ như sau:



Hình 4.5 Biểu diễn kết quả của ví dụ 4.3

Lưu ý các chu kỳ khác lặp lại như chu kỳ chúng ta vừa biểu diễn.

Bảng 4.1 Tổng kết các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Miền n	Miền k
$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$
$a\tilde{x}_1(n)_N + b\tilde{x}_2(n)_N$	$a\tilde{X}_1(k)_N + b\tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0} \tilde{X}(k)$
$W_N^{ln} \tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+l)$
$\tilde{x}_1(n)_N \left( \tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\tilde{X}_1(k)_N \tilde{X}_2(k)_N$



$\tilde{x}_1(n)_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)_N \tilde{X}_1(k-l)_N$ $\tilde{X}_1(k)_N (\tilde{*}) \tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n)$ thực	$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$
	$\text{Re}[\tilde{X}(k)] = \text{Re}[\tilde{X}(-k)]$
	$\text{Im}[\tilde{X}(k)] = -\text{Im}[\tilde{X}(-k)]$
	$ \tilde{X}(k)  =  \tilde{X}(-k) $
	$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$

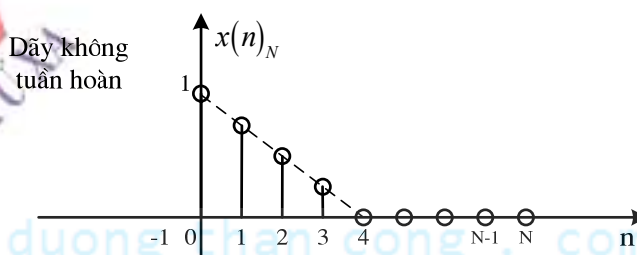
#### 4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DÃY KHÔNG TUẦN HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN $N$ .

Một dãy  $x(n)$  có chiều dài  $N$  nghĩa là:

$$L[x(n)] = [0, N-1] = N$$

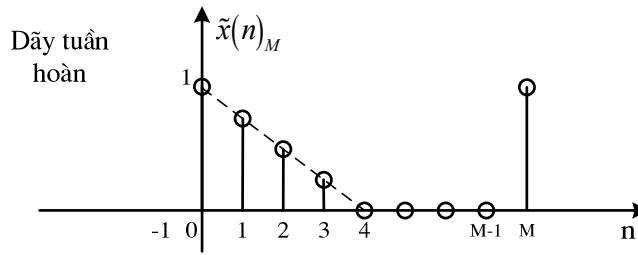
Như trên chúng ta đã xét biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ  $N$  và đã thấy ưu điểm nổi bật của biến đổi Fourier rời rạc DFT là biến đổi xuôi và biến đổi ngược đều được thực hiện cùng một thuật toán, nhưng trên thực tế không phải lúc nào chúng ta cũng gặp dãy tuần hoàn.

Bây giờ, ta xét dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn như sau



**Hình 4.6** Biểu diễn dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn  $N$   $x(n)_N$ .

Ta coi dãy có chiều dài  $N$  như trên là một chu kỳ của một dãy tuần hoàn có chu kỳ  $M$  như sau:



**Hình 4.7** Biểu diễn dãy tuần hoàn có chiều dài chu kỳ M  $\tilde{x}(n)_M$

Quan hệ giữa chu kỳ M và chiều dài N phải thỏa mãn:

$M \geq N$  (thường chọn  $M = 2^Y$  nghĩa là chọn dạng hàm mũ theo cơ số 2)

Nếu  $M=N$ , ta có thể biểu diễn quan hệ giữa dãy có chiều dài hữu hạn  $x(n)_N$  và dãy tuần hoàn có chu kỳ N  $\tilde{x}(n)_N$  như sau:

$$x(n)_N = \begin{cases} \tilde{x}(n)_N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (4.11)$$

Hay biểu diễn cho gọn dưới dạng sau:

$$x(n)_N = \tilde{x}(n)_N \text{rect}_N(n) \quad (4.12)$$

Như vậy, nếu ta coi chiều dài hữu hạn N:  $x(n)_N$  là một chu kỳ của dãy tuần hoàn có chu kỳ M:  $\tilde{x}(n)_M$  với  $M \geq N$  ta có thể áp dụng định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn như đã xét ở trên cho dãy có chiều dài hữu hạn. Sau khi thực hiện biến đổi xong ta lấy kết quả nhưng chỉ khoảng vùng trong một chu kỳ, từ đây ta xây dựng được định nghĩa cho cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N.

#### **Định nghĩa cặp DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn N**

Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau.

#### **Biến đổi xuôi DFT**

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{Ký hiệu: } \text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

$$x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$$

#### **Biến đổi ngược IDFT**

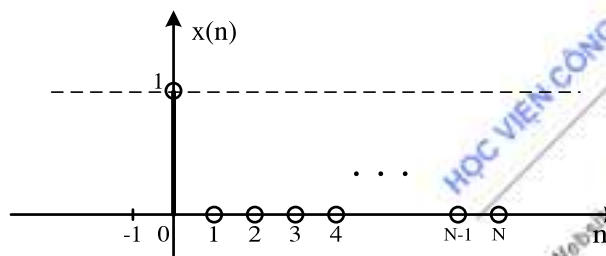
$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (4.14)$$

Ký hiệu:  $\text{IDFT}[X(k)] = x(n)$

$$X(k) \xrightarrow{\text{IDFT}} x(n)$$

#### Ví dụ 4.3

Hãy tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy có chiều dài hữu hạn sau:  $x(n) = \delta(n)$ .



Hình 4.8 Biểu diễn bằng đồ thị  $x(n)_N = \delta(n)$ .

**Giải:**

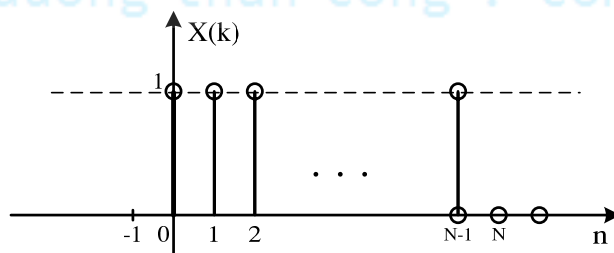
Nhìn trên đồ thị ta thấy  $x(n)_N$  có một mẫu bằng 1 tại  $n=0$ , còn lại  $N-1$  mẫu bằng 0 và chúng ta chỉ xét dãy này trong khoảng từ 0 đến  $N-1$ .

Áp dụng định nghĩa (4.3):

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

Chỉ có một giá trị  $x(n)|_{n=0} = 1$ , vì vậy:  $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Ta biểu diễn phổ từ 0 đến  $N-1$  như sau:



Hình 4.9 Biểu diễn  $X(k)$  tìm được trong ví dụ 4.3.

#### 4.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DẪY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N.

Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc được tổng kết trong bảng 4.2, ở đây ta sẽ xem xét khái niệm về phép chập vòng, tức là phép chập được thực hiện với các dãy có chiều dài hữu hạn.

Để hiểu rõ phép chập vòng, trước tiên ta phải xem xét tính chất trễ vòng như sau.

Chẳng hạn ta xét dãy:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Ở đây ta cần phân biệt rõ một số khái niệm.

+  $x(n)$ : dãy theo đầu bài cho.

+  $\tilde{x}(n)_4$ : dãy tuần hoàn với chu kỳ 4 trong đó 1 chu kỳ của nó đúng bằng  $x(n)$  đã cho.

+  $x(n)_4$ : dãy  $x(n)$  theo đầu bài cho với chiều dài bằng 4. Ở đây ta thấy  $x(n)_4 = x(n)$ .

+  $x(n-2)$ : dãy trễ của  $x(n)$  đi 2 mẫu sang phải được gọi là trễ tuyến tính.

+  $\tilde{x}(n-2)_4$ : dãy trễ tuần hoàn của  $\tilde{x}(n)_4$  đi 2 mẫu.

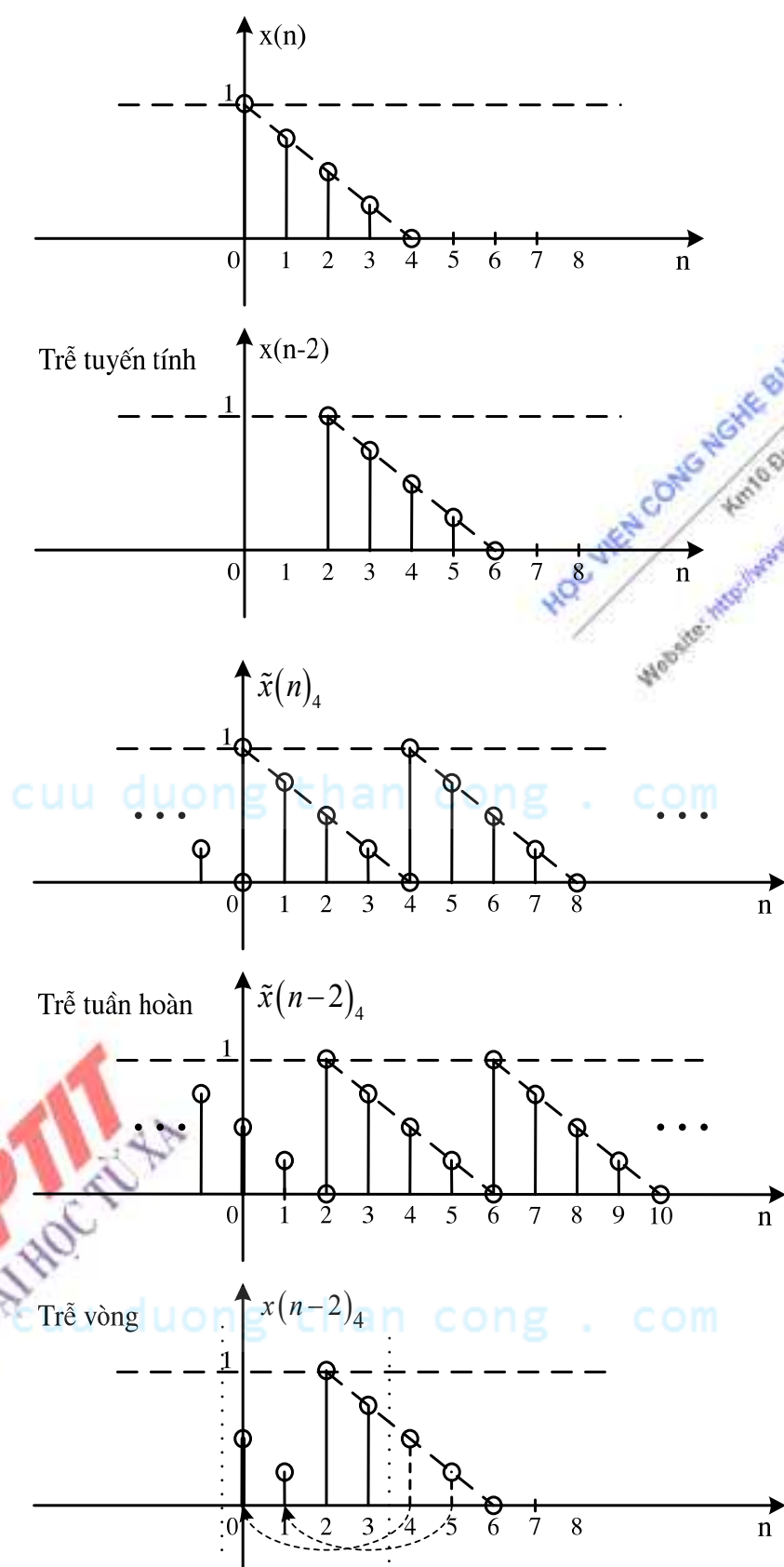
+  $x(n-2)_4$ : dãy trễ của  $x(n)_4$  đi 2 mẫu, ký hiệu như thế này gọi là trễ vòng.

Ta thấy:

- Trễ vòng của dãy có chiều dài hữu hạn N chỉ xác định trong khoảng 0:- N-1.

- Các mẫu mà trễ ngoài khoảng 0:-N-1 sẽ vòng về theo giá trị N, chính vì điều này mà người ta gọi là trễ vòng.

Trong minh hoạ hình (4.10),  $x(n-2)_4$  chỉ xác định trong khoảng 0:-3 (vì N=4). Các mẫu trễ ngoài khoảng này sẽ vòng về theo 4.



Hình 4.10 Minh họa các phép trễ của tín hiệu: Trễ tuyến tính, trễ tuần hoàn, trễ vòng.

**Bảng 4.2** Tính chất của DFT đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N.

Miền n	Miền tần số rời rạc k
$x(n)_N = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$	$X(k)_N = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$
$ax(n)_{N_1} + bx(n)_{N_2} = x(n)_{N_3}, N_3 = \max[N_1, N_2]$	$aX_1(k)_{N_3} + bX_2(k)_{N_3} = X_3(k)_{N_3}$
$x(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0} X(k)_N$
$W_N^{-k_0 n} x(n)$	$X(k-k_0)_N$
$\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N = x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$	$X_1(k)_N X_2(k)_N$
$x_1(n)_N x_2(n)_N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)_N X_2(k-l)_N$
$x^*(n)_N$	$X^*(-k)_N$
$x^*(-n)_N$	$X^*(k)_N$
$\text{Re}[x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N + \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
$j \text{Re}[x(n)_N]$	$\frac{1}{2} X(k)_N - \frac{1}{2} X^*(-k)_N$
Với $x(n)_N$ thực	$X(k)_N = X^*(-k)_N$
	$X^*(k)_N = X(-k)_N$
	$\text{Re}[X(k)_N] = \text{Re}[X(-k)_N]$
	$\text{Im}[X(k)_N] = -\text{Im}[X(-k)_N]$
	$ X(k)_N  =  X(-k)_N $
	$\arg[X(k)_N] = -\arg[X(-k)_N]$
$\sum_{n=0}^{N-1}  x(n) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  X(k)_N ^2$



#### Ví dụ 4.4

Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn N như sau:

$$x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n)$$

Tìm  $x_3(n)_N = x_1(n)_N (*) x_2(n)_N$  thông qua biến đổi Fourier rời rạc (DFT).

**Giải:**

Ta sử dụng tính chất phép chập ở miền n sang miền tần số rời rạc k trở thành phép nhân thông thường. Ta chuyển  $x_1(n)_N$  và  $x_2(n)_N$  sang miền k thành  $X_1(k)$  và  $X_2(k)$  ta có:

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N X_2(k)_N$$

$$x_3(n)_N = \text{IDFT}[X_3(k)_N]$$

$$X_1(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

$$X_1(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} 1 W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \text{ thay vào:}$$

$$X_1(k) = \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow X_3(k) = \begin{cases} N^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Biến đổi ngược theo công thức:

$$x_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$x_3(n) = \begin{cases} N & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

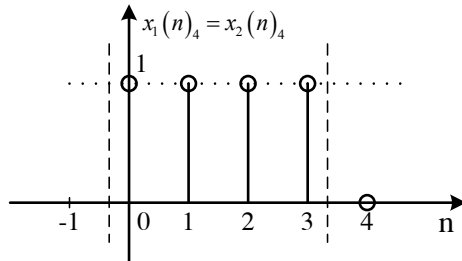
Khi N=4 ta có:

$$x_3(n) = \begin{cases} 4 & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$X_1(k) = X_2(k) = \begin{cases} 4 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

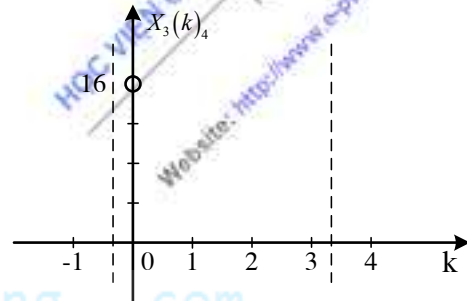
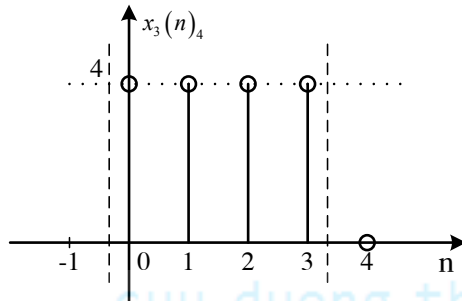
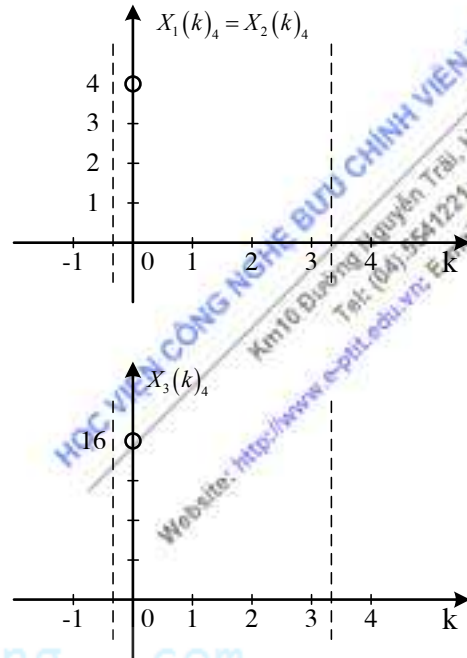
$$X_3(k) = \begin{cases} 16 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Vẽ trong miền  $n$



$n \rightarrow k$

Vẽ trong miền  $k$



Hình 4.11 Minh hoạ ví dụ 4.4 với chiều dài  $N=4$

#### Ví dụ 4.5

Hãy tính phép chập tuyến tính của 2 dãy

$$x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n), N = 4.$$

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

**Giải:**

Đây chính là phép chập quen thuộc ta đã học trong chương 1.

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^4 x_1(m) x_2(n-m)$$

$$x_3(0) = 1, x_3(1) = 3, x_3(2) = 3, x_3(3) = 4, x_3(4) = 3, x_3(5) = 2, x_3(6) = 1, x_3(7) = 0$$

**Lưu ý:** Nếu có 2 dãy có chiều dài hữu hạn  $N_1$  và  $N_2$ :  $x_1(n)_{N_1}$  và  $x_2(n)_{N_2}$

Khi ta thực hiện phép chập tuyến tính không vòng:

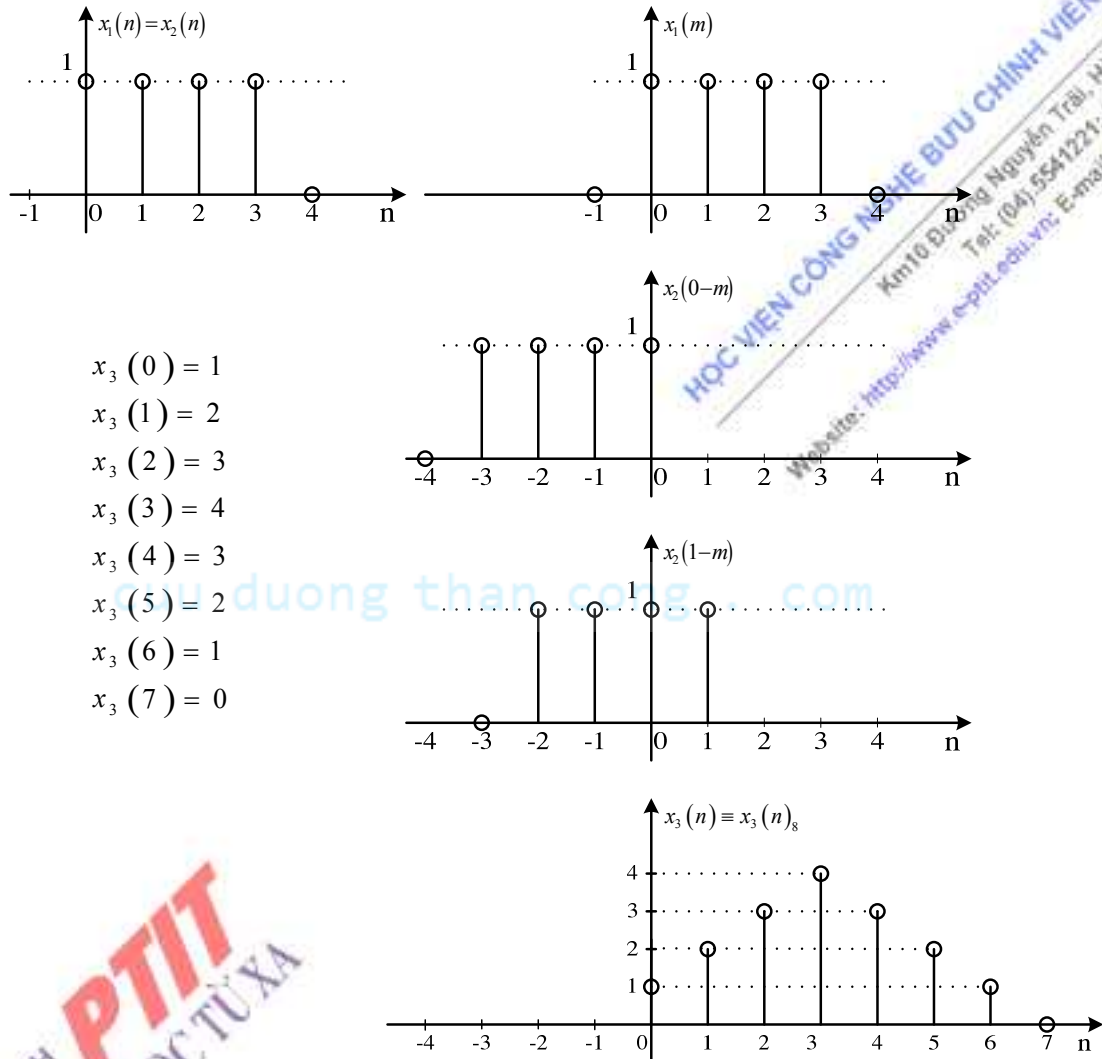
$$x_3(n)_{N_3} = x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2}$$

Thì chiều dài phép tuyến tính là:

$$N_3 = N_1 + N_2 - 1$$

Nếu  $N = N_1 = N_2 = 4$  thì ta có  $N_3 = 7$

Kết quả phép chập này sẽ được minh hoạ ở hình 4.12 như sau



Hình 4.12 Minh hoạ ví dụ 4.5 với  $N=4$

#### Ví dụ 4.6:

Hãy tính phép chập vòng của 2 dãy

$$x_1(n)_8 = x_2(n)_8 = \text{rect}_4(n)$$

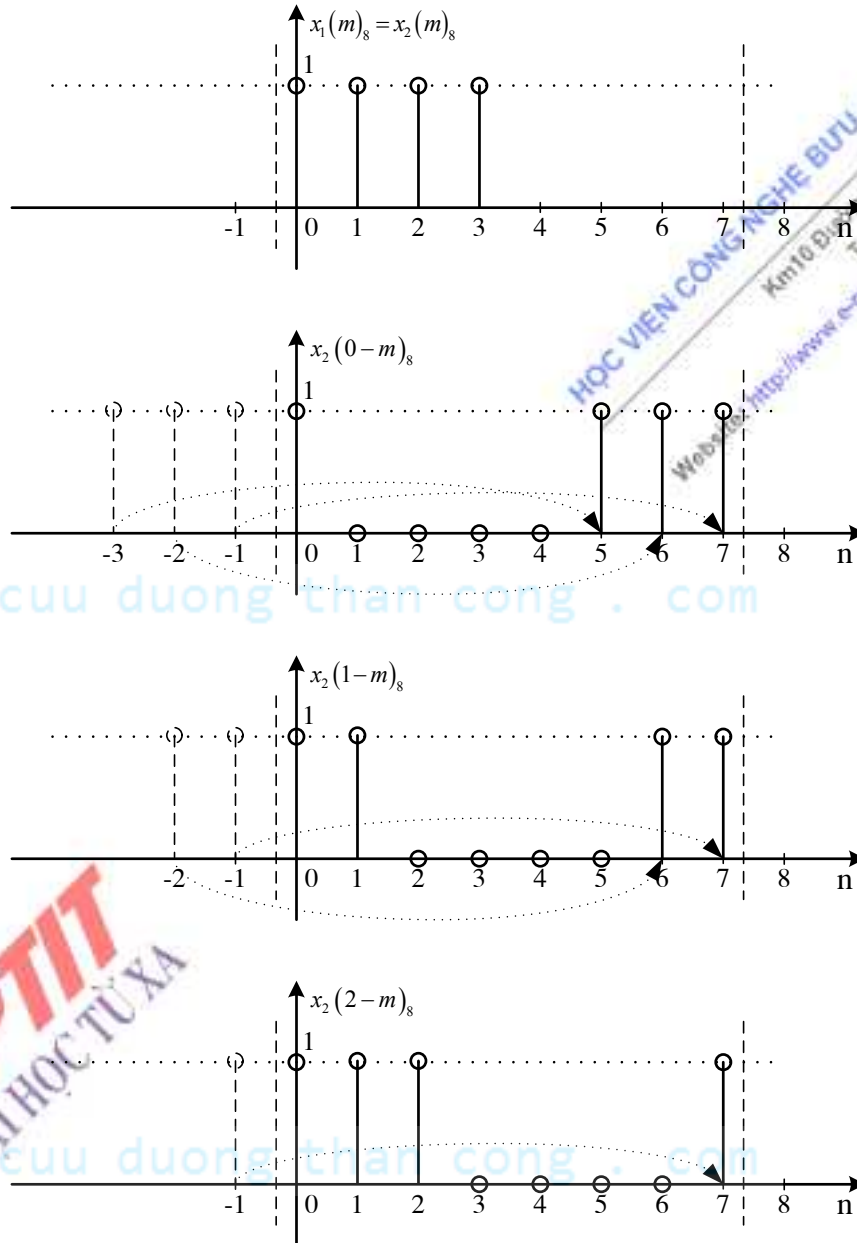
**Giải:** Ở đây ta thấy  $x_1(n)_8 = x_2(n)_8$  chính là dãy chữ nhật  $\text{rect}_4(n)$  và thêm 4 mẫu bằng 0.

$$\text{Ta có: } x_3(n)_8 = x_1(n)_8 (*)_8 x_2(n)_8 = \sum_{m=0}^7 x_1(m)_8 x_2(n-m)_8$$

$$x_3(0)_8 = \sum_{m=0}^7 x_1(m)_8 x_2(0-m)_8 = 1.$$

Thực hiện phép chập như minh họa ở hình 4.13 ta có kết quả trùng với kết quả của ví dụ 4.5

$$x_3(1)_8 = 2, x_3(2)_8 = 3, x_3(3)_8 = 4, x_3(4)_8 = 3, x_3(5)_8 = 2, x_3(6)_8 = 1, x_3(7)_8 = 0$$



Hình 4.13 Minh họa ví dụ 4.6 tính phép chập vòng  $x_1(n)_8 (*) x_2(n)_8$

**Lưu ý:** Nếu chiều dài của dãy là 8 khi thực hiện phép chập vòng ta chỉ cần xác định các mẫu trong khoảng từ 0 đến 7 (tức từ 0:-N-1).

Qua 3 ví dụ (4.4), (4.5) và (4.6) ta thấy:

- Kết quả ví dụ (4.5) chính là kết quả ví dụ (4.6).

- Ví dụ (4.6) tương tự như ví dụ (4.4) khi ta cho  $N=4$  nhưng lại có kết quả khác nhau do ta chọn chiều dài để tính phép chập vòng khác nhau.

- Ở ví dụ (4.6) nếu ta thay chiều dài bằng 7 và tính phép chập vòng

$$x_3(n)_7 = x_1(n)_7 (*)_7 x_2(n)_7 = \sum_{m=0}^6 x_1(m)_7 x_2(n-m)_7$$
 ta thấy kết quả không thay đổi. so với kết quả ta tìm được với chiều dài bằng 8.

**Vậy, ta rút ra kết luận:**

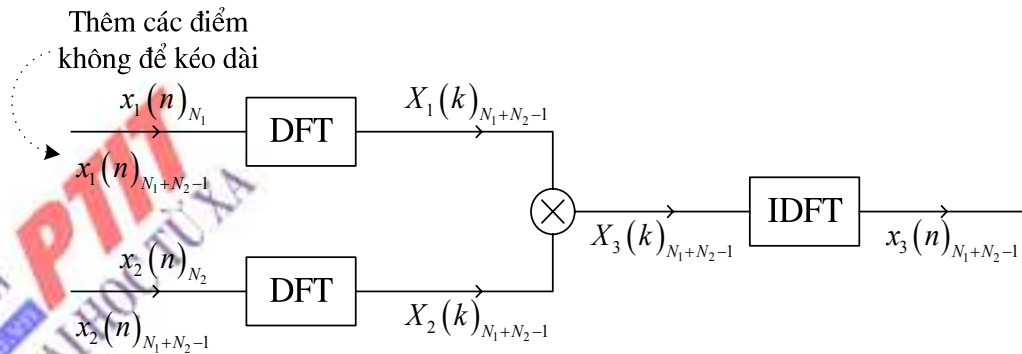
Điều kiện để ta có thể sử dụng phép chập vòng để tính phép chập tuyến tính đối với 2 dãy có chiều dài hữu hạn  $x_1(n)_{N_1}$  và  $x_2(n)_{N_2}$  là chiều dài chúng ta chọn để thực hiện phép  $N_3$  phải thoả mãn:  $N_3 \geq N_1 + N_2 - 1$

Ở đây, trước tiên ta phải bổ xung các mẫu bằng 0 để tăng chiều dài  $x_1(n)_{N_1}$  và  $x_2(n)_{N_2}$  tối thiểu bằng  $N_1+N_2+1$  sau đó mới thực hiện phép chập vòng:

$$x_3(n)_{N_1+N_2-1} = x_1(n)_{N_1} (*)_{N_1+N_2-1} x_2(n)_{N_2}$$

Nếu tính phép chập tuyến tính thông qua phép chập vòng ta sẽ lợi dụng được ưu thế của biến đổi Fourier rời rạc là biến đổi xuôi ngược cùng một thuật toán, do vậy cải thiện hiệu năng tính toán đáng kể, hơn nữa phép chập sang miền tần số rời rạc trở thành phép nhân cho nên thực hiện cũng đơn giản hơn rất nhiều.

Sơ đồ ứng dụng DFT tính phép chập tuyến tính:



**Hình 4.14 Sơ đồ tính phép chập tuyến tính thông qua biến đổi DFT**

#### 4.5. PHÉP CHẬP NHANH (PHÉP CHẬP PHÂN ĐOẠN)

Trên thực tế, chúng ta thường gặp trường hợp phải thực hiện biến đổi Fourier rời rạc với các dãy có chiều dài khác xa nhau, một dãy trong phép DFT quá dài sẽ dẫn đến vượt quá dung lượng của bộ nhớ thời gian tính toán quá lớn không cho phép, để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi kết thúc tất cả quá trình tính toán. Khi gặp vấn đề trên ta phải chia tính toán ra thành nhiều giai đoạn.

Giả sử chúng ta xét một hệ thống với đầu vào  $x(n)$  có chiều dài  $N$ , đáp ứng xung  $h(n)$  có chiều dài  $M$ , ta thấy rằng trên thực tế  $N \gg M$ . Khi thực hiện phép chập tuyến tính để xác định đầu ra  $y(n)$  của hệ thống  $y(n)=x(n)*h(n)$  thông qua DFT ta phải thực hiện các bước sau theo phương pháp Stockham:

- Chia đầu vào  $x(n)$  ra thành nhiều dãy con:

$$x(n)_N = \sum_i x(n)_{N_i} \quad (4.15)$$

với

$$x_i(n)_{N_i} = \begin{cases} x(n) & iN_1 \leq n \leq (i+1)N_1 - 1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (4.16)$$

- Thực hiện chập từng dãy con với nhau

$$y_i(n)_{N_1+M-1} = h(n)_M * x_i(n)_{N_i} \quad (4.17)$$

Phép chập này được thực hiện thông qua phép chập vòng nhờ DFT. Ở đây, chiều dài thực hiện DFT là  $N_1+M-1$ .

- Sau đó chúng ta tổ hợp các kết quả thành phần:

$$y(n) = \sum_i y_i(n)_{N_1+M-1} \quad (4.18)$$

Ta phải chọn giá trị của  $N_1$  tối ưu so với  $M$  để được chiều dài thực hiện DFT theo cơ số 2 ( $2^y$ ). Việc chọn này đã được tổng kết ở bảng HELMS như sau:

**Bảng 4.3 Bảng HELM chọn chiều dài thực hiện DFT**

Chiều dài của $h(n)$ <b>M</b>	Chiều dài của DFT <b><math>N_1 + M - 1</math></b>
$\leq 10$	32
11-17	64
18-29	128
30-52	256
53-94	512
95-171	1024



172-310	2048
311-575	4096
576-1050	8192
1051-2000	16.384
2001-3800	32.768
3801-7400	65.536
7401-1480	131.072

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng ta đã làm quen với phép biến đổi Fourier rời rạc DFT, đây là một trong những nội dung quan trọng của xử lý tín hiệu số vì nó là nền tảng cho các thuật toán tính toán nhanh như biến đổi Fourier nhanh FFT giúp cho tốc độ tính toán của các chip DSP cải thiện đáng kể.

Các kiến thức trong chương này cần lưu ý bao gồm:

### 1. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ $N$ .

#### Biến đổi DFT

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

#### Biến đổi ngược IDFT

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

#### Lưu ý:

-  $\tilde{X}(k)$  cũng tuần hoàn với chu kỳ  $N$ .

- Đặc điểm nổi bật của DFT là biến đổi xuôi và ngược tương đương như nhau, chỉ khác nhau về hệ số  $1/N$  và dấu ở số mũ, hay nói cách khác biến đổi xuôi và ngược là cùng thuật toán.

### 2. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn $N$ .

Đối với các dãy có chiều dài hữu hạn  $N$  (ký hiệu là  $x(n)_N$ ), để biến đổi được DFT người coi nó là 1 chu kỳ của 1 dãy tuần hoàn, do vậy thực hiện được biến đổi DFT và sau đó lấy kết quả trong một chu kỳ. Cụ thể biến đổi DFT đối với dãy có chu kỳ  $N$  được định nghĩa như sau:

#### Biến đổi DFT

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases}$$

### Biến đổi IDFT

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

### 3. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc DFT

Trong phần này chúng ta nên lưu ý để phân biệt một số khái niệm:

#### Các ký hiệu:

- $x(n)_N$ : tín hiệu  $x(n)$  có chiều dài hữu hạn  $N$ .
- $\tilde{x}(n)_N$ : tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ  $N$ .
- Phân biệt rõ  $x(n)_N \neq x(n)$ .

#### Các tính chất:

Phân biệt rõ các khái niệm trễ tuyến tính, trễ tuần hoàn, trễ vòng đặc biệt là phân biệt 3 khái niệm:

- Phép chập tuyến tính  $x_1(n) * x_2(n)$
- Phép chập tuần hoàn  $\tilde{x}_1(n)_N (*)_N \tilde{x}_2(n)_N$
- Phép chập vòng  $x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$

Từ đây ta thấy, kết quả của phép chập tuyến tính giữa hai tín hiệu có chiều dài hữu hạn  $x_1(n)$  có chiều dài  $N_1$ ,  $x_2(n)$  có chiều dài  $N_2$  đã học trong chương 1 có thể tính được thông qua biến đổi DFT nếu chiều dài thực hiện DFT  $N \geq N_1 + N_2 - 1$ . Như vậy việc thực hiện phép chập sẽ dễ dàng hơn vì biến đổi DFT và IDFT được thực hiện cùng một thuật toán.

### 4. Thực hiện phép chập nhanh

Chúng ta lưu ý rằng, trên thực tế các dãy tín hiệu đầu vào bao giờ cũng có chiều dài lớn hơn nhiều so với chiều dài của đáp ứng xung  $h(n)$  cho nên để tính toán xác định đầu ra của hệ thống với hiệu năng tính toán cao ta có thể chia tín hiệu vào  $x(n)$  thành các dãy con  $x_i(n)$  có chiều dài phù hợp với đáp ứng xung của hệ thống.

$$x(n) = \sum_i x_i(n)$$

Tiếp theo, ta thực hiện phép chập  $x_i(n) * h(n)$  thông qua biến đổi DFT thu được kết quả  $y_i(n)$ , ở đây, thông thường ta chọn chiều dài thực hiện DFT có dạng cơ số 2,  $2^Y$  để tính toán nhanh. Sau đó, đầu ra của hệ thống  $y(n)$  sẽ là hợp của các  $y_i(n)$

$$y(n) = \sum_i y_i(n)$$

Nhìn chung, các kiến thức của chương này sẽ làm nền tảng quan trọng cho các thuật toán biến đổi Fourier nhanh FFT sẽ được trình bày trong chương 7.

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4

### Bài 4.1

Cho dãy tuần hoàn  $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & 6 \leq n \leq 11 \end{cases} \quad \text{chu kỳ } N = 12.$$

Hãy xác định  $\tilde{X}(k)$ .

### Bài 4.2

Cho dãy tuần hoàn chu kỳ 4 như sau:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \end{cases} \quad \text{hãy xác định } \tilde{X}(k)$$

### Bài 4.3

Cho:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \\ 1 & n = 3 \end{cases} \quad \text{hãy xác định } \tilde{X}(k)$$

### Bài 4.4

Cho tín hiệu có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy tính biến đổi DFT của dãy  $x(n)$  có chiều dài  $N$  với  $N \geq L$

### Bài 4.5

Hãy chứng minh:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n.r} = \begin{cases} N & r = l.N \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$l$ : nguyên

### Bài 4.6

Cho hai dãy

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy xác định phép chập vòng của 2 dãy trên

#### Bài 4.7

Biến đổi DFT của một tín hiệu tuần hoàn chu kỳ  $N$   $\tilde{x}(n)_N$  sẽ là:

$$a) \tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$b) \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$c) \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$d) \tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

#### Bài 4.8

Biến đổi ngược IDFT của một tín hiệu  $\tilde{X}(k)$  chu kỳ  $N$  sẽ là:

$$a) \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$b) \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$c) \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$d) \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

#### Bài 4.9

Cặp biến đổi xuôi, ngược DFT đối với dãy có chiều dài  $x(n)_N$  sẽ là:

$$a) X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$b) X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$c) X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và}$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

$$\text{d) } X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \neq \end{cases} \quad \text{và}$$

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

#### Bài 4.10

Ta có thể tính phép chập tuyến tính hai dãy  $x_1(n)$  và  $x_2(n)$  có chiều dài  $L[x_1(n)] = N_1$  và  $L[x_2(n)] = N_2$  thông qua biến đổi DFT nếu ta chọn chiều dài thực hiện biến đổi DFT là:

a)  $N \geq N_1 + N_2 - 1$

b)  $N \leq N_1 + N_2 - 1$

c)  $N < N_1 + N_2 - 1$

d)  $N > N_1 + N_2 - 1$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
1010 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541222 Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn> E-mail: [dmh@e-ptit.edu.vn](mailto:dmh@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA  
PTIT  
e

cuu duong than cong . com

## CHƯƠNG V: TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN FIR.

### GIỚI THIỆU

Lọc số là một trong những kỹ thuật phổ biến của xử lý tín hiệu số. Cùng với sự phát triển rực rỡ của công nghệ vi mạch điện tử số đã làm tăng hiệu quả của các bộ lọc số, các hệ thống số, giúp tối ưu được các tham số của bộ lọc. Ta hãy xem xét khái niệm của về lọc số và bộ lọc số:

#### - Định nghĩa Bộ lọc số:

Một hệ thống dùng làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.

#### - Khái niệm về lọc số:

Các thao tác của xử lý dùng để biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho nhờ một hệ thống số được gọi là sự lọc số.

Như chúng ta đã xét ở chương 3, các bộ lọc số lý tưởng có đáp ứng xung  $h(n)$  có chiều dài vô hạn và không nhân quả tức là các bộ lọc số lý tưởng là các hệ thống không nhân quả cho nên nó không thể thực hiện được trong thực tế. Trong chương này chúng ta sẽ xét các phương pháp tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn FIR (Finite Impulse Response) với mục đích là dựa trên các bộ lọc số lý tưởng đã xét ở chương 3 để xây dựng các bộ lọc số thực tế có đáp ứng xung là nhân quả và có chiều dài hữu hạn, ở đây ta giới hạn các bộ lọc này có pha tuyến tính.

#### Nội dung chính của chương đề cập đến các vấn đề:

- + Đặc điểm Bộ lọc số FIR pha tuyến tính.
- + Tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính theo phương pháp cửa sổ.

### NỘI DUNG

#### 5.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH

Ta có khi bộ lọc số FIR có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn nghĩa là:

$$L[h(n)] = [0, N-1] = N \quad (5.1)$$

Nếu biểu diễn trong miền  $z$  ta có hàm truyền đạt của bộ lọc số pha tuyến tính theo định nghĩa biến đổi  $z$  sẽ có dạng:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (5.2)$$

Nếu biểu diễn trong miền tần số  $\omega$  theo biến đổi Fourier ta có đáp ứng tần số:



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (5.3)$$

Mặt khác trong miền tần số  $\omega$  khi biểu diễn đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  theo độ lớn và pha ta có:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \quad (5.4)$$

Do pha  $\theta(\omega)$  tuyến tính nên ta giả sử pha có dạng theo phương trình tuyến tính như sau

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (5.5)$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có nghĩa là xác định đáp ứng biên độ tần số  $|H(e^{j\omega})|$  của bộ lọc số và xét xem với đáp ứng biên độ tần số  $|H(e^{j\omega})|$  tìm được có thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật bộ lọc số đặt ra hay không. Cần nhắc lại là các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế đã được đề ra trong chương 3 với 4 tham số chính

- + Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$
- + Độ gợn sóng dải thông  $\delta_1$
- + Tần số giới hạn dải chắn  $\omega_s$
- + Độ gợn sóng dải chắn  $\delta_2$

Đối với bộ lọc số FIR pha tuyến tính, căn cứ vào dạng pha đã cho ở (5.5) ta sẽ nghiên cứu hai trường hợp:

1. Trường hợp 1.  $\beta = 0 \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

2. Trường hợp 2.  $\beta \neq 0 \Rightarrow \theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

**Trường hợp 1:**  $\beta = 0 \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

Ta có theo (5.3):

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) (\cos\omega n + j\sin\omega n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\omega n + j \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\omega n \end{aligned} \quad (5.6)$$

Mặt khác theo sự biểu diễn (5.4) và thay  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$  ta có:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) (\cos\alpha\omega - j\sin\alpha\omega) \\ &= A(e^{j\omega}) \cos\alpha\omega - jA(e^{j\omega}) \sin\alpha\omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

Đồng nhất (5.6) và (5.7) ta thấy đây là 2 số phức, muốn bằng nhau thì phần thực phải bằng phần thực và phần ảo phải bằng phần ảo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega &= A(e^{j\omega}) \cos \alpha \omega \\ \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega &= A(e^{j\omega}) \sin \alpha \omega\end{aligned}\quad (5.8)$$

Từ (5.8) ta chia hai biểu thức cho nhau khử  $A(e^{j\omega})$  rồi áp dụng các biến đổi lượng giác rút ra được kết luận:

Trong trường hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có pha ở dạng  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ , bộ lọc sẽ có quan hệ sau:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{N-1}{2} \\ h(n) &= h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)\end{aligned}\quad (5.9)$$

- Ở đây  $\alpha = \frac{N-1}{2}$  được gọi là tâm đối xứng của bộ lọc FIR.

- Khi  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$  và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại I,  $h(n)$  đối xứng.

- Khi  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$  và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại II,  $h(n)$  đối xứng.

**Trường hợp 2.**  $\beta \neq 0 \Rightarrow \theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$

Tiến hành phân tích tương tự như trường hợp 1 ta rút ra được kết luận:

Trong trường hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính có pha ở dạng  $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ , bộ lọc sẽ có quan hệ sau:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{N-1}{2} \\ \beta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) &= -h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)\end{aligned}\quad (5.10)$$

- Ở đây  $\alpha = \frac{N-1}{2}$  được gọi là tâm phản đối xứng của bộ lọc FIR..

- Khi  $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$  và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại III,  $h(n)$  phản đối xứng

- Khi  $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$  và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại IV,  $h(n)$  phản đối xứng.

Các khái niệm về tâm đối xứng, tâm phản đối xứng, chiều dài bộ lọc số FIR N chẵn hay lẻ sẽ hình thành nên các đặc điểm của bộ lọc số. Căn cứ vào các đặc điểm của bộ lọc, chúng ta sẽ đi tổng hợp các bộ lọc số FIR. Thông thường có 3 phương pháp chính như sau:

- **Phương pháp cửa sổ:** Dùng các cửa sổ để hạn chế chiều dài đáp ứng xung của bộ lọc số lý tưởng và đưa về nhân quả.

- **Phương pháp mẫu tần số:** Trong vòng tròn tần số lấy các điểm khác nhau để tổng hợp bộ lọc.

- **Phương pháp lặp tối ưu (phương pháp tối ưu - MINIMAX):** phương pháp gần đúng Tchebyshev, tìm sai số cực đại  $E_{\max}$  của bộ lọc thiết kế với bộ lọc lý tưởng, rồi làm cực tiểu hoá đi sai số này:  $\min|E_{\max}|$ . Các bước cực tiểu sẽ được máy tính lặp đi lặp lại.

Trong chương 5 này, chúng ta chủ yếu sẽ đề cập đến phương pháp cửa sổ để tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính vì đây là một trong những phương pháp hiệu quả và có được ứng dụng nhiều hiện nay.

## 5.2. TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR THEO PHƯƠNG PHÁP CỬA SỔ.

Phương pháp cửa sổ là một phương pháp đơn giản nhất. Mục tiêu chính của phương pháp này là dùng các hàm cửa sổ cho sẵn để tổng hợp bộ lọc số FIR sao cho thực hiện được về mặt vật lý, nghĩa là các đáp ứng xung phải có chiều dài hữu hạn và nhân quả. Các thủ tục thiết kế bộ lọc số FIR được thực hiện qua các bước sau:

- Đưa ra chỉ tiêu kỹ thuật  $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$  trong miền tần số  $\omega$ .
- Chọn loại cửa sổ và chiều dài cửa sổ  $N$ , nghĩa là xác định  $w(n)_N$ .
- Chọn loại bộ lọc số lý tưởng (thông thấp, thông cao, thông dải, chặn dải) tức là chọn  $h(n)$ .
- Để hạn chế chiều dài thì nhân cửa sổ với  $h(n)$ :  $w(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$

Chiều dài  $L[w(n)_N] = N$ ,  $L[h(n)] = \infty$ , nên  $L[h_d(n)] = N$ .

Sau bước này tìm được  $h_d(n)$  tức là hệ số của bộ lọc số thực tế, nhưng hệ số này có đáp ứng được các chỉ tiêu kỹ thuật đặt ra hay không thì phải thử lại.

- Thử lại xem có thỏa mãn  $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$  hay không bằng cách chuyển sang miền tần số

$$H_d(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})_N H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) d\omega \quad (5.11)$$

Nếu không thỏa mãn ta sẽ tăng chiều dài  $N$  của cửa sổ.

**Lưu ý:**

- Trong miền tần số  $\omega$ , cửa sổ và bộ lọc phải có pha trùng nhau, tâm đối xứng của cửa sổ và bộ lọc cũng phải trùng nhau.
- Khi dùng cửa sổ thao tác vào bộ lọc số lý tưởng, do vậy đáp ứng xung  $h(n)$  bị cắt bớt chiều dài cho nên ở miền tần số  $\omega$ , đáp ứng của bộ lọc số FIR  $H(e^{j\omega})$  vừa thiết kế sẽ có hiện tượng gợn sóng tức là hiện tượng Gibbs, làm cho chất lượng của bộ lọc bị ảnh hưởng

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu các loại cửa sổ và các bước thiết kế.

### 5.2.1. Phương pháp cửa sổ chữ nhật

Cửa sổ chữ nhật là cửa sổ đơn giản nhất.

**Định nghĩa:** Trong miền  $n$ , cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

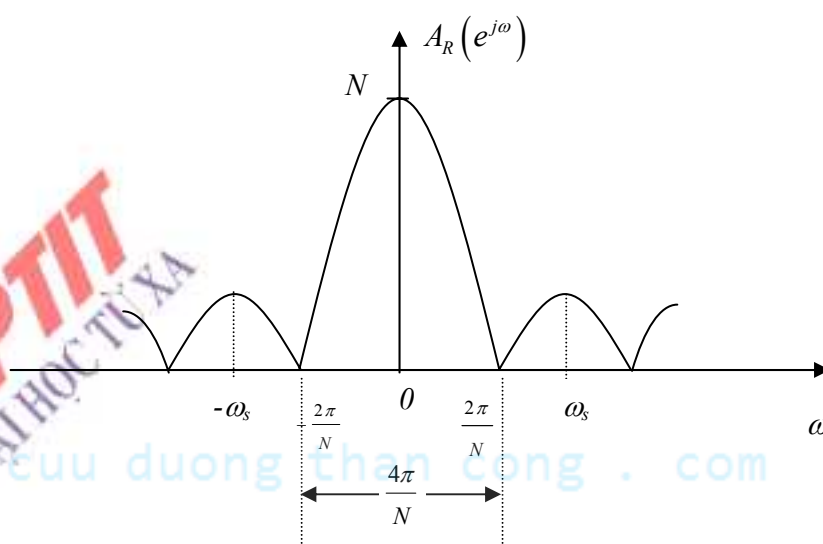
$$w_R(n)_N = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.12)$$

Nhận xét:  $w_R(n)_N = \text{rect}_N(n)$

Xét cửa sổ chữ nhật trong miền tần số ta có:

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega})_N &= \text{FT}[w_R(n)_N] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}} (e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}})}{e^{-j\omega \frac{\omega}{2}} (e^{j\omega \frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega \frac{\omega}{2}})} \\ &= e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = e^{j\theta_R(\omega)} A_R(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Vì có dạng  $\frac{0}{0}$  nên ta biến đổi tiếp:  $A_R(e^{j\omega}) = \frac{\omega \frac{N}{2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\omega \frac{N}{2}}}{\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}} = N \frac{\sin \omega \frac{N}{2}}{\frac{\omega}{2}}$  (5.13)



Hình 5.1 Biểu diễn  $A_R(e^{j\omega})$

Có hai tham số đánh giá cửa sổ là:

- Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$ .
- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$$

Hai chỉ tiêu đánh giá chất lượng của cửa sổ.

Đối với cửa sổ chữ nhật ta có:

- Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega_R = \frac{4\pi}{N}$

- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda_R = 20 \lg \frac{|W_R(e^{j\omega_s})|}{|W_R(e^{j0})|} (dB) \approx -13dB.$$

Các thông số được minh họa trên hình vẽ 5.1.

**Lưu ý:**

- Chất lượng của cửa sổ sẽ được đánh giá là tốt nếu 2 tham số bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  và tỷ số biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên đỉnh trung tâm  $\lambda$  cùng nhỏ.

- Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  nhỏ thì dải quá độ giữa dải thông và dải chắn của bộ lọc sẽ nhỏ, nghĩa là tần số  $\omega_p$  và  $\omega_s$  gần nhau.

- Tỷ số biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên đỉnh trung tâm  $\lambda$  nhỏ dẫn đến độ gợn sóng  $\delta_1, \delta_2$  nhỏ.

- Nhưng đây là 2 tham số nghịch nhau, bề rộng đỉnh trung tâm muốn nhỏ thì tỷ số  $\lambda$  sẽ lớn và ngược lại. Do vậy tùy từng điều kiện bài toán chúng ta sẽ đưa ra các tiêu chuẩn kỹ thuật riêng để chọn loại cửa sổ.

Để đánh giá cửa sổ có tính đến thông số chiều dài  $N$  của cửa sổ thì người ta còn dùng tham số sau:

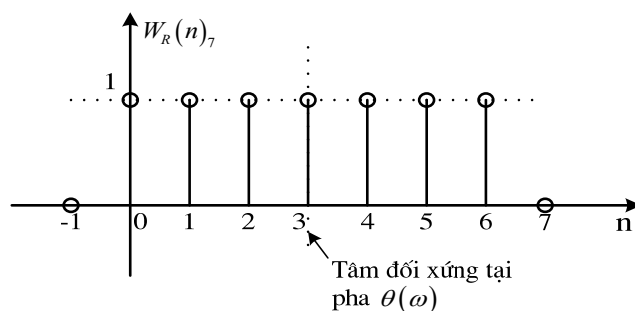
$$G(e^{j\omega}) = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega})_N|}{|W(e^{j0})_N|} (dB)$$

Ví dụ về tham số này sẽ được thể hiện trong hình 5.5

**Ví dụ 5.1** Về cửa sổ chữ nhật với  $N = 7$

**Giải:** Ta có  $w_R(n)_7 = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$





Hình 5.2 Cửa sổ chữ nhật với N=7

### Ví dụ 5.2

Hãy thiết kế bộ lọc số thông thấp FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ chữ nhật:

$$\omega_c = \frac{\pi}{2}; N = 7.$$

**Giải:** Trong chương 3, ta đã xác định đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha

$$0 \leq \theta(\omega) = 0 \text{ như sau: } h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \quad (\text{tâm đối xứng: } n = 0)$$

Nhưng trong ví dụ này ta có pha tuyến tính  $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$ , do vậy ta phải dịch chuyển  $h(n)$  sang phải  $\frac{N-1}{2}$  mẫu:

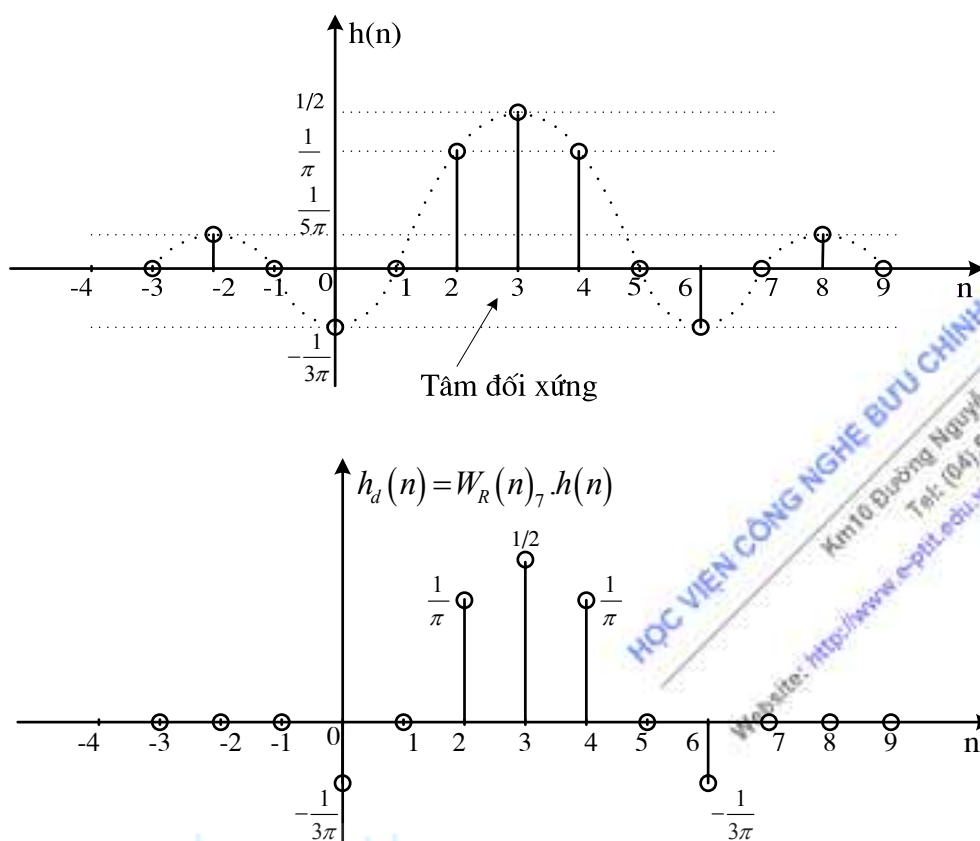
$$h_{LP}(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left( n - \frac{N-1}{2} \right)}{\omega_c \left( n - \frac{N-1}{2} \right)} \quad (\text{tâm đối xứng tại } n = \frac{N-1}{2})$$

Thay  $\omega_c = \frac{\pi}{2}; N = 7$  ta được:

$$h_{LP}(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (n-3)}{\frac{\pi}{2} (n-3)}$$

Sau đó ta thực hiện nhân  $h(n)$  với cửa sổ chữ nhật N=7 như ở hình 5.2 để tìm  $h_d(n)$





Hình 5.3 Xác định  $w_R(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$  với  $N=7$

$h_d(n)$  đối xứng tại tâm đối xứng  $n = 3$  nên ta có các giá trị sau:

$$h_d(0) = -\frac{1}{3\pi} = h_d(6)$$

$$h_d(1) = 0 = h_d(5)$$

$$h_d(2) = \frac{1}{\pi} = h_d(4)$$

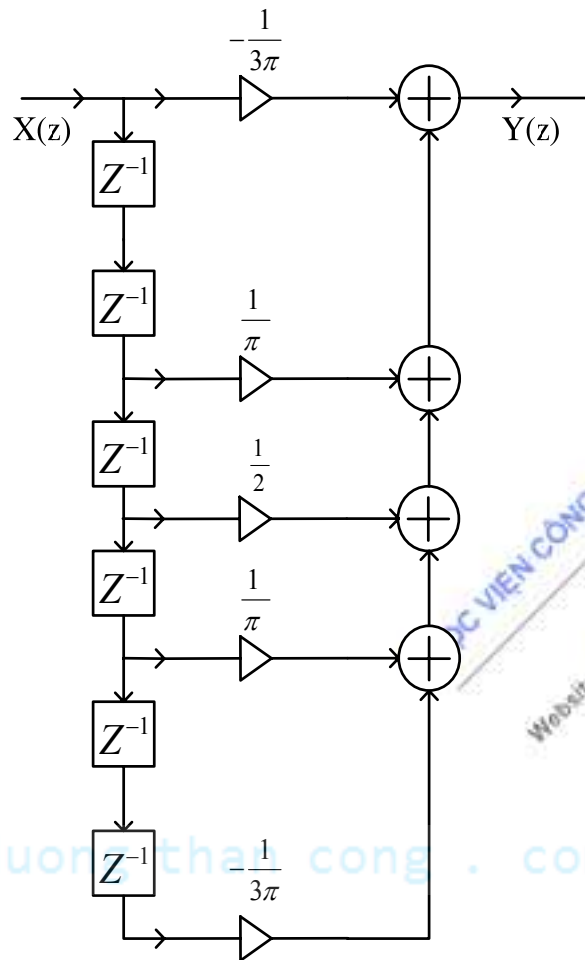
$$h_d(3) = \frac{1}{2}$$

Hàm truyền đạt của bộ lọc:

$$H_d(z) = \sum_{n=0}^6 h_d(n) z^{-n} = -\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3} + \frac{1}{\pi} z^{-4} - \frac{1}{3\pi} z^{-6}$$

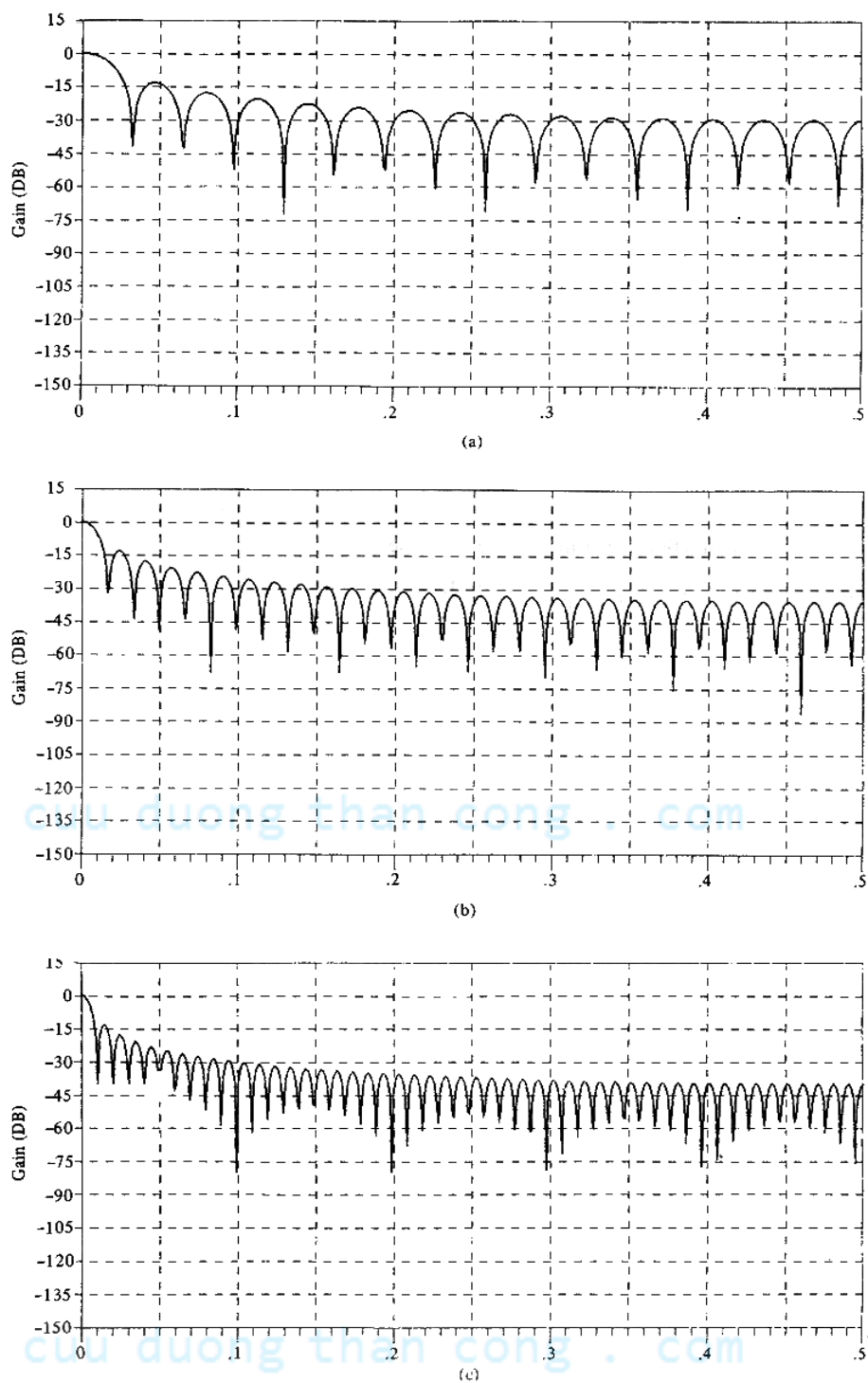
$$\text{Hay } y(n) = -\frac{1}{3\pi} x(n) + \frac{1}{\pi} x(n-2) + \frac{1}{2} x(n-3) + \frac{1}{\pi} x(n-4) - \frac{1}{3\pi} x(n-6)$$

Kết quả được sơ đồ bộ lọc FIR như sau:



Hình 5.4 Sơ đồ bộ lọc FIR thông thấp với  $N=7$  trong ví dụ 5.2

Sau đây chúng ta sẽ xem xét đồ thị biểu diễn  $G(e^{j\omega}) = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega})|_N}{|W(e^{j0})|_N} (dB)$  của cửa sổ chữ nhật với các chiều dài  $N$  khác nhau:



Hình 5.5 Đồ thị  $G_R(e^{j\omega})$  với a)  $N=31$ ; b)  $N=61$ , c)  $N=101$

**Nhận xét:** Khi chiều dài cửa sổ  $N$  tăng lên thì tham số tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm  $\lambda$  là không đổi đều bằng -13db, chỉ có các búp là hẹp đi tức là bề rộng đỉnh trung tâm sẽ nhỏ đi khi ta tăng chiều dài  $N$  của cửa sổ, điều này dẫn đến chất lượng của cửa sổ sẽ tăng lên.

### 5.2.2. Phương pháp cửa sổ Bartlett (tam giác)

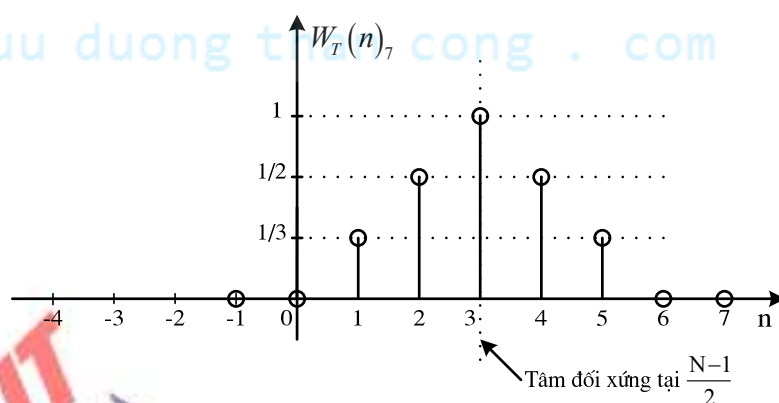
**Định nghĩa:** Trong miền  $n$ , cửa sổ Bartlett được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.13)$$

#### Ví dụ 5.3

Hãy vẽ cửa sổ Bartlett với  $N = 7$

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 3 \\ 2 - \frac{n}{3} & 3 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$



Hình 5.6 Cửa sổ tam giác với  $N=7$

**Lưu ý:**

- Đối với cửa sổ tam giác thiết kế giống cửa sổ chữ nhật nhưng dạng hàm khác nhau.

+ Ở miền  $n$ :  $h_d(n) = w_T(n)_N h(n)$

+ Ở miền  $\omega$ :  $H_d(e^{j\omega}) = W_T(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$

- Các tham số của cửa sổ tam giác:

+  $\Delta\omega_T = \frac{8\pi}{N}$

+  $\lambda_T \approx -26dB$

Khi dùng cửa sổ tam giác hiện tượng Gibbs giảm rất nhiều so với dùng cửa sổ chữ nhật vì  $\lambda_T < \lambda_R$ , nhưng dải quá độ lại lớn hơn cửa sổ chữ nhật  $\Delta_T \omega > \Delta_R \omega$

#### Ví dụ 5.4

Hãy thiết kế bộ lọc thông cao FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ Bartlett với  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ;  $N = 7$ .

**Giải:**

Ta xét bộ lọc thông cao pha 0  $\theta(\omega) = 0$ : (pha không, tâm đối xứng nằm tại điểm 0)

$$h_{HP}(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

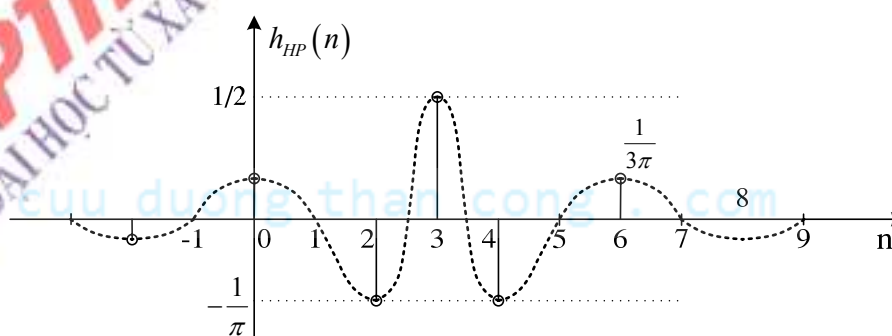
Theo đầu bài bộ lọc cần thiết kế có pha:  $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$  vậy ta dịch chuyển  $h_{HP}(n)$  như sau:

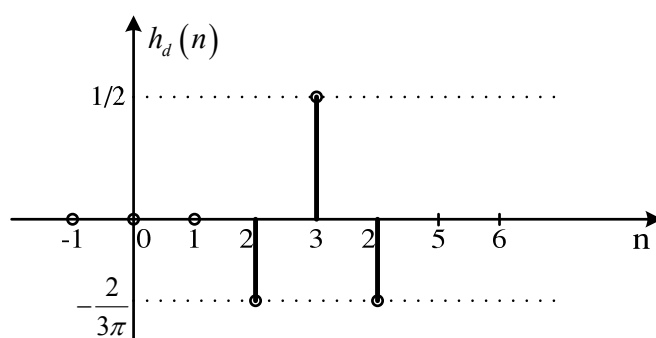
$$h_{HP}(n) = \delta\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

Thay  $N=7$   $\omega_c = \frac{\pi}{2}$  ta có:

$$h_{HP}(n) = \delta(n-3) - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-3)}{\frac{\pi}{2}(n-3)}$$

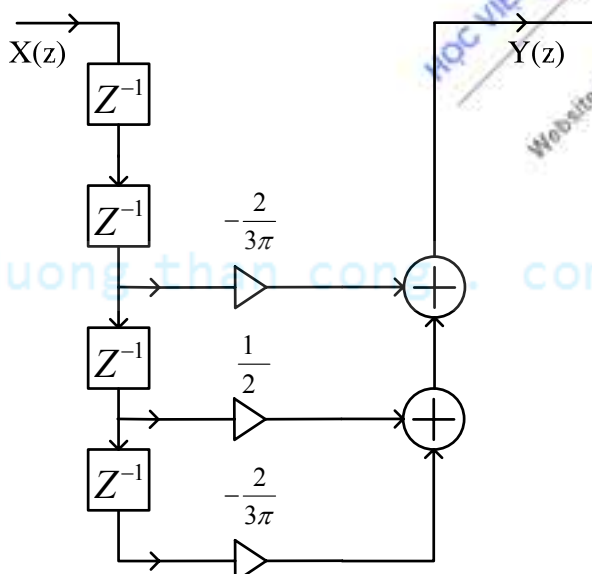
Nhân  $h_{HP}(n)$  với cửa sổ tam giác vẽ  $w_T(n)$  trong hình 5.6 ta có  $h_d(n)$  cần tìm





Hình 5.7 Xác định  $w_T(n)_N \cdot h(n) = h_d(n)$  với  $N=7$

Cuối cùng tương tự như ví dụ 5.2 ta có sơ đồ bộ lọc thông cao cần thiết kế như sau



Hình 5.8 Sơ đồ bộ lọc FIR thông cao với  $N=7$  trong ví dụ 5.4

### 5.2.3. Cửa sổ Hanning và Hamming

**Định nghĩa:** Trong miền  $n$ , cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n)_N = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.14)$$

Phân loại khác nhau theo hệ số  $\alpha$  ta được:

$\alpha = 0,5$ : cửa sổ Hanning

$$w_{Han}(n)_N = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.15)$$



$\alpha = 0,54$  : cửa sổ Hamming

$$w_{Ham}(n)_N = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.16)$$

Ta có các tham số của bộ lọc Hanning:

$$+ \Delta\omega_{Han} = \frac{8\pi}{N}$$

$$+ \lambda_{Han} \approx -32dB$$

Các tham số của bộ lọc Hamming:

$$+ \Delta\omega_{Ham} = \frac{8\pi}{N}$$

$$+ \lambda_{Ham} \approx -43dB$$

Như vậy, ta thấy:  $\Delta\omega_T = \Delta\omega_{Han} = \Delta\omega_{Ham} = \frac{8\pi}{N}$ ,  $\lambda_T > \lambda_{Han} > \lambda_{Ham}$  vậy trong 3 cửa sổ bề rộng đỉnh trung tâm là như nhau nhưng biên độ của độ gợn sóng dải thông và dải chắn sẽ nhỏ nhất khi thiết kế bằng cửa sổ Hamming.

#### 5.2.4. Phương pháp cửa sổ Blackman

**Định nghĩa:** Trong miền  $n$ , cửa sổ Blackman được định nghĩa như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^m a_m \cos \frac{2\pi}{N-1} mn & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.17)$$

Với điều kiện:  $\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a_m = 1$

Các tham số của cửa sổ:

$$+ \Delta\omega_B = \frac{12\pi}{N}$$

$$+ \lambda_B \approx -57dB$$

#### Ví dụ 5.5

Hãy tìm cửa sổ Blackman trong các trường hợp sau đây:

$$1, a_0 = 0,5; a_1 = 0,5; a_m = 0$$

$$2, a_0 = 0,54; a_1 = 0,46; a_m = 0; m \neq 0,1$$

3,  $a_0 = 0,42; a_1 = 0,5; a_3 = 0,08; a_m = 0; m \neq 0,1,2$

**Giải:**

1. Với các hệ số trên đây chính là cửa sổ Hanning  $w_{Han}(n)_N$
2. Với các hệ số trên đây chính là cửa sổ Hamming  $w_{Ham}(n)_N$
3. Ta có đây là bộ tham số thông dụng nhất của cửa sổ Blackman

$$w_B = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1} n + 0,08 \cos \frac{4\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

### 5.2.5. Phương pháp cửa sổ Kaiser

Định nghĩa: Trong miền  $n$  cửa sổ Kaiser được định nghĩa như sau:

$$w_K(n)_N = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \beta \left( \frac{n-1}{2} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0 \left[ \beta \left( \frac{n-1}{2} \right) \right]} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (5.18)$$

$I_0(x)$  là hàm Bessel biến dạng loại 1 bậc 0

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^k \right]^2$$

Trong định nghĩa (5.18), tham số  $\beta$  đặc trưng cho việc trao đổi năng lượng giữa đỉnh trung tâm và các đỉnh thứ cấp, để đạt hiệu quả cao khi thiết kế, người ta thường chọn:  $4 \leq \beta \leq 9$

Trong cửa sổ Kaiser ta có thể thay đổi tham số  $\beta$  để thay đổi tỷ lệ giữa  $\lambda_K$  và  $\Delta\omega_K$

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 5

Trong chương 5, chúng ta đã nghiên cứu cách tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn FIR, các đặc điểm của bộ lọc số FIR và tập trung nghiên cứu kỹ về phương pháp cửa sổ. Các vấn đề cần lưu ý trong chương 5 bao gồm:

### 1 Đặc điểm bộ lọc số FIR

Ta chỉ xét bộ lọc số pha tuyến tính, cho nên các bộ lọc số FIR được chia ra làm 4 loại:

- Khi  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$  và  $N$  lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại I,  $h(n)$  đối xứng.
- Khi  $\theta(\omega) = -\alpha\omega$  và  $N$  chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại II,  $h(n)$  đối xứng.

- Khi  $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$  và N lẻ, ta có bộ lọc số FIR loại III,  $h(n)$  phản đối xứng
- Khi  $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$  và N chẵn, ta có bộ lọc số FIR loại IV,  $h(n)$  phản đối xứng.

Bộ lọc FIR loại I, loại II ta có:

- Tâm đối xứng của đáp ứng xung  $h(n)$  tại :  $\alpha = \frac{N-1}{2}$
- $h(n) = h(N-n-1)$

Bộ lọc FIR loại I, loại II ta có:

- Tâm phản đối xứng của đáp ứng xung  $h(n)$  tại :  $\alpha = \frac{N-1}{2}$
- $h(n) = -h(N-n-1)$

## 2. Phương pháp cửa sổ

Nội dung của phương pháp này là dùng cửa sổ để biến đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số lý tưởng thành nhân quả và có chiều dài hữu hạn.

Khi tổng hợp bộ lọc số ta phải lưu ý các tham số:

- Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$ .
- Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp nhất trên biên độ đỉnh trung tâm:

$$\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$$

Đây là hai chỉ tiêu đánh giá chất lượng của cửa sổ.

Sau đây ta phải lưu ý bảng tổng kết các tham số và các hàm cửa sổ:

### Các tham số quan trọng của một số hàm cửa sổ

Loại cửa sổ	Bề rộng đỉnh trung tâm $\Delta\omega$ .	Tỷ số $\lambda$ (dB)
Chữ nhật	$4\pi/N$	-13
Tam giác (Bartlett)	$8\pi/N$	-27
Hanning	$8\pi/N$	-32
Hamming	$8\pi/N$	-43
Blackman	$12\pi/N$	-58

**Một số hàm cửa sổ để tổng hợp bộ lọc FIR**

Tên cửa sổ	Hàm trong miền n với $0 \leq n \leq N-1$
Bartlett (Tam giác)	$1 - \frac{2\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[ \alpha \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2} \right]}{I_0 \left[ \alpha - \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}$

**CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 5**

**Bài 5.1**

Cho bộ lọc FIR loại 1 với  $N=7$  có đáp ứng xung  $h(n)$  được xác định  $h(0)=1$ ,  $h(1)=2$ ,  $h(2)=3$ ,  $h(3)=4$ .

Tìm  $\alpha$  và đáp ứng xung  $h(n)$

**Bài 5.2**

Cho bộ lọc FIR loại 2 với  $N=6$  có đáp ứng xung  $h(n)$  được xác định  $h(0)=1$ ,  $h(1)=2$ ,  $h(2)=3$ .  
Tìm  $\alpha$  và đáp ứng xung  $h(n)$ .

**Bài 5.3**

Cho bộ lọc FIR loại 3 với  $N=7$  có đáp ứng xung  $h(n)$  được xác định  $h(0)=1$ ,  $h(1)=2$ ,  $h(2)=3$ .  
Tìm  $\alpha$  và đáp ứng xung  $h(n)$ .

**Bài 5.4**

Cho bộ lọc FIR loại 4 với  $N=6$  có đáp ứng xung  $h(n)$  được xác định  $h(0)=1$ ,  $h(1)=2$ ,  $h(2)=3$ .  
Tìm  $\alpha$  và đáp ứng xung  $h(n)$ .

**Bài 5.5**

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông cao pha tuyến tính, dùng cửa sổ Barlett với  $N = 9$ ,  
 $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ .

#### Bài 5.6

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông cao pha tuyến tính, dùng cửa sổ chữ nhật với  $N = 9$ ,  
 $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ .

#### Bài 5.7

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR thông dải pha tuyến tính, dùng cửa sổ chữ nhật với  $N = 9$ ,  
 $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_{c2} = \frac{\pi}{3}$

#### Bài 5.8

Hãy thiết kế bộ lọc số FIR chặn dải pha tuyến tính, dùng cửa sổ tam giác Barlett với  $N = 9$ ,  
 $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$

#### Bài 5.9

Chất lượng cửa sổ sẽ tốt khi nào:

a) Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  hẹp và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ

đỉnh trung tâm:  $\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$  phải nhỏ.

b) Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  lớn và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ

đỉnh trung tâm:  $\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$  phải nhỏ.

c) Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  lớn và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ

đỉnh trung tâm:  $\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$  lớn.

d) Bề rộng đỉnh trung tâm  $\Delta\omega$  hẹp và tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ

đỉnh trung tâm:  $\lambda = 20 \lg \frac{|W(e^{j\omega_s})|}{|W(e^{j0})|}$  lớn.

#### Bài 5.10

Cửa sổ Hanning có chất lượng kém hơn cửa sổ Hamming vì:

a) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning lớn hơn cửa sổ Hamming

- b) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning nhỏ hơn cửa sổ Hamming
- c) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning lớn hơn cửa sổ Hamming.
- d) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Hanning nhỏ hơn cửa sổ Hamming.

#### Bài 5.11

Cửa sổ Blackman có độ gọn sóng thấp nhất so với các cửa sổ Hanning, Hamming, tam giác và chữ nhật vì:

- a) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman nhỏ nhất.
- b) Bề rộng đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman lớn nhất.
- c) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman lớn nhất.
- d) Tỷ số giữa biên độ đỉnh thứ cấp thứ nhất trên biên độ đỉnh trung tâm của cửa sổ Blackman nhỏ nhất.

#### Bài 5.12

Khi thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính thực chất là chúng ta xác định:

- a) Các hệ số của bộ lọc
- b) Loại cấu trúc bộ lọc
- c) Chiều dài của bộ lọc
- d) Đặc tính pha của bộ lọc

#### Bài 5.13

Khi thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp cửa sổ, nếu bộ lọc chưa đáp ứng được các chỉ tiêu kỹ thuật thì ta phải:

- a) Thay đổi loại cửa sổ
- b) Tăng chiều dài của cửa sổ
- c) Dùng cả phương pháp a) và b)
- d) Thay cấu trúc bộ lọc

#### Bài 5.14

Khi thiết kế, nếu ta tăng chiều dài  $N$  của cửa sổ, ta thấy:

- a) Độ gọn sóng ở cả dải thông và dải chắn tăng theo.
- b) Độ gọn sóng ở cả dải thông và dải chắn giảm đi.
- c) Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$  và tần số giới hạn dải chắn  $\omega_s$  gần nhau hơn.
- d) Tần số giới hạn dải thông  $\omega_p$  và tần số giới hạn dải chắn  $\omega_s$  xa nhau hơn.



## CHƯƠNG VI: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CÓ CHIỀU DÀI VÔ HẠN IIR.

### GIỚI THIỆU

Cũng giống như bộ lọc FIR, người ta thường dùng một số phương pháp tổng hợp bộ lọc IIR có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn (IIR: Infinite Impulse Response). Phương pháp sẽ được trình bày ở chương này là biến đổi từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số theo các phép ánh xạ. Việc tổng hợp bộ lọc tương tự coi như đã biết trong các kiến thức về Cơ sở kỹ thuật Điện - Điện tử, khi tổng hợp bộ lọc số IIR ta sẽ bắt đầu việc tổng hợp bộ lọc trong miền tương tự tức là xác định hàm truyền đạt  $H_a(s)$  và sau đó biến đổi sang miền số.

Có 3 phương pháp chính để chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số tương đương

- Phương pháp bất biến xung
- Phương pháp biến đổi song tuyến
- Phương pháp tương đương vi phân

Với điều kiện đã tổng hợp được  $H_a(s)$

Để tìm được hàm truyền đạt tương tự  $H_a(s)$ , người ta có 3 phương pháp tổng hợp là:

- Butterworth
- Chebyshev
- Elip hay Cauer

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt nghiên cứu các nội dung chính trên.

### NỘI DUNG

#### 6.1. CƠ SỞ TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ IIR

Ta có thể mô tả bộ lọc tương tự bằng hàm hệ thống của nó:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \quad (6.1)$$

ở đây  $\{\alpha_k\}$  và  $\{\beta_k\}$  là các hệ số lọc, hoặc bằng đáp ứng xung liên quan với  $H_a(s)$  thông qua biến đổi Laplace:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (6.2)$$

Bộ lọc tương tự có hàm hệ thống hữu tỷ  $H_a(s)$  cũng có thể được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M \beta_r \frac{d^r x(t)}{dt^r} \quad (6.3)$$

ở đây  $x(t)$  là tín hiệu vào và  $y(t)$  tín hiệu ra của bộ lọc.

Một trong ba đặc trưng tương đương của bộ lọc tương tự sẽ tạo ra phương pháp biến đổi bộ lọc sang miền số khác nhau như sẽ được xét dưới đây. Ta biết rằng, hệ thống tuyến tính bất biến tương tự với hàm hệ thống  $H_a(s)$  là ổn định, nếu tất cả các điểm cực phân bố toàn bộ bên trái của mặt phẳng  $s$  ( $s$ : là biến số phức,  $s = \sigma + j\Omega$ ). Do đó, nếu phép biến đổi là có kết quả, nó sẽ có các tính chất sau:

1. Trục  $j\Omega$  trong mặt phẳng  $s$  sẽ ánh xạ lên đường tròn đơn vị trong mặt phẳng  $z$ . Như vậy sẽ có quan hệ trực tiếp giữa hai biến tần số trong hai miền.

2. Nửa trái của mặt phẳng  $s$  sẽ ánh xạ vào phía trong đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng  $z$ . Như vậy một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được biến đổi thành bộ lọc số ổn định.

Ta lưu ý rằng thể hiện vật lý bộ lọc IIR ổn định không thể có pha tuyến tính vì nếu hàm hệ thống của bộ lọc pha tuyến tính phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1}) \quad (6.4)$$

ở đây  $z^{-N}$  biểu diễn độ trễ  $N$  đơn vị thời gian, bộ lọc sẽ có điểm cực ánh xạ gương ngoài đường tròn đơn vị ứng với mỗi điểm cực trong đường tròn này. Vì thế bộ lọc sẽ là không ổn định. Do đó, một bộ lọc IIR nhân quả và ổn định không thể có pha tuyến tính.

Đặc điểm của bộ lọc IIR là chiều dài đáp ứng xung  $L[h(n)] = \infty$

## 6.2. PHƯƠNG PHÁP BẤT BIẾN XUNG

Trong phương pháp bất biến xung, mục đích của ta là tổng hợp bộ lọc IIR có đáp ứng xung đơn vị  $h(n)$  là phiên bản được lấy mẫu của đáp ứng xung bộ lọc tương tự. Nghĩa là

$$h(n) \equiv h(nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

ở đây  $T$  là khoảng lấy mẫu.

Được biểu diễn trong phạm vi của việc lấy mẫu đáp ứng xung một bộ lọc tương tự với đáp ứng tần số  $H_a(F)$ , bộ lọc số với đáp ứng xung đơn vị  $h(n) \equiv h(nT)$  có đáp ứng tần số

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f-k)F_s] \quad (6.6)$$

hoặc

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (6.7)$$

Rõ ràng, bộ lọc số với đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  sẽ có đặc tuyến đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng nếu khoảng lấy mẫu (hiện tượng alias).  $T$  được chọn đủ nhỏ để tránh hoàn toàn hoặc tối thiểu hoá ảnh hưởng của lẫn mẫu. Điều rõ ràng là phương pháp bất biến xung không phù hợp đối với bộ lọc thông cao vì sự lẫn phổ khi xử lý lấy mẫu.

Muốn tìm hiểu sự ánh xạ giữa mặt phẳng  $z$  và mặt phẳng  $s$  được biểu thị bởi quá trình lấy mẫu, ta dựa vào công thức tổng quát hoá (6.7) để có mối liên hệ giữa biến đổi  $z$  của  $h(n)$  và biến đổi Laplace của  $h_a(t)$ . Mối quan hệ này là:

$$H(z)|_{z=e^{st}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (6.8)$$

ở đây

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (6.9)$$

$$H(z)|_{z=e^{st}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-sTn}$$

Chú ý rằng, khi  $s = j\Omega$ , (6.8) trở thành (6.7), ở đây thừa số  $j$  trong  $H_a(\omega)$  đã bị bỏ đi trong ký hiệu của ta.

Đặc tính chung của ánh xạ

$$z = e^{sT} \quad (6.10)$$

có thể đạt được bằng cách thay  $s = \sigma + j\Omega$  và biểu diễn biến phức  $z$  theo toạ độ cực  $z = re^{j\omega}$ . Với sự thay thế này (6.10) trở thành:

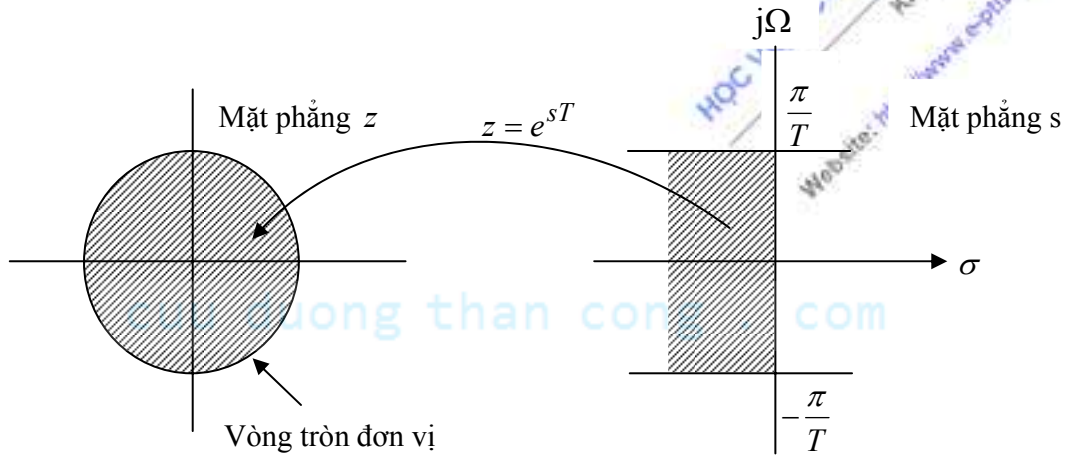
$$re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Rõ ràng, ta phải có:

$$\begin{aligned} r &= e^{\sigma T} \\ \omega &= \Omega T \end{aligned} \quad (6.11)$$

Do đó,  $\sigma < 0$  nói lên rằng  $0 < r < 1$  và  $\sigma > 0$  nói lên rằng  $r > 1$ . Khi  $\sigma = 0$ , ta có  $r = 1$ . Như vậy nửa trái mặt phẳng  $s$  được ánh xạ vào trong đường tròn đơn vị thuộc  $z$  và nửa phải mặt phẳng  $s$  được ánh xạ thành các điểm ngoài đường tròn đơn vị thuộc  $z$ . Đây là một trong các tính chất có lợi của ánh xạ đang xét.

Như đã chỉ ở trên, trục  $j\Omega$  cũng được ánh xạ lên đường tròn đơn vị trong  $z$ . Tuy nhiên, sự ánh xạ này là không một-một. Vì  $\omega$  là duy nhất trên khoảng  $(-\pi, \pi)$ , nên sự ánh xạ  $\omega = \Omega T$  hàm ý rằng khoảng  $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$  ánh xạ lên các giá trị tương ứng của  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ . Ngoài ra, khoảng tần số  $\pi/T \leq \Omega \leq 3\pi/T$  cũng ánh xạ vào khoảng  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  và nói chung, khoảng  $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$  đều thế, khi  $k$  là số nguyên. Như vậy việc ánh xạ từ tần số tương tự  $\Omega$  vào biến tần số  $\omega$  trong miền tần số là nhiều lên một, nó là sự phản ánh ảnh hưởng sự chồng phổ khi lấy mẫu. Hình 6.1 mô tả sự ánh xạ từ mặt phẳng  $s$  lên mặt phẳng  $z$ .



**Hình 6.1 Sự ánh xạ  $z = e^{sT}$  của khoảng  $2\pi/T$  (với  $\sigma < 0$ ) trong mặt phẳng  $s$  lên các điểm trong đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng  $z$ .**

Để tìm hiểu tiếp ảnh hưởng của phương pháp bất biến xung đến đặc tuyến bộ lọc thu được, ta hãy biểu diễn hàm hệ thống của bộ lọc tương tự dưới dạng phân thức tối giản. Với giả thiết rằng các cực của bộ lọc tương tự là phân biệt, ta có thể viết:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad (6.12)$$

ở đây  $\{s_{pk}\}$  là các cực của bộ lọc tương tự và  $\{A_k\}$  là các hệ số của khai triển phân thức. Bởi vậy:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} \quad t \geq 0 \quad (6.13)$$

Nếu lấy mẫu  $h_a(t)$  một cách tuần hoàn tại  $t = nT$ , ta có

$$\begin{aligned} h(n) &= h_a(nT) \\ &= \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk} T n} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Thay (6.14) vào, hàm hệ thống bộ lọc số IIR sẽ là

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk} T n} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{s_{pk} T} z^{-1} \right)^n \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tổng phía trong của (6.15) là hội tụ, vì  $s_{pk} < 0$  và có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{s_{pk} T} z^{-1} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{s_{pk} T} z^{-1}} \quad (6.16)$$

Do đó, hàm hệ thống bộ lọc số là:

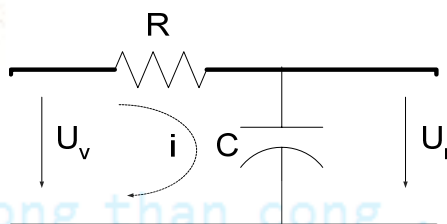
$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} T} z^{-1}} \quad (6.17)$$

Ta nhận thấy rằng bộ lọc số có các cực trị

$$z_k = e^{s_{pk} T} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (6.18)$$

Với hàm hệ thống  $H(z)$  này, bộ lọc số IIR dễ được thực hiện nhờ một dãy các bộ lọc đơn cực song song.

**Ví dụ 6.1:** Cho mạch điện tương tự như sau:



Hãy chuyển sang mạch điện số bằng phương pháp bất biến xung ?

**Giải:**

$$H_a(s) = \frac{u_{ra}}{u_{vào}} \quad \text{với: } u_{ra} = i \frac{1}{s.C}, \quad u_{vào} = i \left( R + \frac{1}{s.C} \right)$$



$$H_a(s) = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{s.C}\right)} = \frac{1}{(s.RC + 1)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Điểm cực:  $s_{p_1} = -\frac{1}{RC}$ ;  $A_1 = \frac{1}{RC}$

Biến đổi:

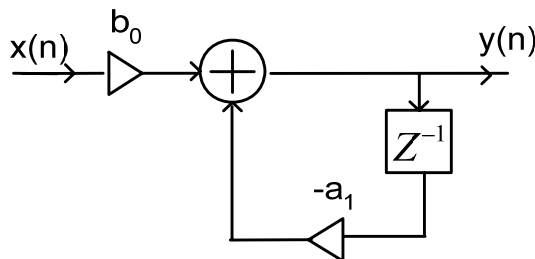
$$H(z) = \frac{A_1}{1 - e^{s_{p_1}T} \cdot z^{-1}} = \frac{\frac{1}{RC}}{1 - e^{-\frac{1}{RC}T} \cdot z^{-1}}$$

$$M = 0 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{RC}$$

$$N = 1 \Rightarrow a_1 = -e^{-\frac{1}{RC}T}$$

Thay vào công thức ta được:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}; \quad \text{hay } y(n) = b_0 x(n) + (-a_1) y(n-1), \text{ ta có sơ đồ sau:}$$



### 6.3. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI SONG TUYẾN

Trong mục này ta sẽ trình bày sự ánh xạ mặt phẳng  $s$  vào mặt phẳng  $z$ , được gọi là biến đổi song tuyến tính. Biến đổi song tuyến tính là phép ánh xạ biến đổi trục  $j\Omega$  thành đường tròn đơn vị trong mặt phẳng  $z$  chỉ một lần, như vậy tránh được sự lẫn lộn của các thành phần tần số. Hơn nữa, tất cả các điểm trong nửa trái mặt phẳng  $s$ , được ánh xạ vào phía trong đường tròn đơn vị và tất cả các điểm cực ở nửa phải mặt  $s$  được ánh xạ vào các điểm tương ứng ngoài đường tròn đơn vị thuộc mặt phẳng  $z$ .

Biến đổi song tuyến tính có thể liên kết với công thức hình thang để lấy tích phân bằng số. Ví dụ, ta hãy xét bộ lọc tương tự tuyến tính với hàm hệ thống:

$$H(s) = \frac{b}{s + a} \quad (6.19)$$

Hệ thống này cũng được đặc trưng bởi phương trình vi phân.



$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (6.20)$$

Tránh sự thay thế phép đạo hàm bằng phép sai phân hữu hạn, giả sử rằng ta tích phân đạo hàm và lấy gần đúng nó bằng công thức hình thang. Như vậy.

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0) \quad (6.21)$$

ở đây  $y'(t)$  là ký hiệu của đạo hàm  $y(t)$ . Việc lấy gần đúng tích phân (6.21) bằng công thức hình thang tại  $t = nT$  và  $t_0 = nT - T$  cho:

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y'(nT) + y'(nT - T)] + y(nT - T) \quad (6.22)$$

Đánh giá phương trình vi phân (6.20) tại  $t = nT$  sẽ có:

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT) \quad (6.23)$$

Ta dùng (6.23) để thay cho đạo hàm trong (8.2.40) và sẽ có được phương trình sai phân của hệ thống rời rạc tương đương. Với  $y(n) \equiv y(nT)$  và  $x(n) \equiv x(nT)$ , ta có kết quả:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y(n-1) = \frac{bT}{2}[x(n) + x(n-1)] \quad (6.24)$$

Biến đổi  $z$  của phương trình sai phân này là:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

Do đó, hàm hệ thống của bộ lọc số tương đương là:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1 + z^{-1})}{1 + aT/2 - (1 - aT/2)z^{-1}}$$

hoặc tương đương: 
$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + a} \quad (6.25)$$

Rõ ràng, ánh xạ từ mặt phẳng  $s$  vào mặt phẳng  $z$  là:

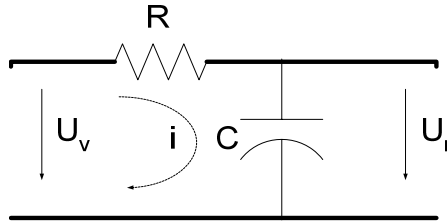
$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (6.26)$$

Đây được gọi là biến đổi song tuyến tính.

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (6.27)$$

**Ví dụ 6.2**

Cho mạch điện tương tự:

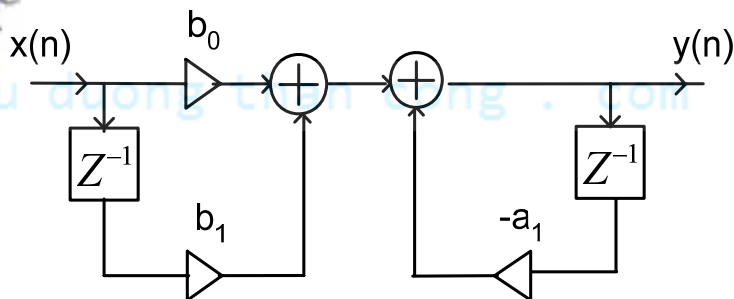


Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến?

**Giải:**

$$\begin{aligned}
 H_a(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \\
 \Rightarrow H(z) &= \frac{1}{RC \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} \\
 &= \frac{T(1+z^{-1})}{2RC(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})} = \frac{T + Tz^{-1}}{2RC + T + (T - 2RC)z^{-1}} \\
 H(z) &= \frac{\frac{T}{A} + \frac{T}{A}z^{-1}}{1 + \frac{T - 2RC}{A}z^{-1}}; \quad A = 2RC + T \\
 M=1 &\Rightarrow b_0 = \frac{T}{A}, b_1 = \frac{T}{A} \\
 N=1 &\Rightarrow a_1 = \frac{T - 2RC}{A}
 \end{aligned}$$

Vẽ sơ đồ



#### 6.4. PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG ĐƯƠNG VI PHÂN

Một trong những phương pháp đơn giản nhất để biến đổi bộ lọc tương tự sang bộ lọc số là lấy gần đúng phương trình vi phân bằng một phương trình sai phân tương đương. Phép gần đúng này thường được dùng để giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng nhờ máy tính.

Đó với đạo hàm  $dy(t)/dt$  tại  $t = nT$  ta thay bằng phép sai phân lùi  $[y(nT) - y(nT - 1)]/T$ .  
Như vậy:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} &= \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} \\ &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ở đây  $T$  là khoảng lấy mẫu và  $y(n) \equiv y(nT)$ . Bộ vi phân tương tự với tín hiệu ra  $dy(t)/dt$  có hàm hệ thống  $H(s) = s$ , trong khi đó hệ thống số tạo ra tín hiệu ra  $[y(n) - y(n-1)]/T$  lại có hàm hệ thống là  $H(z) = (1 - z^{-1})/T$ . Do đó:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (6.29)$$

Do đó, hàm hệ thống của bộ lọc số IIR đạt được nhờ lấy gần đúng phép đạo hàm bằng phép sai phân hữu hạn là:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T} \quad (6.30)$$

$H_a(s)$  là hàm hệ thống của bộ lọc tương tự.

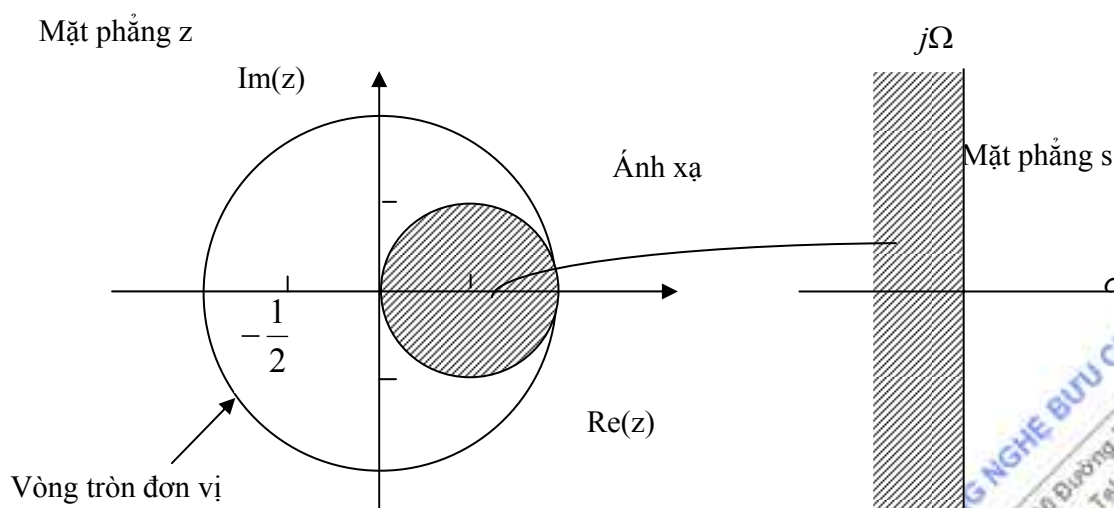
Ta hãy khảo sát phép nội suy của ánh xạ từ mặt phẳng  $s$  vào mặt phẳng  $z$  với

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (6.31)$$

Nếu thay  $s = j\Omega$  trong (6.30), ta tìm thấy:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - j\Omega T} \\ &= \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \end{aligned} \quad (6.32)$$

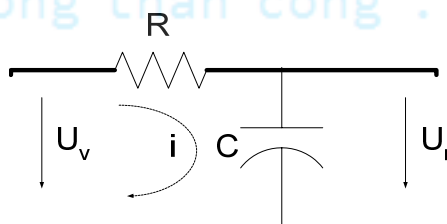
Khi  $\Omega$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $\infty$ , quỹ tích tương ứng của các điểm trong mặt phẳng  $z$  là một đường tròn bán kính  $\frac{1}{2}$  và có tâm tại  $z = \frac{1}{2}$ , như minh hoạ ở hình 6.2.



Hình 6.2 Ảnh xạ  $s = (1 - z^{-1})/T$  biến LHP trong mặt phẳng s thành các điểm nằm bên trong đường tròn bán kính 1/2 và tâm 1/2 trong mặt phẳng z.

### Ví dụ 6.3

Cho mạch điện tương tự:



Hãy chuyển sang mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân?

**Giải:**

$$H(z) = \frac{1}{RC \frac{1-z^{-1}}{T} + 1} = \frac{T}{RC - RCz^{-1} + T} = \frac{T}{RC + T - RCz^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{T}{A}}{1 - \frac{RC}{A}z^{-1}}; \quad A = RC + T_s$$

$$M = 0 \Rightarrow b_0 = \frac{T_s}{A} \quad N = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{RC}{A}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + (-a_1) y(n-1)$$

Sơ đồ hệ thống giống như ví dụ 6.1.

Sau đây chúng ta sẽ tổng hợp các bộ lọc tương tự theo các phương pháp sau. Mục đích là để xác định được hàm truyền đạt tương tự  $H_a(s)$ , người ta có 3 phương pháp tổng hợp là:

- Butterworth
- Chebyshev
- Elip hay Cauer

## 6.5. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ BUTTERWORTH

**Định nghĩa bộ lọc Butterworth:** Bộ lọc thông thấp Butterworth là loại toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng bình phương biên độ tần số.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (6.33)$$

ở đây  $N$  là cấp bộ lọc và  $\Omega_c$  là tần số ứng với mức -3dB của nó (thường gọi là tần số cắt). Vì  $H(s)H(-s)$  ước lượng tại  $s = j\Omega$  là đúng bằng  $|H(\Omega)|^2$ , nên

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2/\Omega_c^2)^N} \quad (6.34)$$

Các cực của  $H(s)H(-s)$  xuất hiện trên đường tròn bán kính  $\Omega_c$  tại các điểm cách đều. Từ (6.33), ta tìm được.

$$\frac{-s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

và từ đó:

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.35)$$

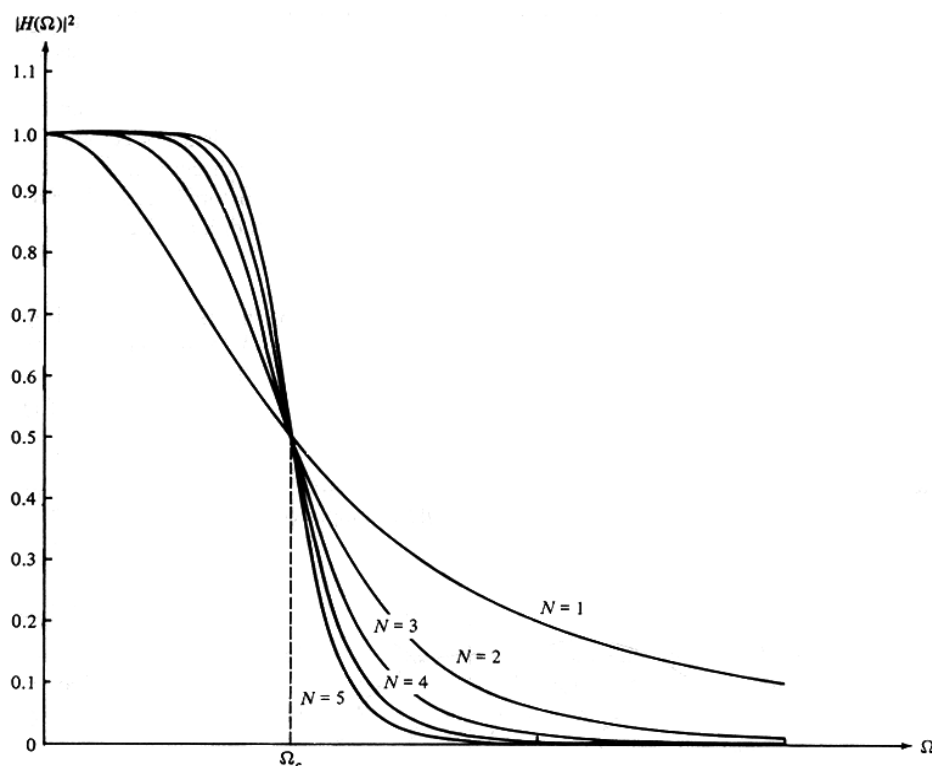
Đặc tuyến đáp ứng biên độ tần số của một lớp bộ lọc Butterworth được trình bày ở hình 6.3 với một vài giá trị  $N$ . Ta lưu ý rằng  $|H(\Omega)|^2$  là đơn điệu trong cả băng thông và băng chắn. Cấp bộ lọc, cần để đạt suy giảm  $\delta_2$  tại tần số đã định  $\Omega_s$ , được xác định một cách dễ dàng nhờ (6.35). Như vậy, tại  $\Omega = \Omega_s$  ta có:

$$\frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \delta_2^2$$

và vì thế:

$$N = \frac{\log_{10}[(1/\delta_2^2) - 1]}{2 \log_{10}(\Omega_s/\Omega_c)} \quad (6.36)$$

Nh vậy các tham số  $N$ ,  $\delta_2$  và tỷ số  $\Omega_s/\Omega_c$  là đặc trưng đầy đủ cho bộ lọc Butterworth.



Hình 6.3 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc

## 6.6. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CHEBYSHEV

Có hai loại bộ lọc Chebyshev. Loại I là bộ lọc toàn cực, nó biểu lộ độ gợn sóng đồng đều trong băng thông và có đặc tuyến đơn điệu trong băng chắn. Ngược lại, bộ lọc Chebyshev loại II gồm cả cực không, thể hiện tính đơn điệu trong băng thông và độ gợn sóng đều nhau trong băng chắn. Các điểm không của loại bộ lọc này nằm trên trục ảo thuộc mặt phẳng s.

Bình phương đặc tuyến đáp ứng biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại I là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)} \quad (6.37)$$

ở đây  $\epsilon$  là một tham số của bộ lọc, có liên quan đến gợn sóng trong băng thông;  $T_N(x)$  là đa thức Chebyshev bậc  $N$  và được định nghĩa như sau:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(N \cosh x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (6.38)$$

Có thể tổng quát hoá đa thức Chebyshev bằng phương trình đệ quy.

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \quad N = 1, 2, \dots \quad (6.39)$$

ở đây  $T_0(x) = 1$  và  $T_1(x) = x$ . Ta có  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ,  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

Các đa thức này có một số tính chất sau:



1.  $|T_N(x)| \leq 1$  với mọi  $|x| \leq 1$ .
2.  $T_N(1) = 1$  với mọi  $N$
3. Tất cả các nghiệm của đa thức  $T_N(x)$  xuất hiện trong khoảng  $-1 \leq x \leq 1$ .

Tham số  $\epsilon$  liên quan tới độ gợn sóng trong băng thông, như minh hoạ ở hình 8.48, với  $N$  lẻ và chẵn. Đối với  $N$  lẻ,  $T_N(0) = 0$  và do đó  $|H(0)|^2 = 1$ . Mặt khác, với  $N$  chẵn,  $T_N(0) = 1$  và do đó  $|H(0)|^2 = 1/(1 + \epsilon^2)$ . Tại tần số biên băng  $\Omega = \Omega_c$ , ta có  $T_N(1) = 1$ , bởi vậy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

hoặc tương đương

$$\epsilon^2 = \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \quad (6.40)$$

ở đây  $\delta_1$  là giá trị gợn sóng trong băng thông

Các cực của bộ lọc Chebyshev loại I nằm trên một elíp thuộc mặt phẳng  $s$  với trục chính là:

$$r_1 = \Omega_c \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad (6.41)$$

và trục đối xứng là:

$$r_2 = \Omega_c \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad (6.42)$$

ở đây  $\beta$  quan hệ với  $\epsilon$  theo phương trình

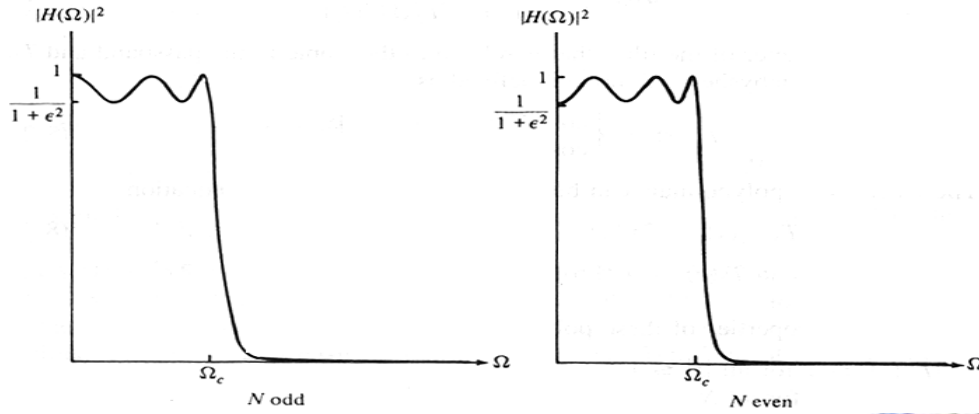
$$\beta = \left[ \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{\epsilon} \right]^{1/N} \quad (6.43)$$

Nếu ký hiệu vị trí góc của các cực bộ lọc Butterworth là:

$$\Phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.44)$$

thì các vị trí cực của bộ lọc Chebyshev sẽ nằm trên elíp tại các tọa độ  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , với

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos \Phi_k & k &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ y_k &= r_1 \sin \Phi_k & k &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6.45)$$



Hình 6.4 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại I

**Bộ lọc Chebyshev loại II** gồm cả các điểm không và các điểm cực.

Bình phương của đáp ứng biên độ tần số là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[ T_N^2(\Omega_s / \Omega_c) / T_N^2(\Omega_s / \Omega) \right]} \quad (6.46)$$

ở đây  $T_N(x)$  cũng là đa thức Chebyshev bậc  $N$  và  $\Omega_s$  là tần số băng chặn như chỉ ở hình 6.5.

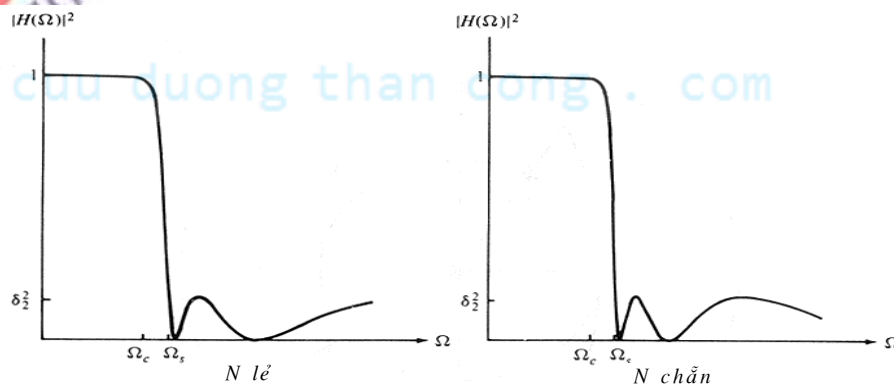
Các không được đặt trên trục ảo, tại các điểm:

$$s_k = j \frac{\Omega_s}{\sin \Phi_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.47)$$

Các điểm cực được đặt tại các tọa độ  $(v_k, w_k)$ , ở đây:

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.48)$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.49)$$



Hình 6.5 Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc Chebyshev loại II

### 6.7. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ ELIP (CAUER)

Bộ lọc elíp (hay Cauer) có gợn sóng đồng đều trong cả dải thông và dải chặn như minh họa ở hình 8.51 đối với cả  $N$  lẻ và chẵn. Loại bộ lọc này bao gồm cả điểm cực, điểm không và được đặc trưng bởi bình phương đáp ứng biên độ tần số như sau:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_c)} \quad (6.50)$$

ở đây  $U_N(x)$  là hàm elíp Jacobian bậc  $N$ , nó đã được Zverev tính theo phương pháp lập bảng năm 1967 và  $\epsilon$  là tham số liên quan tới độ gợn sóng dải thông. Các điểm không nằm trên trục  $j\Omega$ .

Như đã biết khi thảo luận về bộ lọc FIR, việc tổng hợp có hiệu quả nhất xuất hiện nếu ta trải đều sai số gần đúng suốt băng thông và băng chặn. Bộ lọc elíp thực hiện được mục tiêu này và chính vì thế là hiệu quả nhất theo quan điểm lấy bộ lọc cấp nhỏ nhất của tập chỉ tiêu đã cho. Nói khác đi, với một cấp và một tập chỉ tiêu đã cho, bộ lọc elíp có độ rộng băng chuyển tiếp nhỏ nhất.

Cấp bộ lọc cần thiết để đạt tập chỉ tiêu đã cho theo độ gợn sóng băng thông  $\delta_1$ , gợn sóng băng chặn  $\delta_2$ , tỷ số chuyển tiếp  $\Omega_c/\Omega_s$  được xác định như sau:

$$N = \frac{K(\Omega_c/\Omega_s) K \sqrt{1 - \delta_2^2} (1 + \epsilon^2) / \sqrt{1 - \delta_2^2}}{K(\epsilon \delta_2 / \sqrt{1 - \delta_2^2}) K(\sqrt{1 - (\Omega_c/\Omega_s)^2})} \quad (6.51)$$

ở đây  $K(x)$  là tích phân elíp đầy đủ loại một và được tính theo:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad (6.52)$$

Theo quan điểm bộ lọc elíp là tối ưu, người đọc có thể hỏi tại sao lại còn phải xét bộ lọc Butterworth hay Chebyshev trong các ứng dụng thực tiễn. Một lý do quan trọng là các loại bộ lọc này trong một số ứng dụng sẽ cho đặc tuyến đáp ứng pha tốt hơn. Trong băng thông đáp ứng pha của bộ lọc elíp không tuyến tính bằng bộ lọc Butterworth hoặc Chebyshev.

### TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 6

Trong chương này chúng ta đã đề cập đến phương pháp tổng hợp bộ lọc số IIR. Ta nhớ rằng bộ lọc này được xây dựng từ bộ lọc tương tự, tức là ta phải xác định được hàm truyền đạt tương tự  $H_a(s)$ , người ta có 3 phương pháp tổng hợp để xác định  $H_a(s)$ :

- Butterworth
- Chebyshev
- Elíp hay Cauer

Khi có được  $H_a(s)$  ta sẽ ánh xạ tương đương sang miền số để có được bộ lọc số IIR bằng 3 phương pháp sau:

- Phương pháp bất biến xung
- Phương pháp biến đổi song tuyến tính
- Phương pháp tương đương vi phân

Các nội dung chính chúng ta cần nhớ trong chương này là:

### 1. Phương pháp bất biến xung

Khi ta xác định được hàm truyền đạt tương tự của bộ lọc  $H_a(s)$ , ta sẽ đưa về dạng:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Sau đó hàm truyền đạt  $H(z)$  bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp bất biến xung như sau:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}}$$

### 2. Phương pháp biến đổi song tuyến tính

Hàm truyền đạt  $H(z)$  bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp biến đổi song tuyến tính từ  $H_a(s)$  theo ánh xạ sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

### 3. Phương pháp tương đương vi phân

Hàm truyền đạt  $H(z)$  bộ lọc số IIR sẽ được xác định theo phương pháp biến đổi tương đương vi phân từ  $H_a(s)$  theo ánh xạ sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

### 4. Bộ lọc Butterworth

Bộ lọc thông thấp Butterworth là loại toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng bình phương biên độ tần số.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

ở đây  $N$  là cấp bộ lọc và  $\Omega_c$  là tần số ứng với mức -3dB của nó (thường gọi là tần số cắt).

### 5. Bộ lọc Chebyshev

**Bộ lọc Chebyshev loại I:** Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại I là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ở đây  $\epsilon$  là một tham số của bộ lọc, có liên quan đến gợn sóng trong băng thông;  $T_N(x)$  là đa thức Chebyshev bậc  $N$  và được định nghĩa như sau:

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(Nchx) & |x| > 1 \end{cases}$$

**Bộ lọc Chebyshev loại II** gồm cả các điểm không và các điểm cực. Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại II là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ T_N^2(\Omega_S/\Omega_c) / T_N^2(\Omega_S/\Omega) \right]}$$

ở đây  $T_N(x)$  cũng là đa thức Chebyshev bậc  $N$  và  $\Omega_S$  là tần số băng chắn.

## 6. Bộ lọc Elip hay Cauer

Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Elip là:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ở đây  $U_N(x)$  là hàm elíp Jacobian bậc  $N$ ,

**Lưu ý:** Vì biến đổi tần số có thể được thực hiện trong miền tương tự hoặc trong miền số, nên khi tổng hợp bộ lọc số IIR ta phải chọn phương án hợp lý và cân nhắc đến loại bộ lọc cần tổng hợp. Cụ thể, phương pháp bất biến xung và ánh xạ đạo hàm là không thích hợp trong việc tổng hợp bộ lọc thông cao và nhiều bộ lọc thông dải, vì vấn đề lẫn mẫu. Thay vào đó, cần phải thực hiện ánh xạ từ bộ lọc tương tự vào bộ lọc số thông thấp bằng một trong hai phép ánh xạ này và sau đó thực hiện biến đổi tần số trong miền số. Làm như thế sẽ tránh được sự lẫn mẫu. Khi dùng biến đổi song tuyến tính, việc lẫn mẫu là không thành vấn đề và do đó việc thực hiện phép biến đổi tần số trong miền tương tự hay miền số là không quan trọng.

## CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 6

### Bài 6.1

Cho hàm truyền đạt bộ lọc tương tự:  $H_a(s) = \frac{1}{s+1}$

Hãy chuyển sang bộ lọc số bằng phương pháp tương đương vi phân với thời gian lấy mẫu  $T=0.1$

### Bài 6.2



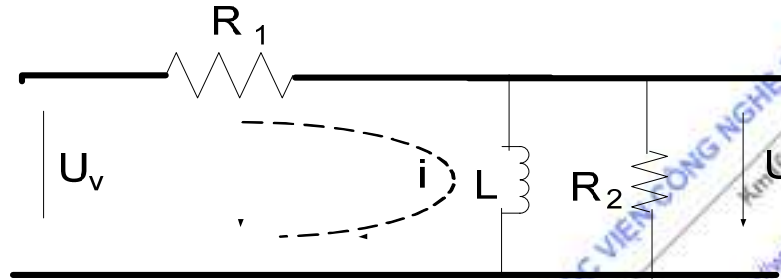
Biến đổi bộ lọc tương tự có hàm hệ thống:

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 9}$$

thành bộ lọc số IIR nhờ phương pháp bất biến xung.

### Bài 6.3

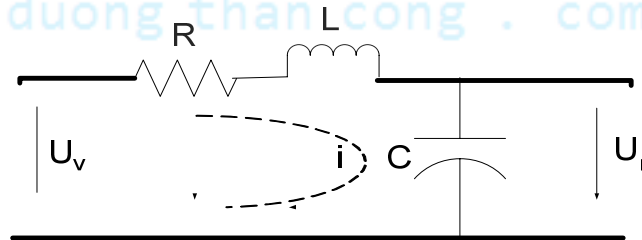
Cho mạch điện sau đây:



Hãy chuyển mạch này thành mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân

### Bài 6.4

Hãy chuyển bộ lọc tương tự sau sang bộ lọc số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.



### Bài 6.5

Xác định cấp và các cực của bộ lọc Butterworth thông thấp có độ rộng băng -3dB là 500Hz và độ suy giảm 40dB tại 1000Hz.

### Bài 6.6

Bộ lọc Butterworth được mô tả ở dạng như sau

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

$$\text{với các điểm cực } s_{pk} = e^{j\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n} \right)}$$

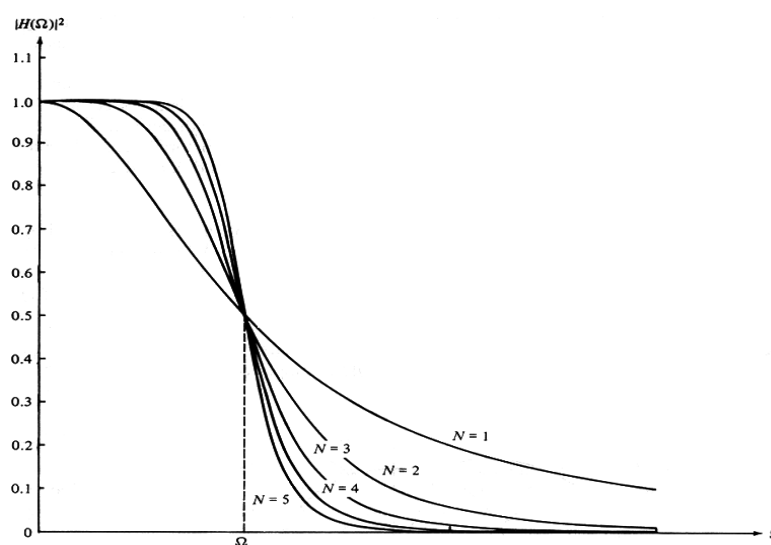
Trong đó  $H_0 = \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = 1$  (chuẩn hóa)

Hãy xác định hàm truyền đạt  $H_a(s)$  khi  $n=3$

### Bài 6.7



Đáp ứng biên độ tần số bộ lọc số IIR theo phương pháp Butterworth có dạng:



Hãy cho biết tham số  $N$  và tham số  $\Omega_c$  như hình vẽ là:

- a) bậc của bộ lọc và tần số dải chặn
- b) chiều dài của bộ lọc và tần số dải thông
- c) bậc của bộ lọc và tần số cắt
- d) chiều dài của bộ lọc và tần số cắt

#### Bài 6.8

Khi bậc  $N$  của bộ lọc Butterworth tăng lên thì:

- a) Chất lượng của bộ lọc được cải thiện.
- b) Chất lượng của bộ lọc giảm đi
- c) Chất lượng không phụ thuộc vào việc tăng bậc  $N$  của bộ lọc
- d) Chất lượng không bị ảnh hưởng chỉ có tần số cắt thay đổi.

#### Bài 6.9

Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Chebyshev loại I là:

$$a) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$b) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega_c/\Omega)}$$

$$c) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$d) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega_c/\Omega)}$$

#### Bài 6.10

Đáp ứng bình phương biên độ tần số của bộ lọc Elip là:

$$a) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$b) |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega_c/\Omega)}$$

$$\text{c) } |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_c)}$$

$$\text{d) } |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_c)}$$

ở đây  $U_N(x)$  là hàm elíp Jacobian bậc  $N$ .

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhx@e-ptit.edu.vn](mailto:dhx@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA

cuu duong than cong . com

## CHƯƠNG VII: BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH - FFT

### GIỚI THIỆU

Trọng tâm của chương này là các nội dung thực hiện biến đổi Fourier nhanh để tăng khả năng tính toán hiệu quả của phép tính DFT đã học trong chương 4. Trong nhiều thập kỷ, các thuật toán dạng biến đổi Fourier nhanh FFT (Fast Fourier Transform) rất được quan tâm của các nhà toán học. Tuy vậy phải cho đến tận khi Cooley và Tukey xuất bản bài báo nổi tiếng của mình thì sự ảnh hưởng và ý nghĩa của các tính toán hiệu quả của DFT mới được nhận ra. Kể từ đó, thuật toán FFT của Cooley và Tukey và nhiều dạng khác của nó, chẳng hạn như các tính toán của Singleton (1967, 1969), đã có một ảnh hưởng rất lớn trong việc sử dụng DFT để tính phép chập, độ tương quan, và phân tích phổ. Để biết thêm hoàn cảnh lịch sử của các thuật toán FFT ta có thể tham khảo bài báo của Cooley (1976).

Trải qua nhiều năm, đã có rất nhiều bài báo đề cập đến thuật toán FFT được xuất bản như các bài báo sớm nhất như của Brigham và Morrow (1967), của Cochran (1967), Bergland (1969), và Côtley (1969).

Việc nhận ra tính toán DFT có thể được sắp đặt và tính toán như một phép chập tuyến tính như đã nói trong chương 4 cũng có một ý nghĩa rất lớn. Goertzel (1968) đã chỉ ra rằng DFT có thể được tính toán một cách đệ quy, mặc dù hiệu quả trong tính toán của phương pháp này không đáng kể. Mang nhiều ý nghĩa hơn là công trình của Bluestein (1970), ông đã chỉ ra rằng việc tính toán DFT có thể được xem như hoạt động của bộ lọc chirp tuyến tính. Công trình này đã dẫn đến sự phát triển của thuật toán biến đổi chirp- $z$  của Rabiner. (1969). Nội dung của chương 7 này có nền tảng từ chương 4 với nền tảng là biến đổi Fourier rời rạc DFT.

Trong chương này chúng ta sẽ tập trung vào các vấn đề chính:

- + Cơ sở tính toán Fourier nhanh
- + Thuật toán FFT cơ sở 2
- + Thuật toán FFT cơ sở 4

### NỘI DUNG

#### 7.1. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH

Ta đã thấy rằng nhờ tính thuận lợi của các tính chất đối xứng hình học và tính chất tuần hoàn của các hệ số mũ  $W_N^{kn}$  trong các biểu diễn ở chương 4, ta có thể giảm số lượng phép nhân cần thiết cho tính toán DFT từ  $N^2$  xuống  $N \log_2 N$  khi  $N$  là số mũ cơ sở 2. Như ta cũng đã trình bày là bất cứ dãy nào cũng có thể được thêm vào các giá trị 0 để sao cho  $N = 2^V$ .

Để phát triển các thuật toán tính DFT với hiệu năng tính toán cao, người ta thường chia nhỏ liên tiếp sự phức tạp của DFT  $N$  điểm thành các DFT cấp nhỏ hơn và đưa ra một loạt các thuật toán tính có hiệu quả được gọi là tập các thuật toán biến đổi Fourier nhanh (FFT).

Chúng ta hãy xem xét việc tính toán một DFT  $N$  điểm, trong đó  $N$  có thể được phân tích thành tích của hai số nguyên, có nghĩa là:

$$N = LM \quad (7.1)$$

Nếu  $N$  là số nguyên tố, chúng ta có thể thêm một số các mẫu của dãy có giá trị bằng không để thỏa mãn (7.1).

Dãy  $x(n)$  có thể được lưu trong một mảng hai chiều theo các cách khác nhau tùy theo việc ánh xạ của chỉ số  $n$  cho các chỉ số  $(l, m)$ .

$l$  là chỉ số hàng  $0 \leq l \leq L-1$

$m$  là chỉ số cột  $0 \leq m \leq M-1$

Giả thiết rằng ta chọn ánh xạ:

$$n = Ml + m \quad (7.2)$$

Điều này dẫn đến một sự sắp xếp, trong đó hàng đầu tiên chứa  $M$  phần tử đầu tiên của dãy  $x(n)$ , hàng thứ hai chứa  $M$  phần tử tiếp theo của dãy  $x(n)$ , và cứ như vậy, như được minh họa như sau.

$\begin{matrix} M \\ \backslash \\ L \end{matrix}$	0	1	2	..	M-1
0	X(0)	X(1)	X(2)		X(M-1)
1	X(M)	X(M+1)	X(M+2)	..	X(2M-1)
2	X(2M)	X(2M+1)	X(2M+2)	..	X(3M-1)
:	:	:	:	:	:
L-1	X((L-1)M)	X((L-1)M+1)	X((L-1)M+2)	..	X(LM-1)

Một sự sắp xếp tương tự có thể được sử dụng để lưu các giá trị DFT được tính toán. Trong thực tế, việc ánh xạ được thực hiện từ chỉ số  $k$  thành hai chỉ số  $(p, q)$ , trong đó  $0 \leq p \leq L-1$  và  $0 \leq q \leq M-1$ . Nếu chúng ta lựa chọn cách ánh xạ:

$$k = Mp + q \quad (7.3)$$

thì DFT được lưu theo kiểu hàng, trong đó hàng đầu tiên chứa  $M$  phần tử đầu tiên của biến đổi DFT  $X(k)$ , hàng thứ hai chứa  $M$  phần tử tiếp sau, và cứ như vậy. Mặt khác nếu ta dùng ánh xạ:

$$k = qL + p \quad (7.4)$$

thì kết quả được lưu theo kiểu cột, trong đó  $L$  phần tử đầu tiên được chứa trong cột đầu tiên,  $L$  phần tử tiếp theo được chứa trong cột tiếp theo và cứ như vậy. Cách sắp xếp trên chính là cơ sở hình thành biến đổi FFT từ biến đổi DFT. Căn cứ vào cách sắp xếp như trên, bây giờ chúng ta giả sử  $x(n)$  được ánh xạ vào trong một mảng chữ nhật  $x(l, m)$  và  $X(k)$  được ánh xạ vào một ma trận chữ nhật tương ứng  $X(p, q)$ . Khi đó DFT có thể được biểu diễn như một tổng kép của các phần tử của mảng chữ nhật nhân với các hệ số pha (chính là hệ số  $W_N$ ) tương ứng. Cụ thể, chúng ta công nhận việc ánh xạ theo cột của dãy  $x(n)$  được cho trong (7.2) và việc ánh xạ theo hàng được cho trong (7.3). Khi đó ta có:

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)} \quad (7.5)$$

Nhưng

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)} = W_N^{MLmp} W_N^{mLq} W_N^{Mpl} W_N^{lq}$$

Tuy nhiên,  $W_N^{Nmp} = 1$ ,  $W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}$  và  $W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$

Với việc đơn giản hoá này, (7.5) có thể được biểu diễn như sau :

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp} \quad (7.6)$$

Biểu thức trong (7.5) liên quan đến việc tính toán các DFT có chiều dài  $M$  và  $L$ . Để đi vào chi tiết, ta chia nhỏ việc tính toán thành ba bước nhỏ:

1. Đầu tiên, chúng ta tính các DFT  $M$  điểm.

$$F(l, q) = \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq} \quad 0 \leq q \leq M-1 \quad (7.7)$$

với mỗi hàng  $l = 0, 1, 2, \dots, L-1$ .

2. Tiếp đó, chúng ta tính một mảng chữ nhật mới  $G(l, q)$  được xác định như sau:

$$G(l, q) = W_N^{lq} F(l, q) \quad \begin{matrix} 0 \leq l \leq L-1 \\ 0 \leq q \leq M-1 \end{matrix} \quad (7.8)$$

3. Cuối cùng, chúng ta tính toán các DFT  $L$  điểm.

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l, q) W_L^{lp} \quad (7.9)$$



với mỗi cột  $q = 0, 1, \dots, M-1$ , của mảng  $G(l, q)$ .

Nhìn qua ta thấy rằng, các thủ tục tính toán được chỉ ra ở trên phức tạp hơn việc tính DFT trực tiếp. Tuy nhiên, chúng ta hãy đánh giá độ phức tạp của tính toán trong (7.6). Bước đầu tiên liên quan đến việc tính toán  $L$  biến đổi DFT, mỗi DFT đó có độ lớn  $M$  điểm. Như thế là tại bước này cần  $LM^2$  phép nhân số phức và  $LM(M-1)$  phép cộng số phức. Bước thứ hai cần  $LM$  phép nhân số phức. Cuối cùng, ở bước thứ ba trong tính toán này cần  $ML^2$  phép nhân số phức và  $ML(L-1)$  phép cộng số phức. Do đó độ phức tạp của tính toán là:

Số phép nhân số phức :  $N(M+L+1)$

Số phép cộng số phức :  $N(M+L-2)$

trong đó  $N = ML$ . Như vậy, số phép nhân cần thực hiện được giảm từ  $N^2$  xuống còn  $N(M+L+1)$  và số phép cộng cần thực hiện cũng được giảm từ  $N(N-1)$  xuống  $N(M+L-2)$ .

Chẳng hạn, cho  $N = 1000$  và ta chọn  $L = 2$  và  $M = 500$ . Khi đó, thay vì phải thực hiện  $10^6$  phép nhân số phức trong cách tính toán DFT trực tiếp, thì trong phương án này chỉ phải thực hiện 503000 phép nhân số phức. Như vậy cách này đã làm giảm khối lượng tính toán xuống còn một nửa. Và số phép cộng cần thực hiện cũng được giảm một nửa.

Ta có thể sắp xếp lại tổng kép trong (7.6) và như vậy, dẫn đến một thuật toán khác cho việc tính DFT. Trong thực tế, bằng cách thay đổi lẫn nhau giữa trật tự tính tổng, ta có thể viết (7.6) thành :

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} [x(l, m) W_N^{lq}] W_L^{lp} \right\} W_M^{mq} \quad (7.10)$$

Từ đây, đưa ra thuật toán thứ 2 và ta có thể tóm tắt lại hai thuật toán như sau:

#### Thuật toán 1:

1. Lưu tín hiệu theo kiểu cột.
2. Tính toán DFT  $M$  điểm lần lượt cho mỗi hàng.
3. Nhân mảng kết quả với các hệ số pha  $W_N^{lq}$ .
4. Tính toán DFT  $L$  điểm lần lượt cho mỗi cột.
5. Đọc mảng kết quả theo kiểu hàng.

#### Thuật toán 2:

1. Lưu tín hiệu theo kiểu cột.
2. Nhân tín hiệu  $x(l, m)$  với các hệ số pha  $W_N^{lq}$ .
3. Tính toán DFT  $L$  điểm lần lượt cho mỗi cột.



4. Tính toán DFT  $M$  điểm lần lượt cho mỗi hàng.
5. Đọc mảng kết quả theo kiểu hàng.

Tất nhiên, trong các bước nêu ra ở trên thì bước đầu tiên là phân tích  $N$ . Chúng được lặp đi lặp lại với các hệ số phụ  $L$  và  $M$ .

Chúng ta có thể thu được hai thuật toán bổ xung với cùng một cấu trúc tương tự nếu tín hiệu vào được lưu theo kiểu hàng và tín hiệu ra được đọc theo kiểu cột. Trong trường hợp này chúng ta chọn :

$$\begin{aligned} n &= Ml + m \\ k &= qL + p \end{aligned} \quad (7.11)$$

Việc lựa chọn các chỉ số theo cách này dẫn đến công thức cho tính toán DFT có dạng:

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W_N^{pm} W_L^{pl} W_M^{qm} \quad (7.12)$$

Hai thuật toán bổ xung thu được từ hai cách khác nhau trong đó việc tính tổng có thể được sắp xếp lại. Các thuật toán đó là :

#### Thuật toán 3:

1. Lưu tín hiệu theo kiểu hàng.
2. Tính toán DFT  $L$  điểm lần lượt cho mỗi cột.
3. Nhân mảng kết quả với các hệ số pha  $W_N^{lq}$ .
4. Tính toán DFT  $M$  điểm lần lượt cho mỗi hàng.
5. Đọc mảng kết quả theo kiểu cột.

#### Thuật toán 4:

1. Lưu tín hiệu theo kiểu hàng.
2. Nhân tín hiệu  $x(l, m)$  với các hệ số pha  $W_N^{lq}$ .
3. Tính toán DFT  $M$  điểm lần lượt cho mỗi hàng.
4. Tính toán DFT  $L$  điểm lần lượt cho mỗi cột.
5. Đọc mảng kết quả theo kiểu cột.

Bốn thuật toán được đề cập trên đây có cùng độ phức tạp như nhau. Tuy nhiên chúng khác nhau trong cách sắp xếp các tính toán. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ tận dụng phương án chia và chặn vào các thuật toán tính nhanh khi cấp của DFT được hạn chế trong các dạng số mũ của 2 hoặc 4.

## 7.2. THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 2

Trong phần này chúng ta trình bày các thuật toán cơ số 2, nó được sử dụng nhiều hơn cả trong các thuật toán FFT. Thuật toán cơ số 4 cũng sẽ được trình bày trong phần sau.

Ta xem xét việc tính toán DFT với số điểm  $N = 2^V$  bằng phương pháp chia và hạn chế như đã được cụ thể hoá trong các biểu thức (7.7) đến (7.9). Chúng ta chọn  $M = N/2$  và  $L = 2$ . Sự lựa chọn này dẫn đến việc chia dãy số liệu  $N$  điểm thành hai dãy số liệu  $N/2$  điểm  $f_1(n)$  và  $f_2(n)$  tương ứng với các mẫu chẵn và lẻ của dãy  $x(n)$ , có nghĩa là:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(2n) \\ f_2(n) &= x(2n+1) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Do  $f_1(n)$  và  $f_2(n)$  có được bằng cách làm chia dãy  $x(n)$  bởi hệ số 2 nên kết quả là thuật toán FFT này được gọi là *thuật toán chia trong miền thời gian*.

Bây giờ DFT  $N$  điểm có thể được biểu diễn bằng tổng của các DFT của dãy số liệu được chia như sau:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{n \text{ chẵn}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n \text{ lẻ}} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nhưng  $W_N^2 = W_{N/2}$ . Với sự thay đổi này, (7.14) có thể được biểu diễn là:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km} \\ &= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (7.15)$$

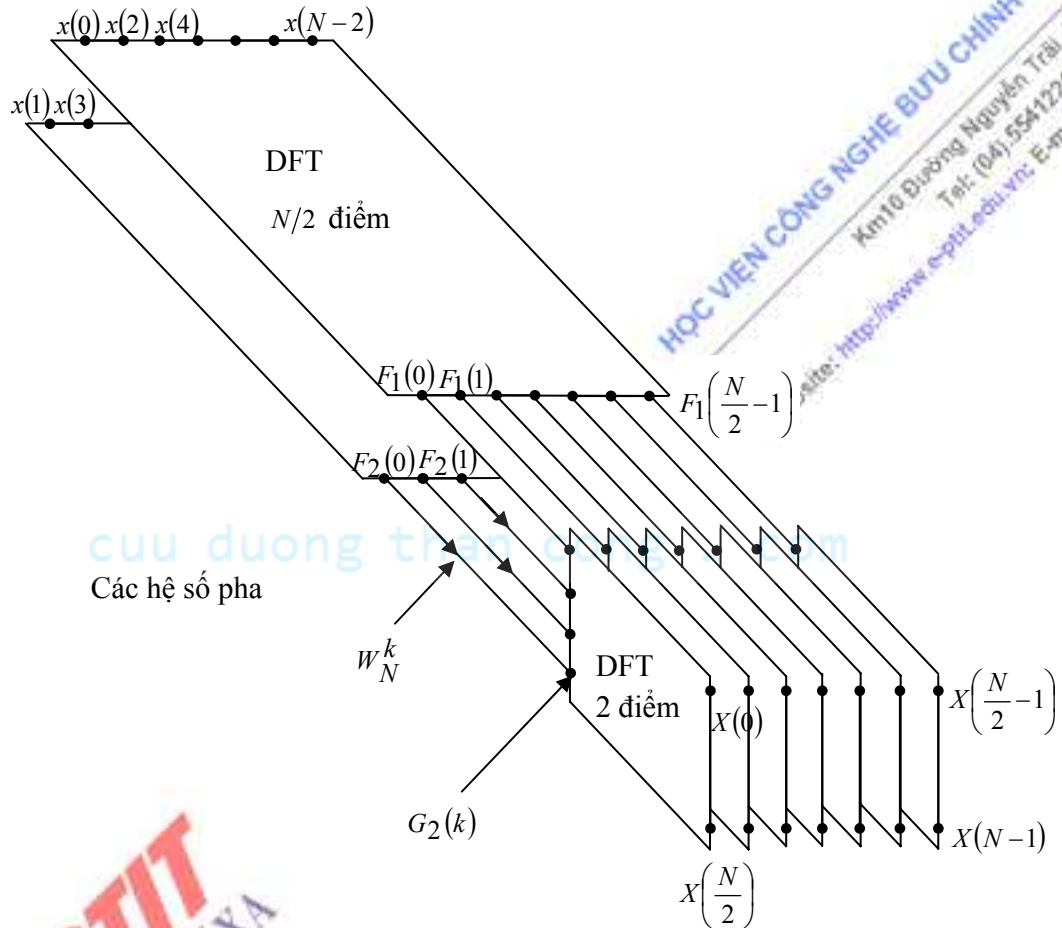
trong đó  $F_1(k)$  và  $F_2(k)$  là các DFT  $N/2$  điểm tương ứng của các dãy  $f_1(m)$  và  $f_2(m)$ .

Vì  $F_1(k)$  và  $F_2(k)$  là tuần hoàn với chu kỳ  $N/2$  nên ta có  $F_1(k + N/2) = F_1(k)$  và  $F_2(k + N/2) = F_2(k)$ . Hơn nữa, ta có  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ . Như vậy, (7.15) có thể viết:

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (7.16)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (7.17)$$

Chúng ta thấy rằng việc tính toán trực tiếp  $F_1(k)$  cần  $(N/2)^2$  phép nhân số phức. Số lượng phép nhân số phức cũng tương tự cho việc tính  $F_2(k)$ . Thêm nữa để tính toán  $W_N^k F_2(k)$  cần  $N/2$  phép cộng số phức. Do đó việc tính toán  $X(k)$  cần  $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$  phép nhân số phức. Trong bước đầu tiên này đã giảm được số phép nhân từ  $N^2$  xuống  $N^2/2 + N/2$ , mức giảm này cỡ khoảng 2 lần khi  $N$  lớn.



Hình 7.1. Bước đầu tiên trong thuật toán chia theo thời gian

Để thống nhất với các kí hiệu trước đây chúng ta định nghĩa

$$G_1(k) = F_1(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$G_2(k) = W_N^k F_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

thì DFT  $X(k)$  có thể viết là

$$\begin{aligned} X(k) &= G_1(k) + G_2(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= G_1(k) - G_2(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Việc tính toán này được minh họa trong hình 7.1.

Chúng ta đã thực hiện việc chia theo thời gian một lần, chúng ta có thể lặp lại quá trình này cho các dãy  $f_1(n)$  và  $f_2(n)$ . Do đó dãy  $f_1(n)$  được chia nhỏ thành 2 dãy  $N/4$  điểm :

$$\begin{aligned} v_{11}(n) &= f_1(2n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{12}(n) &= f_1(2n+1) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (7.19)$$

và  $f_2(n)$  cũng được chia thành hai dãy :

$$\begin{aligned} v_{21}(n) &= f_2(2n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ v_{22}(n) &= f_2(2n+1) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Bằng cách tính toán các DFT  $N/4$  điểm, chúng ta nhận được các DFT  $N/2$  điểm  $F_1(k)$  và  $F_2(k)$  từ các quan hệ :

$$\begin{aligned} F_1(k) &= V_{11}(k) + W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_1\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{11}(k) - W_{N/2}^k V_{12}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} F_2(k) &= V_{21}(k) + W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ F_2\left(k + \frac{N}{4}\right) &= V_{21}(k) - W_{N/2}^k V_{22}(k) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{aligned} \quad (7.22)$$

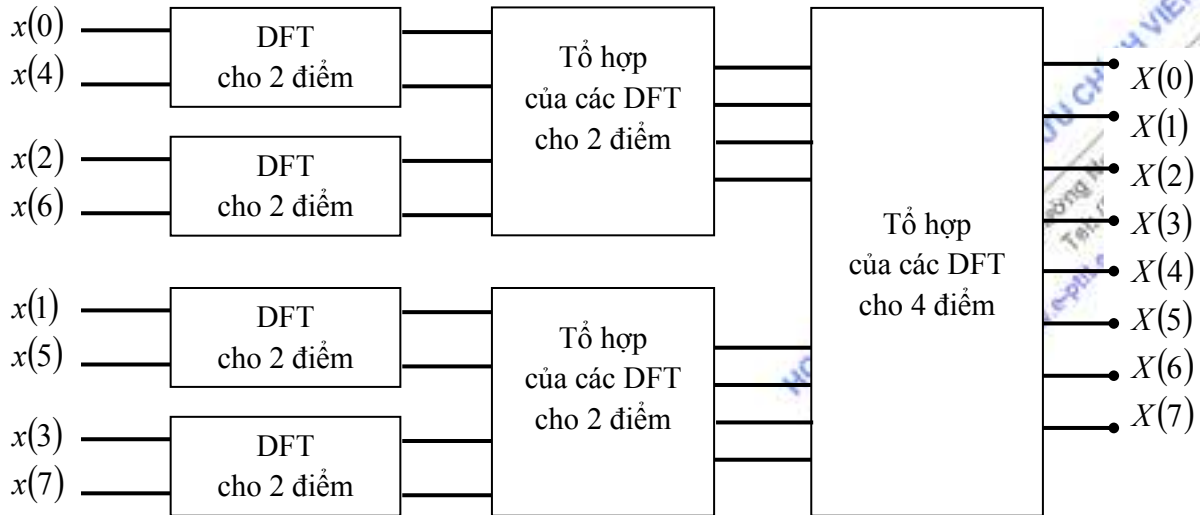
Trong đó  $\{V_{ij}(k)\}$  là các DFT của các dãy  $\{v_{ij}(n)\}$ .

Chúng ta thấy rằng việc tính  $\{V_{ij}(k)\}$  cần  $4(N/4)^2$  phép nhân và do đó việc tính  $F_1(k)$  và  $F_2(k)$  có thể được thực hiện bằng  $N^2/4 + N/2$  phép nhân số phức. Thêm nữa, cần  $N/2$  phép nhân số phức để tính toán  $X(k)$  từ  $F_1(k)$  và  $F_2(k)$ . Kết quả là tổng số phép nhân được giảm xuống xấp xỉ 2 lần nữa, xuống còn  $N^2/4 + N$ .

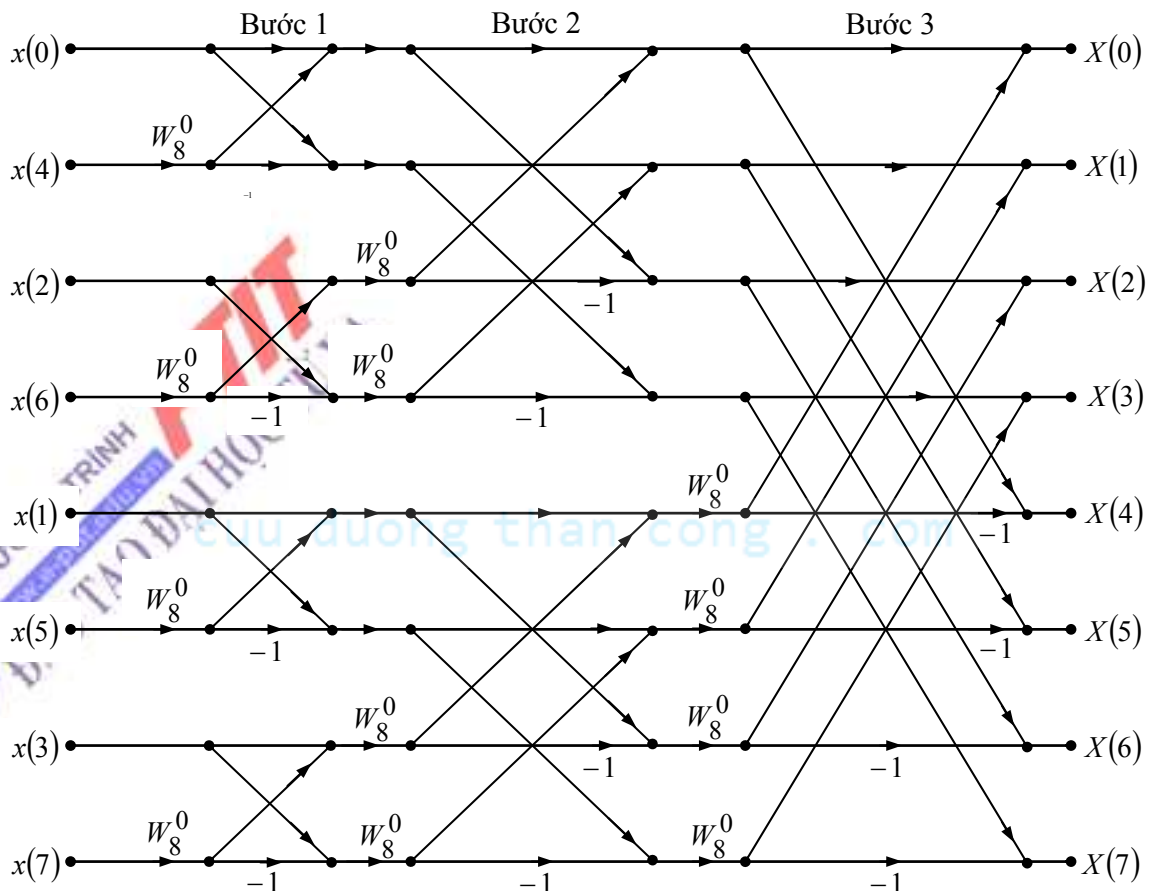
Việc chia dãy số liệu có thể lại tiếp tục được lặp đi lặp lại cho đến khi dãy cuối cùng được giảm đến còn một điểm. Với  $N = 2^v$ , việc chia này có thể được thực hiện  $v = \log_2 N$  lần. Như

vậy tổng số phép nhân số phức được giảm xuống còn  $(N/2)\log_2 N$ . Và số phép cộng số phức cũng được giảm xuống còn  $N \log_2 N$ .

Cũng với mục đích minh họa, hình 7.2 mô tả việc tính toán của một biến đổi DFT  $N = 8$  điểm. Ta thấy rằng việc tính toán được thực hiện theo ba mức, đầu tiên là tính 4 DFT 2 điểm, tiếp theo là tính 2 DFT 4 điểm, và cuối cùng là tính một DFT 8 điểm.



Hình 7.2. Ba giai đoạn trong việc tính DFT cho  $N = 8$  điểm

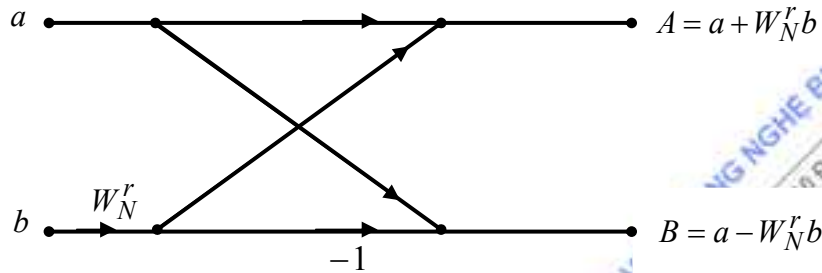


Hình 7.3. Thuật toán FFT 8 điểm chia theo thời gian



Việc kết hợp các DFT nhỏ hơn thành DFT cấp lớn hơn được minh họa trong hình 7.3 với  $N = 8$ .

Như minh họa trong hình 7.3 ta thấy rằng các tính toán cơ bản, được lặp đi lặp lại ở tất cả các bước, phải được tiến hành trên hai số phức, gọi là cặp số  $(a, b)$ , nhân  $b$  với  $W_N^r$ , và sau đó cộng và trừ với tích của  $a$  để tạo thành hai số phức mới  $(A, B)$ . Theo hình vẽ 7.4, ta thấy việc tính toán cơ bản này được gọi là một cánh bướm bởi vì lưu đồ đó rất giống một cánh bướm.



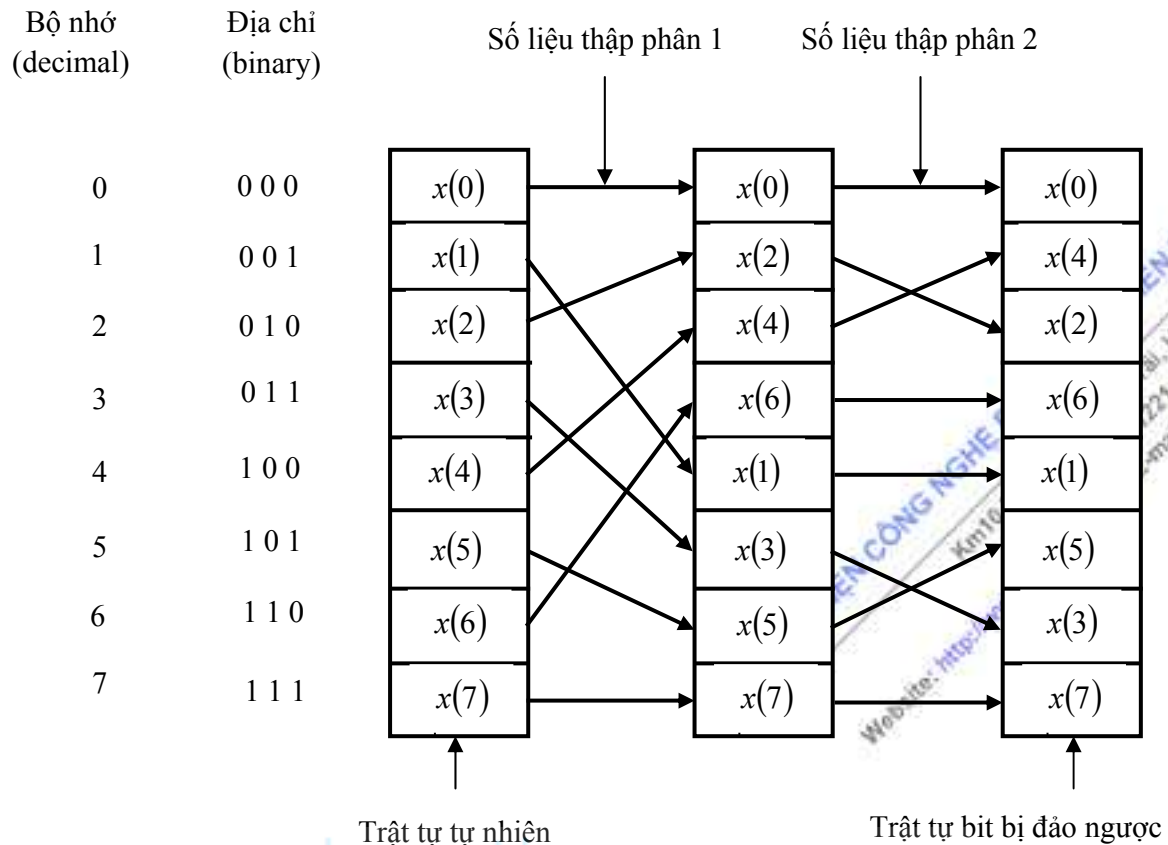
**Hình 7.4. Phép tính cánh bướm cơ bản trong thuật toán FFT thập phân theo thời gian**

Với  $N = 2^v$  thì có  $N/2$  cánh bướm cho mỗi bước tính trong quá trình tính toán và có tổng cộng là  $\log_2 N$  bước.

Một điểm quan trọng thứ hai cần quan tâm là trật tự của của dãy số liệu đầu vào sau khi nó được chia nhỏ  $(v-1)$  lần. Chẳng hạn, nếu chúng ta xem xét trường hợp mà trong đó  $N = 8$ , thì trong lần chia nhỏ lần đầu tiên chúng ta nhận được dãy  $x(0), x(2), x(4), x(6), x(1), x(3), x(5), x(7)$ , và trong lần chia nhỏ thứ hai ta nhận được dãy  $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$ . Sự đảo lộn của dãy tín hiệu đầu vào này có một trật tự hoàn toàn xác định và ta có thể thấy trong hình 7.5, nó minh họa việc chia nhỏ dãy số liệu đầu vào 8 điểm. Trong dãy  $x(n)$ , bằng việc biểu thị chỉ số  $n$  ở dạng nhị phân, ta dễ dàng tìm thấy trật tự của dãy số liệu được chia nhỏ bằng cách đọc số nhị phân biểu thị chỉ số  $n$  theo chiều đảo ngược. Do đó, điểm số liệu  $x(3) = x(011)$  được xếp trong vị trí  $m = 110$  hoặc  $m = 6$  trong mảng số liệu được chia nhỏ. Như vậy, có thể nói rằng dữ liệu  $x(n)$  sau khi chia nhỏ được lưu theo trật tự đảo bit.

Với dãy số liệu đầu vào được lưu theo trật tự đảo bit và việc tính toán cánh bướm được thực hiện tại chỗ thì dãy kết quả DFT  $X(k)$  nhận được theo trật tự bình thường (nghĩa là  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ). Ngược lại, ta có thể sắp xếp thuật toán FFT sao cho dãy đầu vào theo trật tự bình thường và kết quả đầu ra DFT sẽ theo trật tự đảo bit. Hơn nữa, ta có thể sắp đặt để hạn chế cả hai dãy số liệu đầu vào  $x(n)$  và dãy đầu ra  $X(k)$  theo trật tự bình thường, và như vậy sẽ tạo ra một thuật toán FFT, trong đó việc tính toán không còn được thực hiện tại chỗ nữa. Và do đó thuật toán như vậy phải cần thêm vùng nhớ để lưu trữ.





$$(n_2 n_1 n_0) \rightarrow (n_0 n_2 n_1) \rightarrow (n_0 n_1 n_2)$$

(000)	→	(000)	→	(000)
(001)	→	(100)	→	(100)
(010)	→	(001)	→	(010)
(011)	→	(101)	→	(110)
(100)	→	(010)	→	(001)
(101)	→	(110)	→	(101)
(110)	→	(011)	→	(011)
(111)	→	(111)	→	(111)

Hình 7.5. Sắp xếp lại trật tự số liệu và đảo bit

Một thuật toán FFT cơ sở 2 khác được gọi là thuật toán chia nhỏ theo tần số, thuật toán này có thể nhận được với việc chọn  $M = 2$  và  $L = N/2$ . Lựa chọn các tham số này có nghĩa là việc lưu dãy tín hiệu đầu vào theo kiểu cột. Để tạo ra thuật toán này, ta cũng bắt đầu bằng việc tách công thức tính DFT thành hai tổng, trong đó một tổng liên quan đến việc tính tổng của  $N/2$  điểm số liệu đầu tiên và tổng thứ hai liên quan đến việc tính tổng của  $N/2$  điểm số liệu còn lại. Do đó, ta nhận được :

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{kn} + W_N^{Nk/2} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right)W_N^{kn}
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Vì  $W_N^{kN/2} = (-1)^k$ , nên biểu thức (7.23) có thể viết lại như sau :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[ x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \tag{7.24}$$

Bây giờ, ta tách (chia nhỏ)  $X(k)$  thành các mẫu chẵn và các mẫu lẻ. Khi đó chúng ta nhận được :

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \tag{7.25}$$

và

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \tag{7.26}$$

ở đây sử dụng nhận xét  $W_N^2 = W_{N/2}$ .

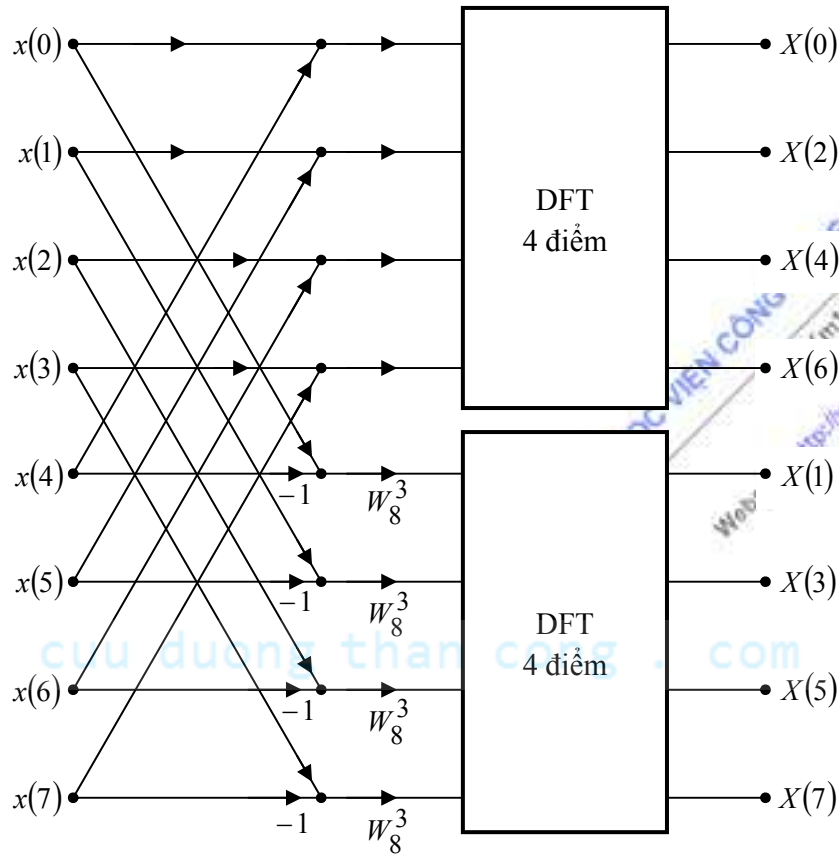
Nếu định nghĩa các dãy  $N/2$  điểm  $g_1(n)$  và  $g_2(n)$  như sau :

$$\begin{aligned}
 g_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\
 g_2(n) &= \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

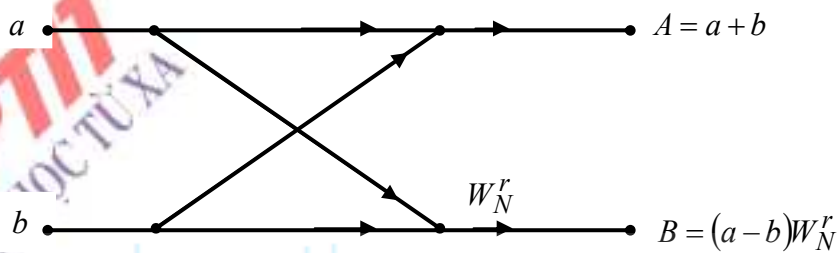
Khi đó thì:

$$\begin{aligned}
 X(2k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n)W_{N/2}^{kn} \\
 X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n)W_{N/2}^{kn}
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Việc tính toán các dãy  $g_1(n)$  và  $g_2(n)$  theo công thức (7.27) và tiếp đến sử dụng những dãy này để tính toán các DFT  $N/2$  điểm được mô tả trong hình vẽ 7.6. Chúng ta thấy rằng việc tính toán cơ bản trong minh họa này có liên quan đến việc thực hiện cánh bướm được trình bày trong hình vẽ 7.7.



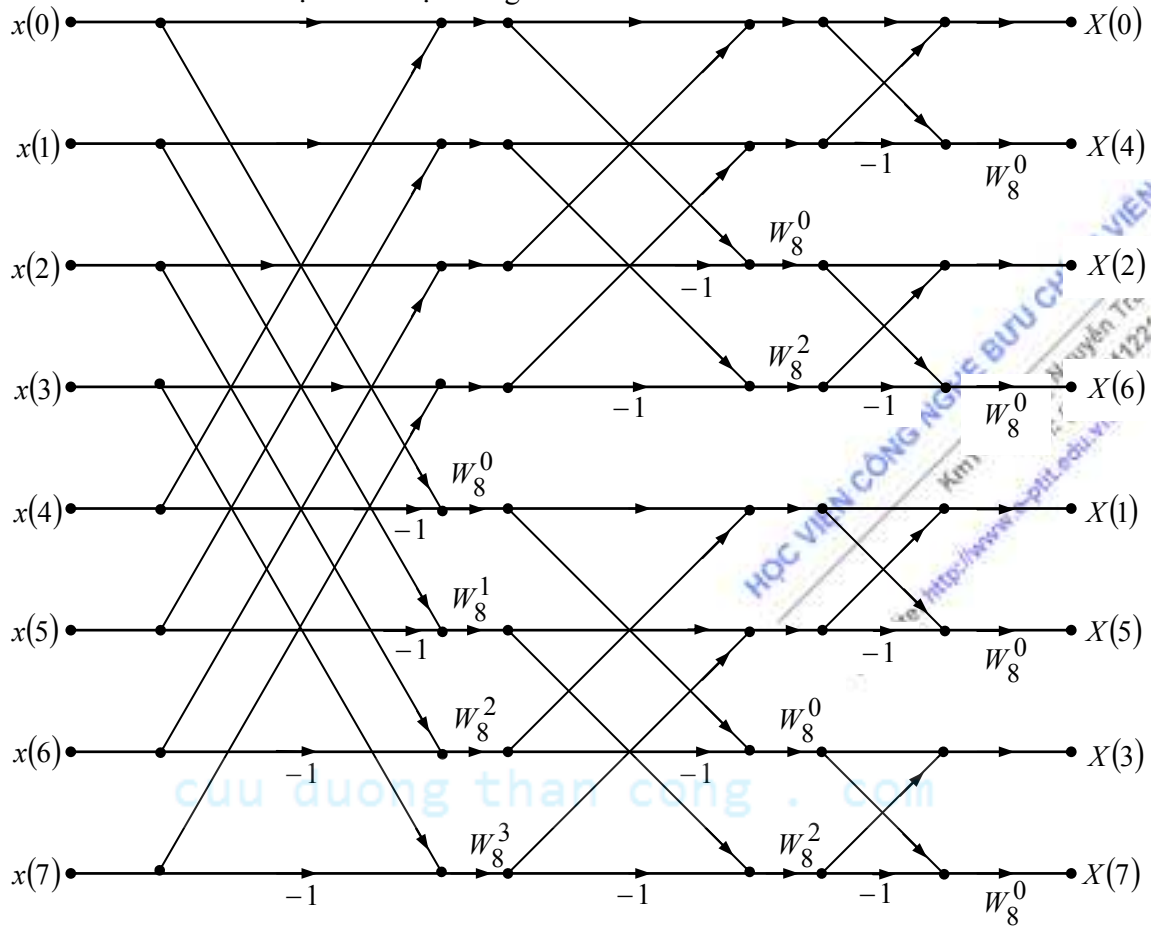
Hình 7.6. Bước đầu tiên của thuật toán FFT chia theo tần số



Hình 7.7. Phép tính cánh bướm cơ bản trong thuật toán FFT chia theo tần số

Thủ tục tính toán ở trên có thể được lặp đi lặp lại qua việc chia nhỏ của các DFT  $N/2$  điểm của các dãy  $X(2k)$  và  $X(2k+1)$ . Toàn bộ quá trình cần  $v = \log_2 N$  bước chia nhỏ, trong đó mỗi bước cần  $N/2$  cánh bướm như trình bày trong hình 7.7. Kết quả là việc tính toán DFT  $N$  điểm qua thuật toán FFT chia theo tần số cần  $(N/2)\log_2 N$  phép nhân số phức và  $N \log_2 N$

phép cộng số phức, và cũng giống như với thuật toán FFT chia theo thời gian. Thuật toán FFT chia theo tần số 8 điểm được minh họa trong hình 7.8.



Hình 7.8. Thuật toán FFT  $N = 8$  điểm chia theo tần số

Từ hình 7.8, ta thấy rằng dãy số liệu đầu vào theo trật tự bình thường nhưng dãy số liệu đầu ra có trật tự bị đảo ngược. Ta cũng thấy rằng, các tính toán được thực hiện tại chỗ. Tuy nhiên, có thể tổ chức lại thuật toán FFT chia theo tần số sao cho dãy số liệu đầu vào có trật tự bình thường trong khi đó đầu ra DFT có trật tự bình thường.

Hơn nữa, nếu chúng ta không quan tâm đến việc tính toán cần phải thực hiện tại chỗ thì chúng ta có thể cho phép cả hai dãy số liệu đầu vào và đầu ra DFT theo trật tự bình thường.

### 7.3. THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 4

Khi số điểm số liệu  $N$  trong tính toán DFT là số mũ cơ số 4 (tức là  $N = 4^v$ ), tất nhiên là ta luôn có thể sử dụng thuật toán cơ số 2 để tính toán, nhưng trong trường hợp này, việc tính toán sẽ có hiệu quả hơn khi chúng ta sử dụng thuật toán FFT cơ số 4.

Ta bắt đầu bằng việc mô tả thuật toán FFT cơ số 4 chia theo thời gian, thuật toán nhận được bằng cách lựa chọn  $L = 4$  và  $M = N/4$  như đã được trình bày trong phần 7.2. Với lựa chọn này, ta có  $l, p = 0, 1, 2, 3$ ;  $m, q = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ ;  $n = 4m + l$ ; và  $k = (N/4)p + q$ . Từ đó, ta chia

hoặc tách dãy số liệu đầu vào  $N$  điểm thành 4 dãy số liệu con  $x(4n)$ ,  $x(4n+1)$ ,  $x(4n+2)$ ,  $x(4n+3)$  với  $n = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ .

Bằng cách áp dụng (7.15), ta nhận được :

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^3 [W_N^{lq} F(l, q)] W_4^{lp} \quad p = 0, 1, 2, 3 \quad (7.29)$$

trong đó  $F(l, q)$  được xác định:

$$F(l, q) = \sum_{m=0}^{(N/4)-1} x(l, m) W_{N/4}^{mq} \quad \begin{matrix} l = 0, 1, 2, 3 \\ q = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{matrix} \quad (7.30)$$

và

$$x(l, m) = x(4m + l) \quad (7.31)$$

$$X(p, q) = X\left(\frac{N}{4}p + q\right) \quad (7.32)$$

Vì thế, 4 DFT  $N/4$  điểm nhận được từ (7.30) kết hợp theo (7.29) để tạo thành DFT  $N$  điểm. Biểu thức trong (7.29) biểu diễn việc kết hợp các DFT  $N/4$  điểm xác định một lưu đồ cánh bướm chia theo thời gian cơ sở 4, trong đó có thể biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} X(0, q) \\ X(1, q) \\ X(2, q) \\ X(3, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0, q) \\ W_N^q F(1, q) \\ W_N^{2q} F(2, q) \\ W_N^{3q} F(3, q) \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Lưu đồ cánh bướm cơ sở 4 được minh họa trong hình 7.9a và dạng rút gọn được minh họa trong hình 7.9b. Chú ý rằng, do  $W_N^0 = 1$  nên mỗi cánh bướm cần 3 phép nhân số phức và 12 phép cộng số phức.

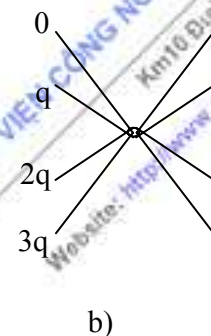
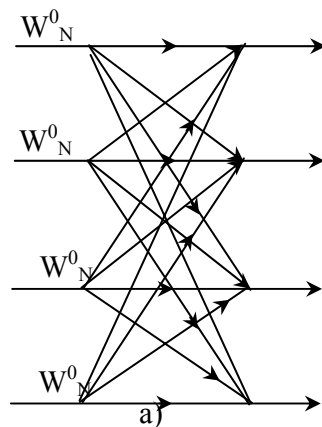
Thủ tục chia theo thời gian trình bày ở trên có thể được đệ qui  $v$  lần. Do đó thuật toán FFT có  $v$  bước, trong đó mỗi bước chứa  $N/4$  lưu đồ cánh bướm. Kết quả là nhiệm vụ của việc tính toán theo thuật toán này là  $3vN/4 = (3N/8)\log_2 N$  phép nhân số phức và  $(3N/2)\log_2 N$  phép cộng số phức. Ta thấy rằng số phép nhân được giảm 25%, nhưng số lượng phép cộng lại tăng 50% từ  $N\log_2 N$  lên  $(3N/2)\log_2 N$ .

Tuy nhiên, vẫn đáng chú ý là bằng việc thực hiện các phép cộng theo hai bước, ta có thể giảm số phép cộng của mỗi lưu đồ cánh bướm từ 12 xuống 8. Việc giảm này có thể được thực hiện bằng việc biểu diễn dạng ma trận của chuyển đổi tuyến tính trong (7.33) thành một tích của hai ma trận như sau:

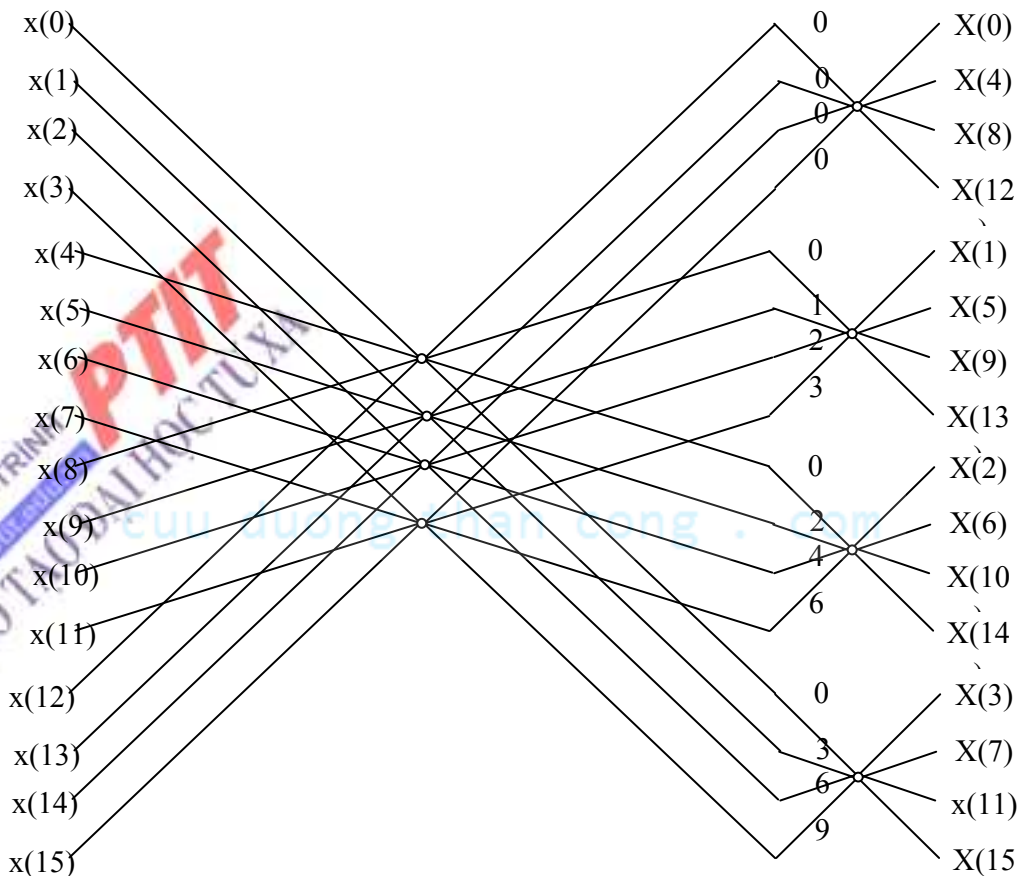


$$\begin{bmatrix} X(0, q) \\ X(1, q) \\ X(2, q) \\ X(3, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0, q) \\ W_N^q F(1, q) \\ W_N^{2q} F(2, q) \\ W_N^{3q} F(3, q) \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Bây giờ mỗi phép nhân ma trận cần đến 4 phép cộng, cho toàn bộ hai ma trận là 8 phép cộng. Từ đó tổng số phép cộng số phức được giảm xuống. Tính ưu điểm của thuật toán này chính là ở chỗ giảm được 25% số lượng phép nhân số phức cần phải thực hiện.



Hình 7.9. Lưu đồ tính toán cánh bướm cơ bản trong thuật toán FFT cơ số 4



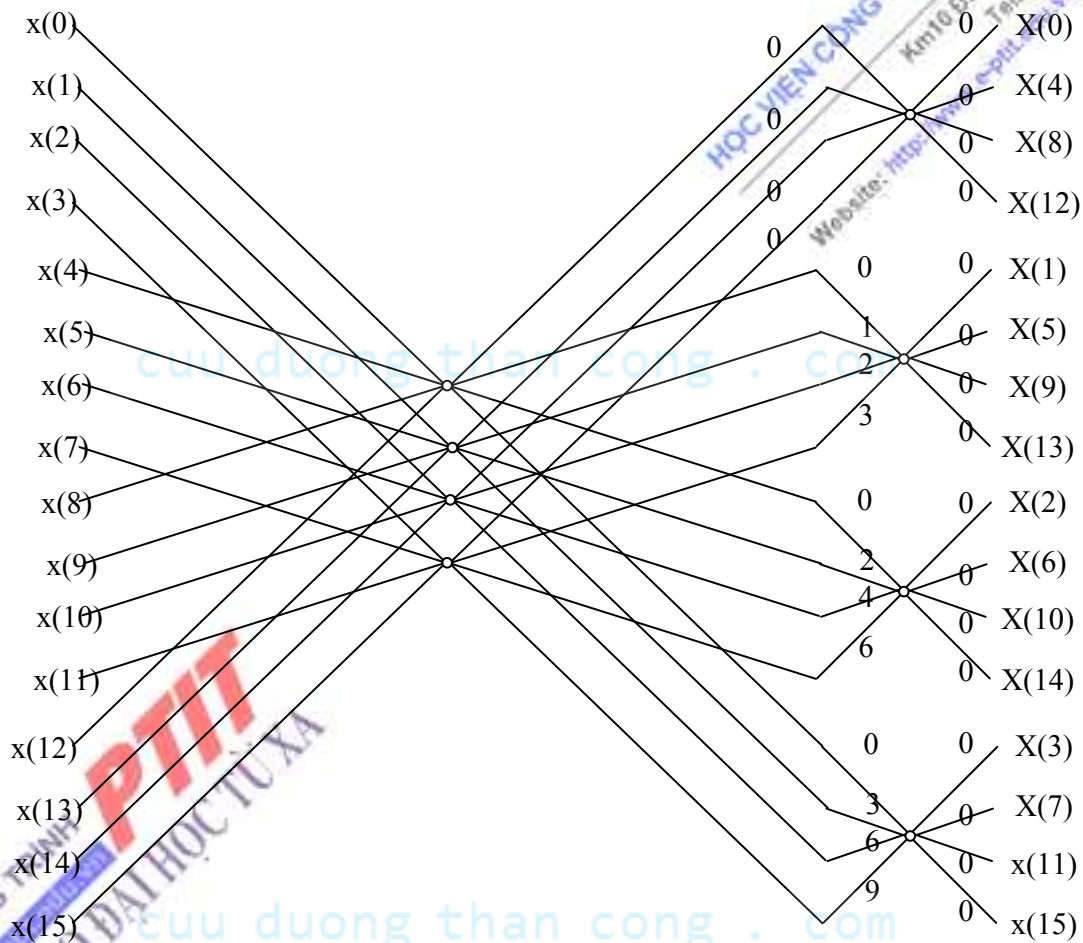
Hình 7.10. Thuật toán phân chia theo thời gian cơ số 4 cho biến đổi 16 điểm có đầu vào theo trật tự bình thường và đầu ra có trật tự bị đảo bit



Mình hoạ cho thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo thời gian với  $N = 16$  được trình bày trong hình vẽ 7.10. Chú ý rằng trong thuật toán này dãy số liệu đầu vào có trật tự bình thường còn dãy đầu ra DFT bị đảo trật tự. Trong thuật toán FFT cơ sở 4 việc chia được thực hiện theo hệ số 4 nên trật tự của dãy được chia có thể được xác định bằng việc đảo trật tự của các chỉ số  $n$  theo cụm 4 (tức là hệ thống số lập từ các số 0,1,2,3).

Thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo tần số có thể nhận được bằng việc lựa chọn  $l = N/4, M = 4, l; p = 0, 1, \dots, N/4 - 1; m, q = 0, 1, 2, 3; n = (N/4)m + l$  và  $k = 4p + q$ . Với việc lựa chọn các tham số này biểu thức tổng quát cho trong (7.6) có thể viết là :

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} G(l, q) W_{N/4}^{lp} \quad (7.35)$$



**Hình 7.11. Thuật toán phân chia theo tần số cơ sở 4 cho biến đổi 16 điểm có đầu vào theo trật tự bình thường và đầu ra có trật tự bị đảo bit**

trong đó

$$G(l, q) = W_N^{lq} F(l, q) \quad \begin{matrix} q = 0, 1, 2, 3 \\ l = 0, 1, \dots, (N/4) - 1 \end{matrix} \quad (7.36)$$

và

$$F(l, q) = \sum_{m=0}^3 x(l, m) W_4^{mq} \quad q = 0, 1, 2, 3 \quad (7.37)$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, (N/4) - 1$$

Ta chú ý rằng  $X(p, q) = X(4p + q)$ ,  $q = 0, 1, 2, 3$ . Kết quả là DFT  $N$  điểm được chia nhỏ thành 4 DFT  $N/4$  điểm và như vậy là ta đã có một thuật toán chia theo tần số. Các tính toán trong (7.36) và (7.37) định ra lưu đó cánh bướm cơ sở 4 cơ sở của thuật toán chia theo tần số. Chú ý rằng tương tự như thuật toán FFT cơ sở 2 chia theo tần số, các phép nhân với hệ số  $W_N^{lq}$  xảy ra sau việc kết hợp các điểm số liệu  $x(l, m)$ .

Một thuật toán cơ sở 4 chia theo tần số thực hiện với 16 điểm được trình bày trong hình vẽ 7.11. Trong đó đầu vào của thuật toán này có trật tự bình thường còn đầu ra của nó có trật tự đảo ngược. Thuật toán này cũng có cùng độ phức tạp như với thuật toán chia theo thời gian.

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 7

Các thuật toán FFT được trình bày có thể thấy trong rất nhiều ứng dụng trong thực tế, bao gồm trong các bộ lọc tuyến tính, phân tích tương hỗ, và phân tích phổ. Về cơ bản, thuật toán FFT được sử dụng như một phương tiện hiệu quả về hiệu năng tính toán cho việc thực hiện DFT và IDFT.

Trong chương này, chúng ta lưu ý rằng biến đổi Fourier nhanh hình thành nhờ biến đổi Fourier rời rạc do DFT và IDFT về cơ bản là cùng một dạng tính toán hơn nữa ở đây ta tận dụng được tính đối xứng và tính chu kỳ của các hệ số  $W_N$  hay còn được gọi là các tính chất về pha

$$\text{Tính đối xứng : } W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

$$\text{Tính tuần hoàn : } W_N^{k+N} = W_N^k$$

Các thuật toán tính hiệu quả được trình bày trong chương này được coi là một tập hợp các thuật toán biến đổi Fourier nhanh, những thuật toán này tận dụng được hai tính chất về pha đã nói ở trên.

Trong chương này chúng ta cần phải nắm vững các kiến thức về:

1. Cách xây dựng thuật toán FFT.
2. Thuật toán FFT cơ sở 2.
3. Thuật toán FFT cơ sở 4.
4. Cách thực hiện thuật toán.

Các kiến thức trên đã được trình bày tương đối kỹ trong phần nội dung nhằm giúp cho người đọc có thể hình dung rõ nét về thuật toán FFT.

Ngoài ra, khi hoàn thành xong kiến thức trong chương này, chúng ta cần phải lưu ý một số điểm sau:

Các thuật toán FFT phân tần số và FFT phân thời gian theo đồ hình cánh bướm có số lượng các bước giống hệt nhau, vì vậy số phép toán bao gồm phép nhân và cộng là như nhau dẫn đến hiệu quả của thuật toán là như nhau.

Đối với thuật toán FFT phân tần số đầu vào của đồ hình cánh bướm sẽ sắp xếp thứ tự theo mã nhị phân tự nhiên, còn đầu ra của nó sẽ sắp xếp theo luật đảo bit của đầu vào. Còn đối với thuật toán FFT phân thời gian thì ngược lại, đầu vào thì sắp xếp theo quy luật mã nhị phân tự nhiên, còn đầu ra sắp xếp theo quy luật đảo bit.

Khi thực hiện thuật toán, trên thực tế, nếu ta thực hiện thuật toán chia theo thời gian, thuật toán mà được trình bày trong phần 7.3, rồi đảo chiều của lưu đồ, thay đổi dấu trên các hệ số pha, hoán chuyển đầu ra với đầu vào, và cuối cùng chia đầu ra cho  $N$  thì ta nhận được thuật toán FFT chia theo tần số cho việc tính toán IDFT. Ngược lại, nếu ta bắt đầu với thuật toán chia theo tần số, thuật toán mà được trình bày trong phần 7.3 và lặp lại các thay đổi như đã trình bày ở trên thì ta nhận được thuật toán FFT chia theo thời gian cho việc tính toán IDFT. Do đó vấn đề rất là đơn giản trong việc tạo ra các thuật toán FFT cho việc tính toán IDFT.

Cuối cùng, ta cần chú ý rằng điểm chính trong chương này về các thuật toán FFT là các thuật toán FFT cơ sở 2 và cơ sở 4. Đây là những thuật toán vẫn được sử dụng rộng rãi trong thực tế cho đến ngày nay. Khi số điểm số liệu không phải là dạng số mũ cơ sở 2 hoặc 4 thì ta đơn giản là thêm dãy số 0 vào dãy  $x(n)$  sao cho  $N = 2^V$  hoặc  $N = 4^V$ .

Bên cạnh các thuật toán FFT được trình bày ở trên còn có các thuật toán hiệu quả khác để tính DFT, một số trong các thuật toán này giảm nhỏ thêm được số lượng phép nhân, nhưng các thuật toán này thường yêu cầu thêm số lượng phép cộng cần phải thực hiện. Một thuật toán cực kỳ quan trọng là thuật toán của Rader và Brenner, và các thuật toán thuộc lớp thuật toán hệ số nguyên tố, chẳng hạn như thuật toán Good (1971), và thuật toán Winograd (1976, 1978). Ta có thể tham khảo bài viết của Blahut (1985) để biết các mô tả của các thuật toán này và các thuật toán liên quan.

**Bảng so sánh độ phức tạp của tính toán DFT trực tiếp và thực hiện FFT**

Số điểm $N$	Số phép nhân trong tính toán trực tiếp	Số phép nhân trong tính toán bằng thuật toán FFT	Hệ số cải thiện tốc độ
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64.0
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 7

### Bài 7.1

Hãy tính toán DFT với  $N = 15$  điểm bằng tích của các DFT 3 điểm và 5 điểm.

### Bài 7.2

Chứng minh rằng mỗi số

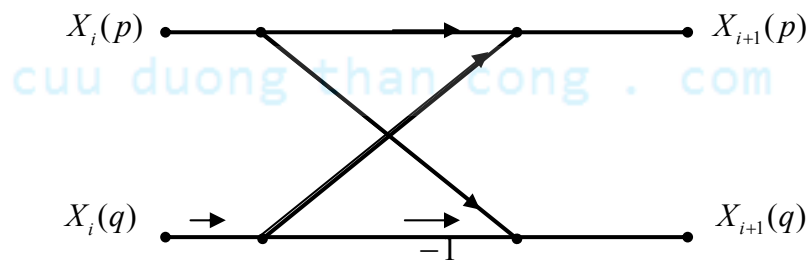
$$e^{j(2\pi/N)k} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

trùng với một căn bậc  $N$  của đơn vị. Về những số này ở dạng các pha trong mặt phẳng phức và minh họa tính chất trực giao bằng cách sử dụng nhận xét này:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} e^{-j(2\pi/N)ln} = \begin{cases} N & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

### Bài 7.3

Hãy chứng minh rằng với đồ hình dạng cánh bướm như sau



Ta có:  $\text{Re}|X_{i+1}(p)| < 1$ ;  $\text{Re}|X_{i+1}(p+1)| < 1$   
 $\text{Re}|X_{i+1}(q)| < 1$ ;  $\text{Re}|X_{i+1}(q+1)| < 1$

Nếu:

$$|X_i(p)| < \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad |X_i(q)| < \frac{1}{2}$$

### Bài 7.4

Vẽ đồ thị lưu đồ tín hiệu có 16 điểm sử dụng thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo thời gian trong đó dãy đầu vào có trật tự bình thường và các tính toán được thực hiện tại chỗ.

### Bài 7.5

Vẽ đồ thị lưu đồ tín hiệu có 16 điểm sử dụng thuật toán FFT cơ sở 4 chia theo thời gian, trong đó dãy vào và dãy ra có trật tự bình thường.



## CHƯƠNG VIII: CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ

### GIỚI THIỆU

Trong chương 1, ta thấy rằng một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc sẽ được đặc trưng bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng dạng tổng quát:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-k) \quad (8.1)$$

Nhờ biến đổi  $z$ , ta có thể biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc tương tự như trên theo hàm truyền đạt hệ thống:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (8.2)$$

Từ hàm truyền đạt hệ thống, ta thấy các điểm không và các điểm cực sẽ phụ thuộc vào sự lựa chọn các tham số  $\{b_r\}$ ,  $\{a_k\}$  của hệ.

Mục tiêu của chương này là thực hiện các biểu diễn hệ thống theo (8.1) hoặc (8.2) bằng các phương pháp khác nhau dựa trên phần cứng hoặc phần mềm trên máy tính.

Nói chung, ta có thể xem (8.1) như một thuật toán để tìm dãy ra  $y(n)$  của hệ theo dãy vào  $x(n)$ . Có thể tính (8.1) theo nhiều cách khác nhau, tương đương với việc giải một hệ phương trình sai phân. Mỗi hệ phương trình xác định một phương pháp hay thuật toán tính toán để thực hiện hệ thống. Từ mỗi hệ phương trình, ta có thể xây dựng được sơ đồ khối bao gồm các phần tử trễ, các bộ nhân, các bộ cộng kết nối với nhau để đưa ra một sơ đồ cấu trúc thực hiện hệ thống.

Nếu thực hiện hệ thống theo phần mềm, thì ta có thể biến đổi (8.1) đưa về hệ phương trình tương đương, sau đó xây dựng thuật toán, chương trình chạy trên máy tính. Trong khi đó, cấu trúc sơ đồ khối sẽ giúp ta đưa ra cấu hình phần cứng để thực hiện hệ thống nhờ các phần tử thực hiện như bộ nhớ, thanh ghi dịch, các bộ xử lý toán học ALU hoặc nhờ vào các chip DSP chuyên dụng.

Khi ứng dụng các sơ đồ khối của hệ thống xử lý số vào trong thực tế, ta sẽ phải xem xét một số yếu tố chính có ảnh hưởng đến cách thể hiện hệ thống về mặt công nghệ cụ thể như mức độ phức tạp trong tính toán, yêu cầu bộ nhớ và ảnh hưởng của độ dài từ hữu hạn đến tính toán.

Mức độ phức tạp tính toán biểu hiện ở số toán tử toán học (nhân, chia, cộng) cần thiết để tính một giá trị ra  $y(n)$  của hệ thống. Trong quá khứ, điều này được dùng để đánh giá mức độ phức tạp của tính toán. Tuy nhiên, hiện nay với sự phát triển trong thiết kế và sản xuất, chip xử lý tín hiệu số lập trình trở thành tinh tế hơn, các yếu tố khác như số lần truy cập bộ nhớ, số lần so sánh hai số theo một mẫu ra đã trở thành quan trọng trong việc đánh giá độ phức tạp tính toán của một thể hiện.

**Yêu cầu bộ nhớ** là số vị trí nhớ cần có để lưu các tham số của hệ, dữ liệu vào, ra quá khứ và các giá trị tính toán trung gian.

**Ảnh hưởng độ dài từ hữu hạn** Các tham số của hệ phải nhất thiết được thể hiện với một độ chính xác hữu hạn. Các phép tính toán được thực hiện trong quá trình tính toán đầu ra của hệ thống phải được lượng tử hoá làm tròn hay cắt bỏ để thích hợp giới hạn độ chính xác của máy tính hoặc phần mềm khi thực hiện hệ thống. Việc tính toán có được tính toán theo số học dấu phẩy cố định hay dấu phẩy động không cũng là điều cần xét. Tất cả các vấn đề này đều được gọi là ảnh hưởng độ dài từ hữu hạn và đặc biệt quan trọng khi lựa chọn thể hiện hệ thống.

Ba yếu tố nói trên là các ảnh hưởng chính đến cách thể hiện hệ thống được mô tả bởi (8.1) hay (8.2), các yếu tố khác như kiểu cấu trúc hay kiểu thể hiện để tương thích với việc xử lý song song, luồng (pipeline) cũng đóng vai trò trong việc lựa chọn sự thực hiện cụ thể của ta. Tóm lại, các cấu trúc thể hiện hệ thống rất quan trọng trong việc thực hiện tối ưu hệ thống xử lý số trên thực tế.

**Các nội dung chính được trình bày trong chương này bao gồm:**

- Cấu trúc bộ lọc số FIR, bắt đầu từ cấu trúc đơn giản nhất, được gọi là dạng trực tiếp. Cấu trúc thứ hai là dạng nối tiếp, tiếp đến là cấu trúc bộ lọc số theo lấy mẫu tần số, cuối cùng ta sẽ đề cập đến một cấu trúc thể hiện hệ thống FIR dạng dàn hay còn gọi là mắt cáo.
- Cấu trúc bộ lọc số IIR: tương tự như bộ lọc số FIR, bộ lọc số IIR cũng có cấu trúc dạng trực tiếp, cấu trúc dạng nối tiếp, cấu trúc dàn và cấu trúc dàn thang. Ngoài ra, còn có thêm dạng cấu trúc song song.

## NỘI DUNG

### 8.1. CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ FIR

Nói chung, bộ lọc số FIR được mô tả bằng phương trình sai phân:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M-1} b_r x(n-r) \quad (8.3)$$

hoặc bởi hàm hệ thống:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-1} b_r z^{-r} \quad (8.4)$$

Hơn thế nữa, đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc số FIR là đồng nhất với các hệ số  $\{b_r\}$ , nghĩa là:

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & n \neq \end{cases} \quad (8.5)$$

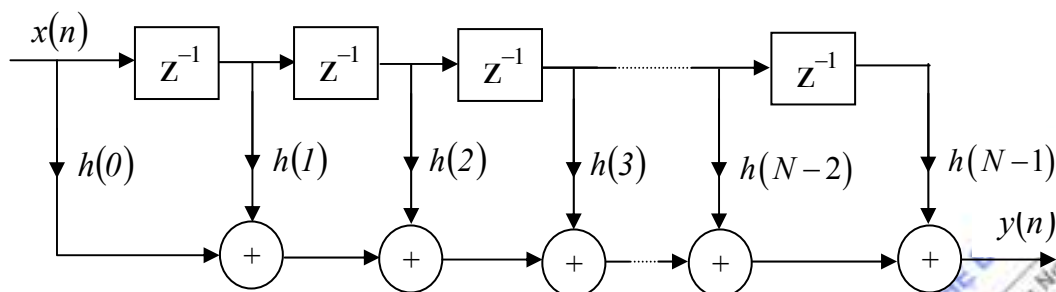
#### 8.1.1. Cấu trúc bộ lọc số FIR dạng trực tiếp

Cấu trúc dạng trực tiếp có được ngay từ phương trình sai phân không hồi quy (8.3), hoặc tương đương với phép chập đã học trong chương 1.



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (8.6)$$

Cấu trúc này được thực hiện ở hình 8.1.

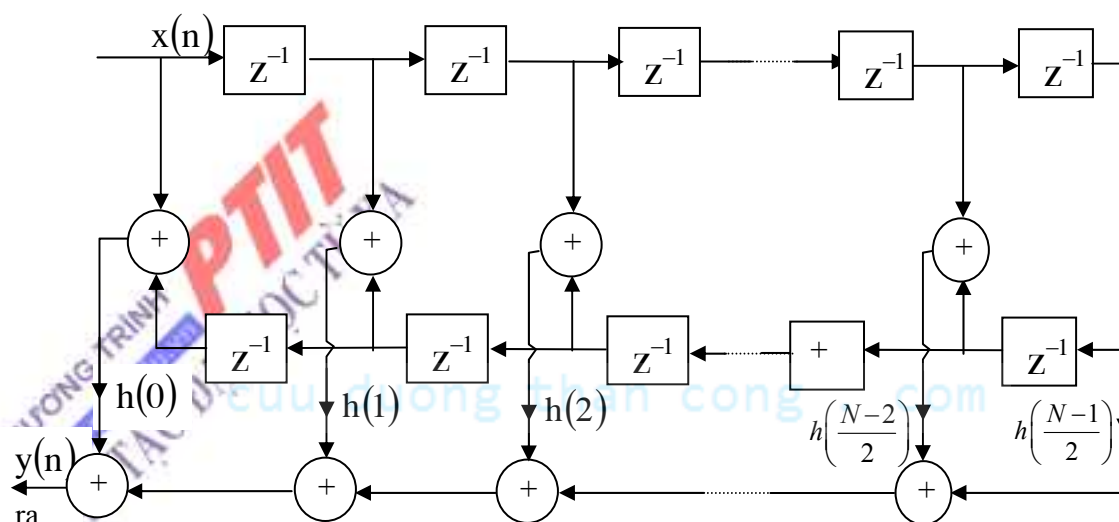


Hình 8.1. Cấu trúc dạng trực tiếp của bộ lọc số

Ta nhận thấy rằng, cấu trúc này đòi hỏi  $N-1$  vị trí nhớ để lưu  $N-1$  giá trị vào trước đó và có  $N$  phép nhân,  $N-1$  phép cộng theo một điểm ra. Khi bộ lọc số FIR có pha tuyến tính, đáp ứng xung đơn vị của hệ thỏa mãn điều kiện đối xứng hoặc phản đối xứng.

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad (8.7)$$

Đối với một hệ như thế, số phép nhân sẽ được rút từ  $N$  xuống  $N/2$  với  $N$  chẵn và xuống  $(N-1)/2$  với  $N$  lẻ. Ví dụ, cấu trúc tận dụng ưu điểm của tính đối xứng này được minh họa ở hình 8.2 với trường hợp  $N$  lẻ.



Hình 8.2 Cấu trúc dạng trực tiếp của bộ lọc số FIR pha tuyến tính ( $M$  lẻ)

### 8.1.2. Cấu trúc bộ lọc số FIR dạng nối tiếp

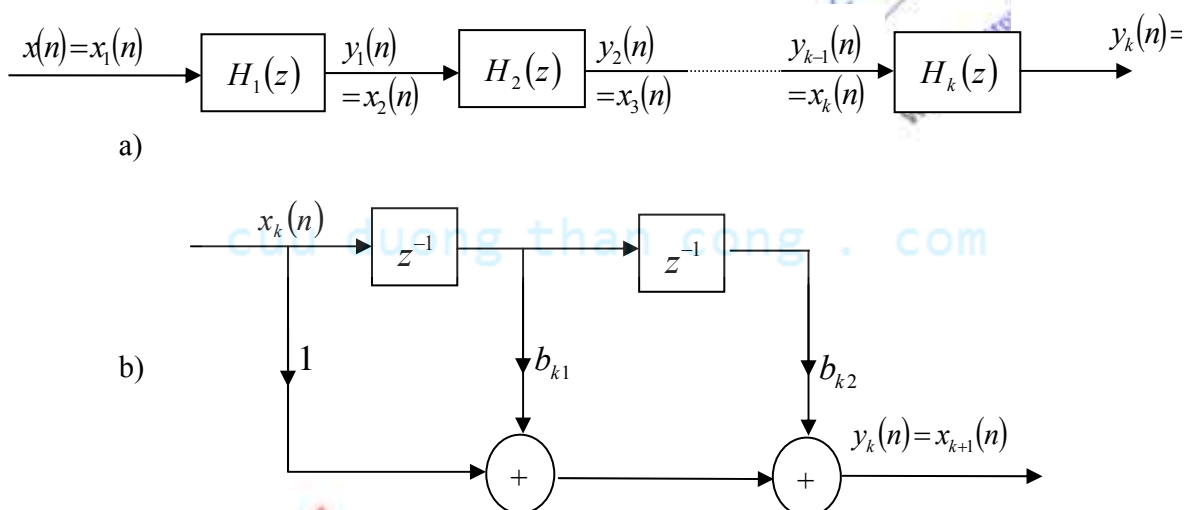
Cấu trúc nối tiếp được hình thành một cách tự nhiên từ hàm hệ thống đã cho ở (8.4). Nó đưa thừa số  $H(z)$  vào trong bộ lọc số FIR bậc hai sao cho:

$$H(z) = G \prod_{k=1}^N H_k(z) \quad (8.8)$$

ở đây:

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2} \quad k = 1, 2, \dots, k \quad (8.9)$$

và  $k$  là phần nguyên của  $(N+1)/2$ . Tham số khuếch đại  $G$  có thể được phân bố đồng đều giữa  $k$  mắt lọc, tức là  $G = G_1 G_2 \dots G_k$ . Các điểm không của  $H(z)$  được nhóm thành cặp để tạo ra các bộ lọc số FIR bậc hai dạng (8.9). Cấu trúc nối tiếp và một mắt bậc hai cơ bản được chỉ ở hình 8.3.



Hình 8.3 a) Cấu trúc nối tiếp của bộ lọc số FIR.

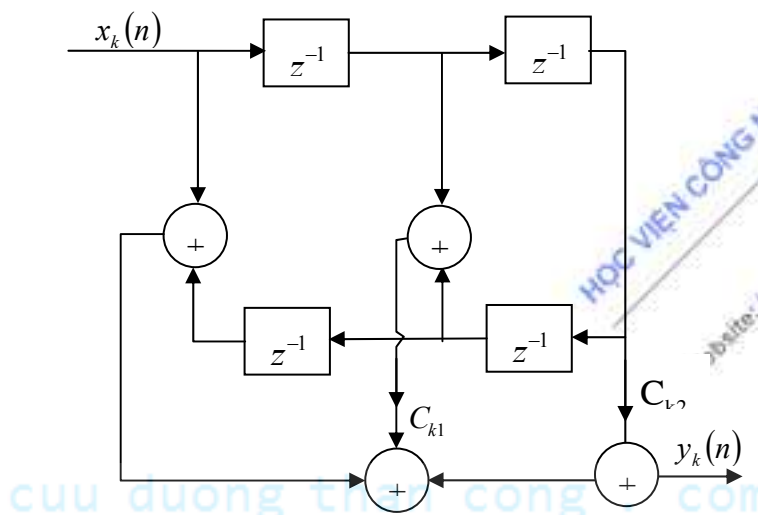
b) Cấu trúc mỗi mắt lọc  $H_k(z)$ .

Việc hình thành các cặp nghiệm liên hợp phức là điều kiện luôn luôn mong muốn để cho các hệ số  $\{b_k\}$  trong (8.9) có giá trị thực. Trong trường hợp bộ lọc FIR pha tuyến tính, tính đối xứng chỉ ra rằng các điểm cực của  $H(z)$  cũng thể hiện dạng đối xứng. Cụ thể, nếu  $z_k$  và  $z_k^*$  là một cặp liên hợp phức, thì  $1/z_k$  và  $1/z_k^*$  cũng là cặp liên hợp phức. Do đó, để tăng tính đơn giản ta sẽ hình thành các mắt lọc bậc bốn của bộ lọc số FIR như sau:

$$H_k(z) = (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1}) \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_k}\right) \left(1 - \frac{z^{-1}}{z_k^*}\right) \quad (8.10)$$

$$= 1 + C_{k1} z^{-1} + C_{k2} z^{-2} + C_{k1} z^{-3} + z^{-4}$$

ở đây các hệ số  $\{C_{k1}\}$  và  $\{C_{k2}\}$  là các hàm của  $z_k$ . Như vậy, bằng cách liên hợp hai cặp cực để thành một mắt lọc bậc 4, ta đã rút bớt được số phép nhân từ 4 xuống 2 (tức là bằng 50%). Hình 8.4 minh hoạ cấu trúc FIR bậc 4 cơ bản.



Hình 8.4. Mắt lọc 4 trong cấu trúc nối tiếp của bộ lọc số FIR

### 8.1.3. Cấu trúc bộ lọc số FIR dạng dàn (mắt cáo)

Trong mục này ta sẽ trình bày cấu trúc bộ lọc FIR loại khác, có tên là bộ lọc dàn. Bộ lọc dàn được dùng rộng rãi trong xử lý số tiếng nói và lọc thích nghi.

Ta hãy bắt đầu bằng việc xét một dãy bộ lọc FIR với hàm truyền đạt hệ thống:

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m=0,1,2,\dots,M-1 \quad (8.11)$$

ở đây theo định nghĩa,  $A_m(z)$  là một đa thức:

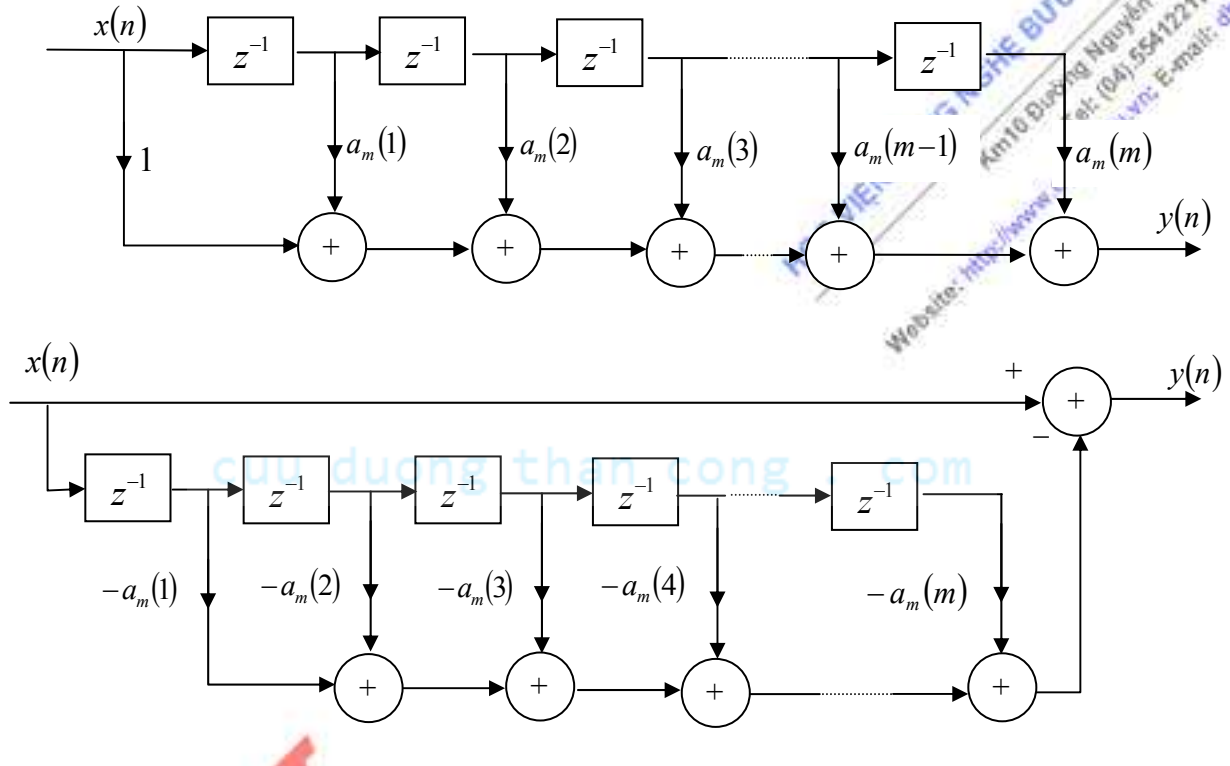
$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k) z^{-k} \quad m \geq 1 \quad (8.12)$$

và  $A_0(z)=1$ . Đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc thứ  $m$  là  $h_m(0)=1$  và  $h_m(k)=\alpha_m(k)$ ,  $k=1,2,\dots,m$ . Chỉ số dưới  $m$  ở đa thức  $A_m(z)$  ký hiệu cấp của đa thức.

Theo mong muốn, có thể xem bộ lọc FIR như một thiết bị dự đoán tuyến tính. Theo điều kiện này, dãy dữ liệu vào  $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)$  được dùng để dự đoán giá trị của tín hiệu  $x(n)$ . Vì thế ta có thể biểu diễn giá trị dự đoán một cách tuyến tính của  $x(n)$  như sau:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^m \alpha_m(k)x(n-k) \quad (8.13)$$

Ở đây,  $\{\alpha_m(k)\}$  biểu diễn các hệ số dự đoán. Ký hiệu  $\hat{x}(n)$  được dùng tương thích với các tài liệu kỹ thuật.



Hình 8.5. Cấu trúc dạng trực tiếp của bộ lọc FIR dự đoán

Dãy ra  $y(n)$  có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) - \hat{x}(n) \\ &= x(n) + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k)x(n-k) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Như vậy, đầu ra bộ lọc FIR có thể được hiểu như là sai số giữa hai giá trị tín hiệu thực  $x(n)$  và giá trị dự đoán được  $\hat{x}(n)$ . Hai loại thể hiện dạng trực tiếp bộ lọc FIR dự đoán được mô tả ở hình 8.5.

Giả sử ta có bộ lọc trong đó  $m = 1$ . Rõ ràng đầu ra của bộ lọc như thế là:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1(1)x(n-1) \quad (8.15)$$

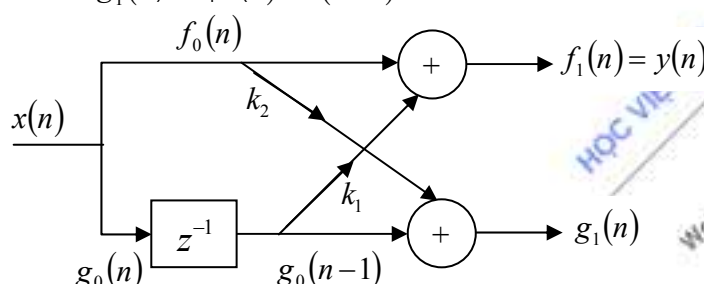
Đầu ra này cũng có thể được từ bộ lọc dần bậc nhất hay một tầng như minh hoạ ở hình 8.6, bằng kích thích cả hai lối vào tín hiệu  $x(n)$  và bằng sự lựa chọn đầu ra ở nhánh trên. Tham số  $k_1$  của dần được gọi là hệ số phản xạ.

Tiếp theo, ta hãy xét bộ lọc FIR có  $m = 2$ . Trong trường hợp này tín hiệu ra từ cấu trúc trực tiếp là:

$$y(n) = x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + \alpha_2(2)x(n-2) \quad (8.16)$$

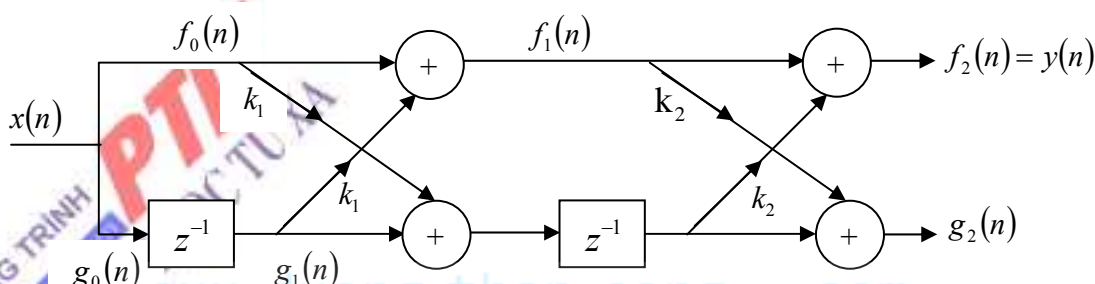
Bằng cách nối tiếp hai tầng dần như chỉ ở hình 8.7, ta cũng có thể có tín hiệu ra giống như 8.16. Thật vậy, tín hiệu ra của tầng thứ nhất là:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x(n) + k_1 x(n-1) \\ g_1(n) &= k_1 x(n) + x(n-1) \end{aligned} \quad (8.17)$$



$$\begin{aligned} f_0(n) &= g_0(n) = x(n) \\ f_1(n) &= f_0(n) + k_1 g_0(n-1) = x(n) + k_1 x(n-1) \\ g_1(n) &= k_1 f_0(n) + g_0(n-1) = k_1 x(n) + x(n-1) \end{aligned}$$

Hình 8.6. Bộ lọc dần một tầng



Hình 8.7. Bộ lọc dần hai tầng

Tín hiệu ra tầng hai là

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_1(n) + k_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= k_2 f_1(n) + g_1(n-1) \end{aligned} \quad (8.18)$$

Nếu ta chỉ tập trung vào  $f_2(n)$  thay  $f_1(n)$ ,  $g_1(n-1)$  trong (8.17) vào (8.18), sẽ có:

$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) + k_1 x(n-1) + k_2 [k_1 x(n-1) + x(n-2)] \\ &= x(n) + k_1(1 + k_2)x(n-1) + k_2 x(n-2) \end{aligned} \quad (8.19)$$

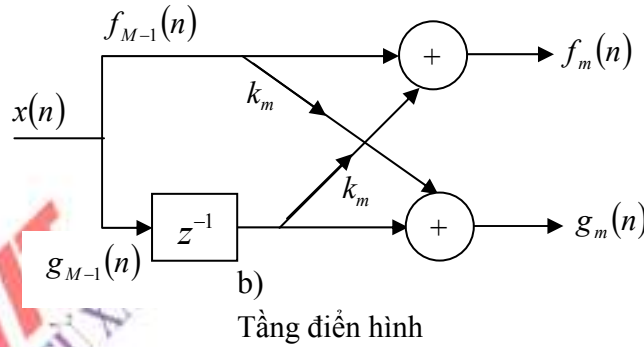
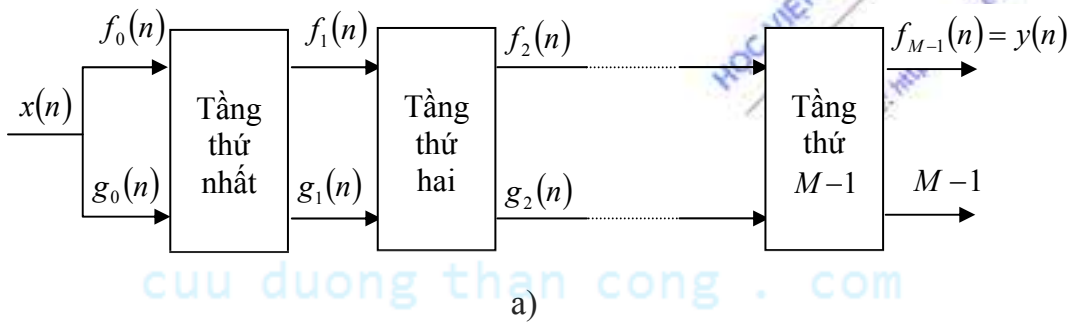
Bây giờ (8.19) là đồng nhất với tín hiệu ra của bộ lọc FIR dạng trực tiếp như đã cho ở (8.16), nếu ta cân bằng các hệ số, nghĩa là:

$$\alpha_2(2) = k_2 \quad \alpha_2(1) = k_1(1 + k_2) \quad (8.20)$$

hoặc tương đương

$$k_2 = \alpha_2(2) \quad k_1 = \frac{\alpha_2(1)}{1 + \alpha_2(2)} \quad (8.21)$$

Như vậy có thể đạt được từ các hệ số phản xạ  $k_1$  và  $k_2$  của dàn từ các hệ số  $\{a_m(k)\}$  của thể hiện dạng trực tiếp.



**Hình 8.8. Bộ lọc dàn  $(M-1)$  tầng**

Tiếp tục quá trình này nhờ phép quy nạp ta có thể dễ dàng chứng minh sự tương đương giữa bộ lọc FIR dạng trực tiếp bậc  $m$  và bộ lọc dàn bậc  $m$  hay có thể mô tả một cách tổng quát bộ lọc dàn bằng hệ phương trình đệ quy thứ tự sau đây:

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \quad (8.22)$$

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.23)$$

$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.24)$$



Khi đó tín hiệu ra của bộ lọc tầng  $M - 1$  sẽ tương ứng với tín ra của bộ lọc FIR bậc  $M - 1$ , nghĩa là:

$$y(n) = f_{M-1}(n)$$

Hình 8.8 mô tả lọc dần  $(M - 1)$  tầng theo dạng sơ đồ khối của một tầng điển hình với tính toán đã được chỉ ra ở (8.23) và (8.24).

Nhờ sự tương đương giữa bộ lọc FIR và bộ lọc dần, đầu ra  $f_m(n)$  của một bộ dần  $m$  tầng có thể được biểu diễn như sau:

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m \alpha_m(k) x(n-k) \quad \alpha_m(0) = 1 \quad (8.25)$$

Vì (8.25) là phép chập, nên nó kéo theo quan hệ biến đổi  $z$  là:

$$F_m(z) = A_m(z) X(z)$$

hoặc tương đương

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \quad (8.26)$$

Thành phần đầu ra khác của dần,  $g_m(n)$  cũng có thể được biểu diễn dưới dạng phép chập như (8.33), nhờ tập hệ số khác là  $\{\beta_m(k)\}$ . Điều này có thể quan sát thấy từ (8.17) và (8.18). Theo (8.17), ta nhận thấy rằng các hệ số lọc đối với bộ lọc sinh ra  $f_1(n)$  là  $\{1, k_1\} = \{1, \alpha_1(1)\}$ . Trong khi đó, các hệ số đối với bộ lọc có đầu ra  $g_1(n)$  là  $\{k_1, 1\} = \{\alpha_1(1), 1\}$ . Ta nhận thấy hai tập hệ số này là ngược thứ tự nhau. Nếu xét bộ lọc dần hai tầng có đầu ra cho ở (8.18), ta có thể biểu diễn  $g_2(n)$  dưới dạng:

$$\begin{aligned} g_2(n) &= k_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ &= k_2 [x(n) + k_1 x(n-1)] + k_1 x(n-1) + x(n-2) \\ &= k_2 x(n) + k_1(1 + k_2) x(n-1) + x(n-2) \\ &= \alpha_2(2) x(n) + \alpha_2(1) x(n-1) + x(n-2) \end{aligned}$$

Do đó, các hệ số bộ lọc là  $\{\alpha_2(2), \alpha_2(1), 1\}$ , trong khi các hệ số của bộ lọc sinh ra  $f_2(n)$  lại là  $\{1, \alpha_2(1), \alpha_2(2)\}$ . Ở đây, một lần nữa ta lại thấy tập hợp hệ số bộ lọc là ngược thứ tự nhau.

Từ sự phân tích trên, ta có thể biểu diễn đầu ra  $g_m(n)$  của bộ lọc dần  $m$  tầng dưới dạng phép chập:

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k) x(n-k) \quad (8.27)$$

ở đây, các hệ số lọc  $\{\beta_m(k)\}$  liên kết với bộ lọc sinh ra  $f_m(n) = y(n)$  nhưng hoạt động theo thứ tự ngược. Để chi tiết hơn, ta giả thiết dữ liệu  $x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1)$  được dùng để dự đoán một cách tuyến tính giá trị tín hiệu  $x(n-m)$ . Giá trị dự đoán được là:

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m(k)x(n-k) \quad (8.28)$$

ở đây, các hệ số lọc  $\beta_m(k)$  trong bộ lọc dự đoán chính là các hệ số  $\{\alpha_m(k)\}$  lấy theo thứ tự ngược lại, nghĩa là:

$$\beta_m(k) = \alpha_m(m-k) \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (8.29)$$

Ta gọi sự dự đoán, được hình thành theo (8.28) là dự đoán theo hướng ngược, nghĩa là dữ liệu chạy ngược qua một bộ dự đoán với các hệ số  $\{-\beta_m(k)\}$ . Ngược lại, bộ lọc FIR với hàm hệ thống  $A_m(z)$  hình thành sự dự đoán theo hướng tiến.

Trong miền  $z$ , (8.27) trở thành:

$$G_m(z) = \beta_m(z)X(z) \quad (8.30)$$

hoặc tương đương

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (8.31)$$

ở đây  $B_m(z)$  là hàm hệ thống của bộ lọc FIR với các hệ số  $\{\beta_m(k)\}$ , tức là:

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k)z^{-k} \quad (8.32)$$

Vì  $\beta_m(k) = \alpha_m(m-k)$ , nên có thể biểu diễn (8.32) như sau:

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^m \alpha_m(m-k)z^{-k} = \sum_{l=0}^m \alpha_m(l)z^{l-m} \\ &= z^{-m} \sum_{l=0}^m \alpha_m(l)z^l = z^{-m} A_m(z^{-1}) \end{aligned} \quad (8.33)$$

Quan hệ (8.33) nói lên rằng các không của bộ lọc FIR với hàm hệ thống  $B_m(z)$  chính là nghịch đảo các không của  $A_m(z)$ . Vì thế  $B_m(z)$  được gọi là đa thức nghịch đảo hay đa thức ngược của  $A_m(z)$  và nó gắn với sự dự đoán dãy dữ liệu vào theo hướng ngược.

Sau đó, chuyển đổi (8.22) và (8.24) sang miền  $z$ . Như vậy ta có:

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (8.34)$$

$$F_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.35)$$

$$G_m(z) = k_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.36)$$

Nếu chia mỗi phương trình cho  $X(z)$ , ta có kết quả mong muốn dạng:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (8.37)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.38)$$

$$B_m(z) = k_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.39)$$

Như vậy một tầng dần được mô tả bằng phương trình ma trận trong miền  $z$  như sau:

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m \\ k_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

Trước khi kết thúc phần này, ta sẽ triển khai mối quan hệ biến đổi các tham số dần  $\{k_i\}$ , tức các hệ số phản xạ sang các bộ lọc trực tiếp  $\{\alpha_m(k)\}$  và ngược lại.

*Biến đổi hệ số dần sang hệ số bộ lọc dạng trực tiếp.*

Các hệ số bộ lọc FIR dạng trực tiếp  $\{\alpha_m(k)\}$  có thể đạt được từ các hệ số dần  $\{k_i\}$  bằng cách dùng các hệ thức sau:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (8.41)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + k_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.42)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_{m-1}(z^{-1}) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (8.43)$$

Lời giải sẽ đạt được theo phương pháp đệ quy, bắt đầu với  $m = 1$ . Như vậy ta sẽ có một dãy  $(M-1)$  bộ lọc FIR, mỗi bộ ứng với một giá trị  $m$ .

## 8.2. CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ IIR

Trong mục này ta xét các cấu trúc của bộ lọc số IIR được mô tả bằng phương trình sai phân (8.1) hoặc hàm truyền đạt tương đương (8.2). Cũng giống như các hệ FIR, hệ IIR cũng có một số loại cấu trúc khác nhau, đó là cấu trúc dạng trực tiếp, cấu trúc dạng nối tiếp, cấu trúc dần và cấu trúc dần thang. Ngoài ra chúng còn góp thêm dạng cấu trúc song song.

### 8.2.1. Cấu trúc bộ lọc số IIR dạng trực tiếp

Hàm truyền đạt hữu tỷ đặc trưng cho bộ lọc số IIR:

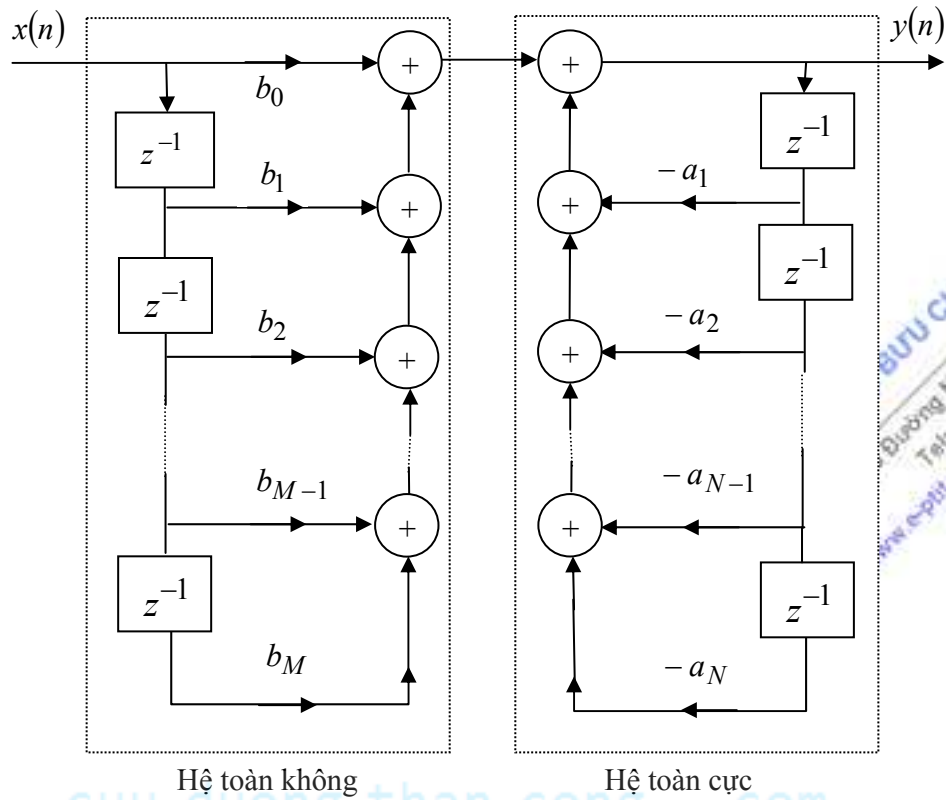
$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

có thể được xem như gồm hai hệ nối tiếp, nghĩa là:

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \quad (8.44)$$

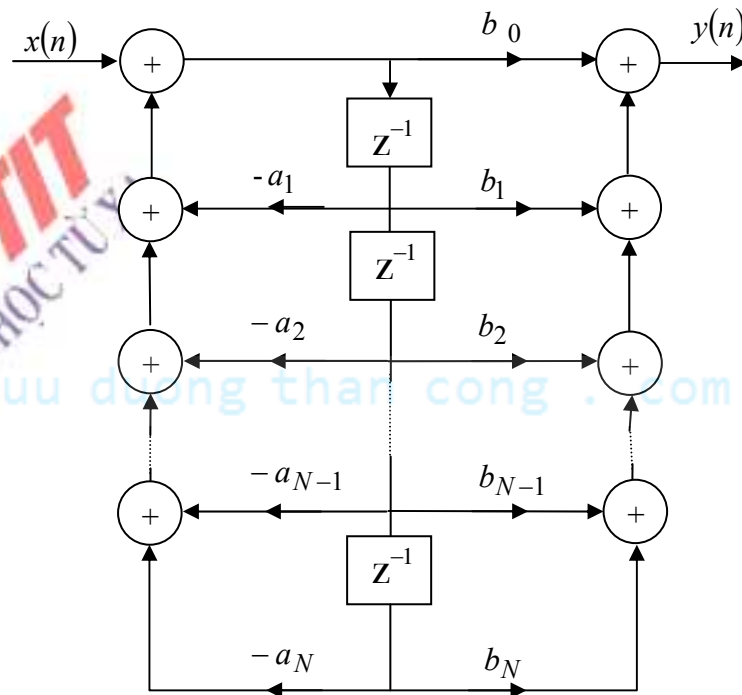
Ở đây,  $H_1(z)$  chứa các không và  $H_2(z)$  chứa các cực của  $H(z)$ , tức là:

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad \text{và} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (8.45)$$



Hình 8.9. Cấu trúc trực tiếp loại I

Ta có cấu trúc trực tiếp loại I như chỉ ở hình 8.9. Cấu trúc này đòi hỏi  $M + N + 1$  ô nhớ.



Hình 8.10. Cấu trúc trực tiếp loại II ( $N = M$ )

Nếu bộ lọc toàn cực  $H_2(z)$  đặt trước bộ lọc toàn không  $H_1(z)$ , sẽ được cấu trúc cân đối hơn được gọi là cấu trúc trực tiếp loại II và được trình bày ở hình 8.10. Cấu trúc này đòi hỏi  $M + N + 1$  phép nhân,  $M + N$  phép cộng và cực đại của  $\{M, N\}$  ô nhớ. Vì cấu trúc trực tiếp loại II tối thiểu hoá được ô nhớ, nên nó được xem là chính tắc.

### Định lý chuyển vị:

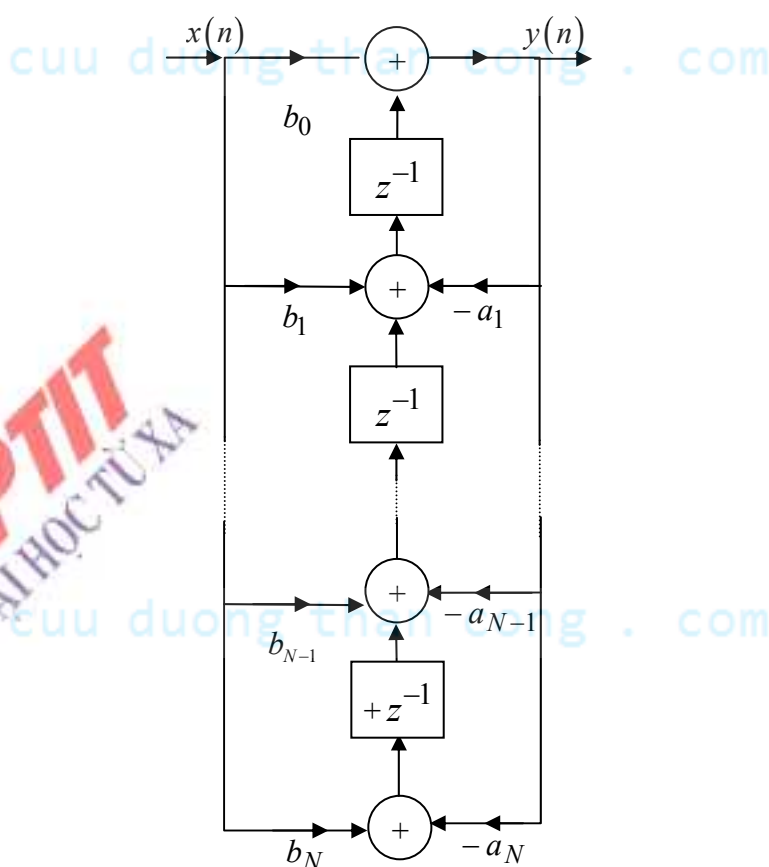
Định lý này phát biểu rằng nếu ta:

- + Thay thế nút cộng  $\oplus$  bằng nút nhánh  $\perp$  và ngược lại.
- + Đảo hướng của tất cả các hệ số truyền đạt nhánh và các nhánh.
- + Đổi chỗ tín hiệu vào và tín hiệu ra cho nhau.

thì hàm truyền đạt sẽ giữ nguyên không đổi.

Cấu trúc thu được có tên là cấu trúc chuyển vị hay dạng chuyển vị.

Ta hãy áp dụng định lý chuyển vị đối với cấu trúc trực tiếp loại II. Trước hết, ta đảo hướng tất cả các luồng tín hiệu trong hình 8.10. Tiếp đến ta đổi các nút thành bộ cộng và các bộ cộng thành các nút. Cuối cùng, ta đổi đầu vào vào, đầu ra cho nhau. Các thao tác này cho ta cấu trúc trực tiếp loại II đã chuyển vị như chỉ ở hình 8.11.



Hình 8.11. Cấu trúc chuyển vị trực tiếp loại II



Cuối cùng ta nhận thấy rằng, cấu trúc chuyển vị trực tiếp loại II đòi hỏi số phép nhân, phép cộng và số ô nhớ giống như cấu trúc trực tiếp loại II ban đầu.

### 8.2.2. Cấu trúc bộ lọc số IIR dạng nối tiếp

Giả sử ta xét một hệ IIR bậc cao có hàm truyền đạt cho ở (8.2). Không mất tính tổng quát nếu ta giả thiết  $N \geq M$ . Có thể phân tích hệ thành các hệ con bậc hai nối tiếp, vì thế có thể biểu diễn  $H(z)$  dưới dạng:

$$H(z) = G \prod_{k=1}^k H_k(z) \quad (8.46)$$

Ở đây  $k$  là phân nguyên của  $(N+1)/2$ ,  $H_k(z)$  có dạng tổng quát:

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (8.47)$$

và  $G$  là tham số khuếch đại cố định, được xác định theo (8.2) là  $G = b_0$ . Cũng giống như trường hợp hệ FIR theo cấu trúc nối tiếp, tham số khuếch đại  $G$  có thể được phân bố bằng nhau cho  $k$  mắt lọc, sao cho  $G = G_1 G_2 \dots G_k$ .

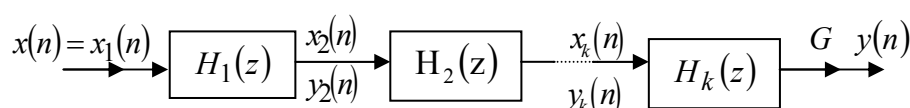
Các hệ số  $\{a_{ki}\}$  và  $\{b_{ki}\}$  trong các hệ con bậc hai là thực. Điều này nói lên rằng, khi hình thành các hệ con bậc hai hay các thừa số bậc hai trong (8.47), ta phải nhóm các cặp cực không liên hợp phức với nhau.

Nếu  $N > M$ , một hệ thống con bậc hai sẽ có các hệ số ở tử số bằng không, nghĩa là hoặc  $b_{k2} = 0$ , hoặc  $b_{k1} = 0$ , hoặc cả  $b_{k1} = b_{k2} = 0$  đối với mọi số  $k$  nào đấy. Hơn nữa, nếu  $N$  là lẻ, một trong các hệ con, chẳng hạn  $H_k(z)$ , phải có  $a_{k2} = 0$  vì thế hệ thống con là bậc nhất. Để duy trì tính môđun khi thực hiện  $H(z)$ , thông thường người ta dùng hệ thống con bậc hai cơ bản trong cấu trúc nối tiếp và có một vài hệ số lấy giá trị không ở một số hệ con.

Mỗi hệ con bậc hai với hàm truyền đạt có dạng (8.47) có thể được thể hiện theo dạng trực tiếp loại II. Vì có nhiều cách ghép cặp các cực và các không của  $H(z)$  thành các mắt bậc hai nối tiếp và có một số xếp thứ tự các hệ thống con, nên có thể thu được các cấu trúc nối tiếp là tương đương đối với một độ chính xác bất định, các thể hiện khác nhau một cách đáng kể khi được thực hiện với các phép số học có độ chính xác nhất định.

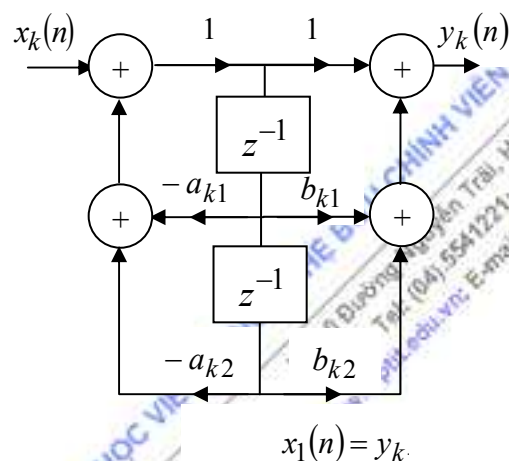
Dạng tổng quát của cấu trúc nối tiếp được minh họa ở hình 8.12.





a)

Hình 8.12. Cấu trúc nối tiếp các hệ thống bậc hai và thể hiện mỗi mắt bậc hai



### 8.2.3. Cấu trúc bộ lọc số IIR dạng song song

Cấu trúc dạng song song của bộ lọc số IIR có thể được hình thành từ biểu diễn phân thức của  $H(z)$ . Không mất tính tổng quát nếu ta lại giả thiết rằng  $N \geq M$  và các cực là phân biệt. Sau đó, theo thực hiện khai triển phân thức của  $H(z)$ , ta lại có:

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (8.48)$$

Ở đây,  $\{p_k\}$  là các cực,  $\{A_k\}$  là các hệ số (phần dư) trong khai triển phân thức và hằng số  $C$  được định nghĩa là  $C = \frac{b_N}{a_N}$ . Cấu trúc do (8.48) tạo ra được trình bày ở hình 8.14. Nó gồm một dãy các bộ lọc đơn cực song song.

Nói chung, một số cực của  $H(z)$  có thể là giá trị phức. Trong trường hợp như thế, các hệ số  $A_k$  tương ứng cũng là phức. Để tránh việc nhân số phức, ta có thể ghép các cặp cực liên hợp phức để hình thành các hệ con hai cực. Ngoài ra, ta có thể liên kết một cách tùy ý các cặp cực giá trị thực để tạo ra các hệ con hai cực. Mỗi hệ con này có dạng:

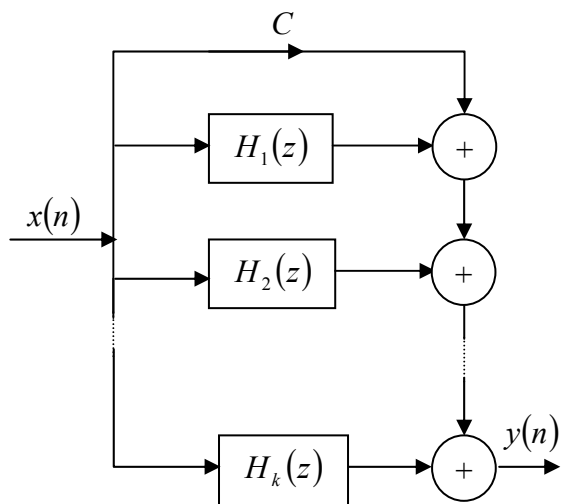
$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (8.49)$$

Ở đây, các hệ số  $\{b_{ki}\}$  và  $\{a_{ki}\}$  là các tham số hệ thống lấy giá trị thực. Bây giờ hàm trên có thể được biểu diễn là:

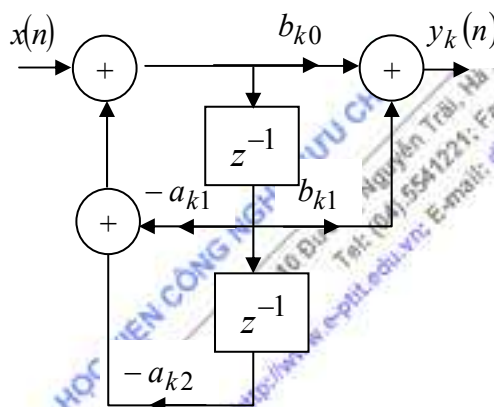
$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N H_k(z) \quad (8.50)$$

Với  $k$  là phần nguyên của  $(N+1)/2$ . Khi  $N$  là lẻ, một trong  $H_k(z)$  thật sự là một hệ đơn cực (nghĩa là,  $b_{k1} = a_{k2} = 0$ ).

Cá biệt, các mắt bậc hai, là các khối cơ bản của  $H(z)$ , có thể được thực hiện theo dạng trực tiếp hoặc theo dạng chuyển vị trực tiếp được minh họa ở hình 8.14.



Hình 8.13. Cấu trúc song song của hệ thống IIR



Hình 8.14. Cấu trúc của một mắt bậc 2 trong thể hiện hệ thống IIR song song

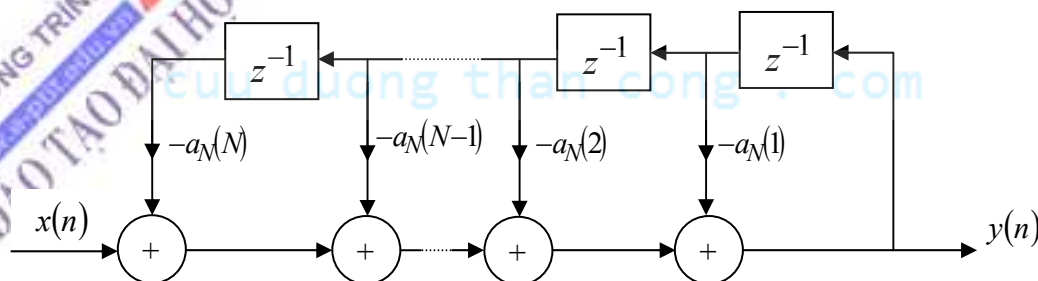
#### 8.2.4. Cấu trúc bộ lọc số IIR dạng dàn (mắt cáo)

Trong phần trước, ta đã xét cấu trúc bộ lọc dàn có hoạt động tương đương với bộ lọc số FIR. Trong mục này, ta sẽ mở rộng việc xét đối với hệ IIR.

Giả sử, ta bắt đầu với hệ toàn cực có hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k(z)z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)} \quad (8.51)$$

cấu trúc dạng trực tiếp của hệ thống này được nêu ở hình 8.17.



Hình 8.15. Cấu trúc dạng trực tiếp của hệ toàn cực

Phương trình sai phân của hệ IIR này là:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) + x(n) \quad (8.52)$$

Nếu thay đổi vai trò của đầu vào và đầu ra (nghĩa là đổi lẫn nhau  $x(n)$  và  $y(n)$ ) ta có:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) + y(n)$$

hoặc tương đương

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) \quad (8.53)$$

Ta nhận thấy rằng phương trình (8.53) mô tả một hệ FIR có hàm truyền đạt  $H(z) = A_N(z)$ , trong khi đó phương trình sai phân (8.52) mô tả một hệ IIR có hàm truyền đạt  $H(z) = 1/A_N(z)$ . Một hệ có thể đạt được thiết lập từ hệ khác bằng việc đổi lẫn nhau vai trò vào ra.

Trên cơ sở nhận xét này, ta dùng dàn toàn không (FIR) đã được xét trong mục 8.2.4 để tạo ra cấu trúc dàn đối với hệ toàn cực IIR bằng cách đổi lẫn nhau vai trò đầu vào, đầu ra. Trước hết ta lấy bộ lọc dàn toàn không đã được nêu ở hình 8.8 và định nghĩa tại đầu vào như sau:

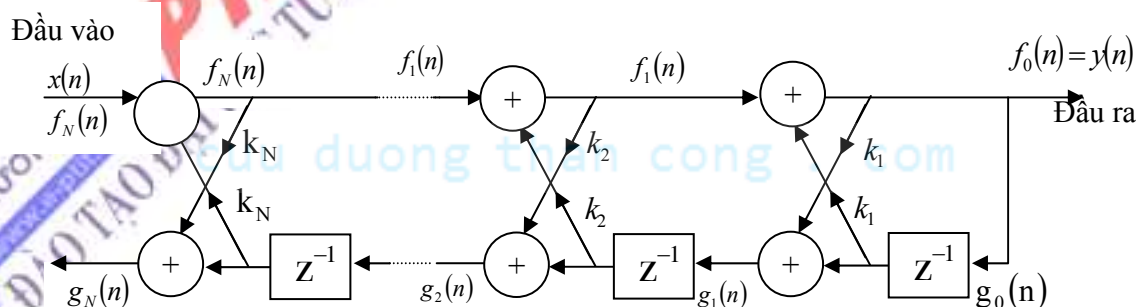
$$x(n) = f_N(n) \quad (8.54)$$

và đầu ra là:

$$y(n) = f_0(n) \quad (8.55)$$

Đây là sự ngược lại chính xác các định nghĩa về bộ lọc dàn toàn không. Các định nghĩa này chỉ ra rằng các đại lượng  $\{f_m(n)\}$  sẽ được tính theo sự giảm bậc [nghĩa là  $f_N(n), f_{N-1}(n), f_{N-2}(n), \dots, 1]$ . Có thể thực hiện việc tính toán này bằng cách sắp xếp lại phương trình đệ quy và giải tìm  $f_{m-1}(n)$  theo  $f_m(n)$ , tức là:

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - k_m g_{m-1}(n-1) \quad m = N, N-1, \dots, 1$$



Hình 8.16. Cấu trúc dàn của hệ IIR toàn cực

Kết quả của việc thay đổi này là tập các phương trình:

$$f_N(n) = x(n) \quad (8.56)$$

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - K_m g_{m-1}(n-1) \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (8.57)$$

$$g_m(n) = K_m(n) f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (8.58)$$

$$y(n) = f_0(n) = g_0(n) \quad (8.59)$$

Hệ phương trình này tương ứng với cấu trúc như chỉ ở hình 8.16.

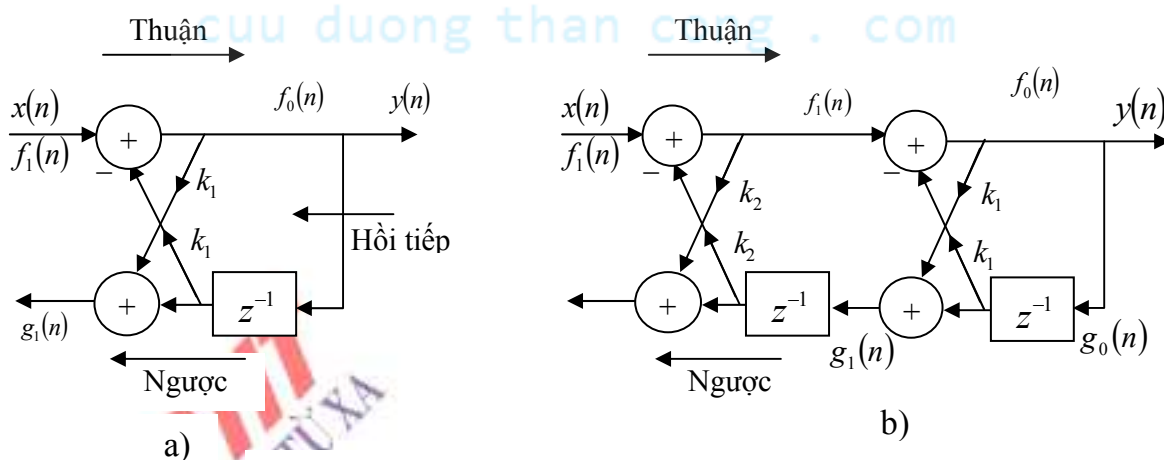
Để chứng minh rằng hệ các phương trình từ (8.56) đến (8.59) biểu diễn bộ lọc số IIR toàn cực, ta hãy nhận xét trường hợp  $N = 1$ . Các phương trình trên được rút gọn thành:

$$\begin{aligned} x(n) &= f_1(n) \\ f_0(n) &= f_1(n) - k_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= k_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) \\ &= x(n) - k_1 y(n-1) \end{aligned} \quad (8.60)$$

Hơn nữa, phương trình của  $g_1(n)$  có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$g_1(n) = k_1 g(n) + y(n-1) \quad (8.61)$$

Tiếp theo ta hãy xét trường hợp  $N = 2$ , tương ứng với cấu trúc như hình 8.17b.



Hình 8.17. Hệ thống dàn một và hai cực

Các phương trình ứng với cấu trúc này là:

$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) \\ f_1(n) &= f_2(n) - k_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= k_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ f_0(n) &= f_1(n) - k_1 g_0(n-1) \\ g_1(n) &= k_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\ y(n) &= f_0(n) = g_0(n) \end{aligned} \quad (8.62)$$

Sau một vài thay thế và xử lý ta có:

$$y(n) = -k_1(1+k_2)y(n-1) - k_2y(n-2) + x(n) \quad (8.63)$$

$$g_2(n) = k_2y(n) + k_1(1+k_2)y(n-1) + y(n-2) \quad (8.64)$$

Rõ ràng, phương trình sai phân (8.71) biểu diễn bộ lọc số IIR hai cực và quan hệ (8.64) là phương trình vào - ra của hệ IIR hai không.

Nói chung, các kết luận trên đây là đúng với mọi  $N$ . Thật vậy, với định nghĩa của  $A_m(z)$  như đã cho ở (8.26), hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR toàn cực là:

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \quad (8.65)$$

Một cách tương tự, hàm truyền đạt của bộ lọc số (FIR) toàn không là:

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \quad (8.66)$$

Ở đây ta đã sử dụng các quan hệ đã thiết lập trước đây là (8.63) và (8.65). Như vậy, các hệ số trong  $H_b(z)$  của bộ lọc số FIR là đồng nhất với các hệ số trong  $A_m(z)$ , trừ khi chúng xuất hiện theo thứ tự ngược.

Cấu trúc dàn toàn cực có một tuyến toàn không với đầu vào  $g_0(n)$  và đầu ra  $g_N(n)$ . Đa thức biểu diễn hàm truyền đạt của tuyến toàn không  $B_m(z)$  chung cho cả hai cấu trúc dàn luôn luôn được gọi là hàm truyền đạt theo hướng ngược lại, vì nó đảm bảo tuyến ngược lại trong cấu trúc dàn toàn cực.

Dàn toàn cực cung cấp khối cơ bản cho các cấu trúc loại dàn, thực hiện các bộ lọc số IIR chứa cả cực và không. Để triển khai một cấu trúc thích hợp, ta hãy nhận xét một hệ IIR với hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M C_M(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} \quad (8.67)$$

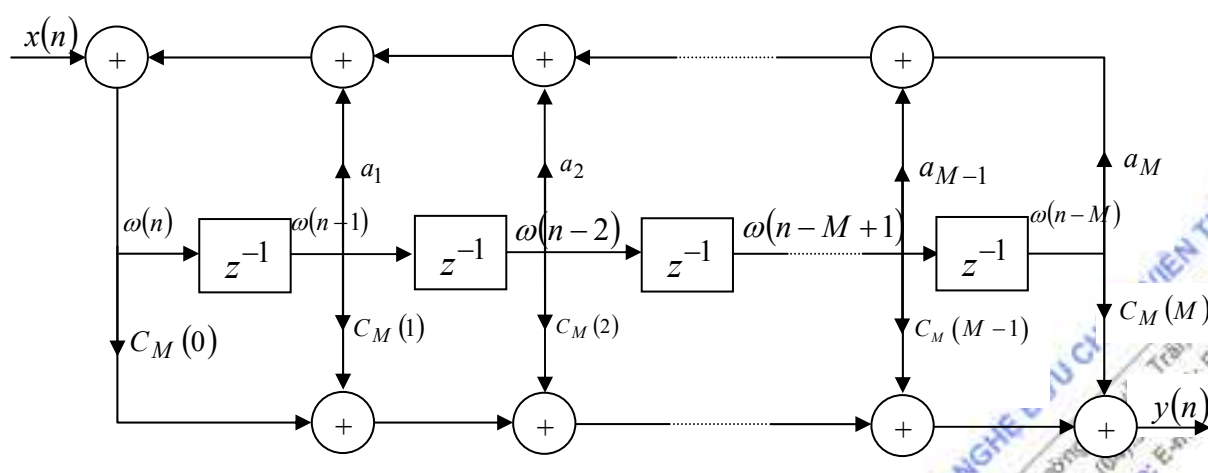
Ở đây ký hiệu của đa thức tử số đã được thay đổi để tránh sự lẫn lộn với việc triển khai trước đây của ta. Không mất tính tổng quát, khi ta giả thiết  $N \geq M$ .

Trong cấu trúc trực tiếp loại II, hệ thống (8.67) được mô tả bằng các phương trình sai phân:

$$\omega(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k)\omega(n-k) + x(n) \quad (8.68)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M C_M(k)\omega(n-k) \quad (8.69)$$





Hình 8.18. Cấu trúc trực tiếp loại II của bộ lọc số IIR

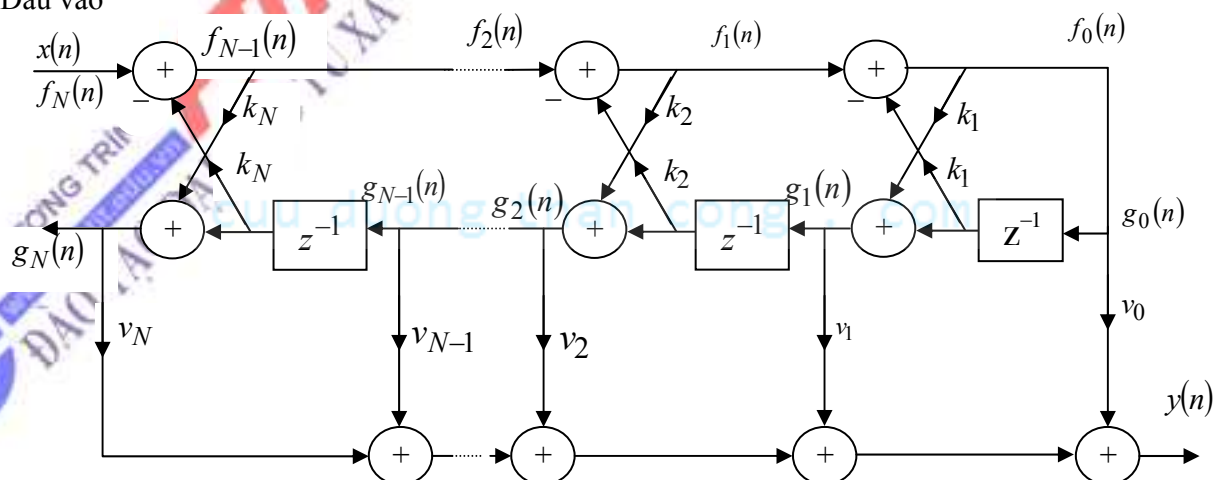
Chú ý rằng (8.68) là quan hệ vào - ra của một bộ lọc số IIR toàn cực và (8.69) là vào - ra của bộ lọc số toàn không. Hơn nữa, ta nhận thấy rằng, đầu ra của một hệ thống toàn không chính là liên hợp tuyến tính của các đầu ra đã trễ từ hệ thống toàn cực. Điều này là dễ thấy từ việc quan sát cấu trúc trực tiếp loại II đã vẽ lại như hình 8.19.

Vì các không là kết quả của việc thực hiện liên hợp tuyến tính của các đầu ra trước nên ta dùng nhận xét này để xây dựng bộ lọc số IIR toàn không khi lấy cấu trúc dàn toàn cực như khối cơ bản. Ta vừa mới nhận xét rằng  $g_m(n)$  là liên hợp tuyến tính của đầu ra hiện tại và quá khứ. Thật vậy, hệ thống:

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

là một hệ thống toàn không. Bởi vậy, liên hợp tuyến tính bất kỳ của  $\{g_m(n)\}$  cũng là một hệ thống toàn không.

Đầu vào



Hình 8.19. Cấu trúc dàn dần thang để thể hiện hệ thống cực không



Như vậy, ta bắt đầu từ cấu trúc dàn toàn cực với các tham số  $k_m$ ,  $1 \leq m \leq N$  và ta đã bổ xung thêm phần thang bằng cách đưa ra một liên hợp tuyến tính có trọng số của  $\{g_m(n)\}$ . Kết quả thu được là một hệ IIR toàn cực, có cấu trúc dàn - thang như chỉ ở hình 8.28 với  $M = N$ . Đầu ra của nó là:

$$y(n) = \sum_{m=0}^M \gamma_m g_m(n) \quad (8.70)$$

Ở đây  $\{\gamma_m\}$  là tham số xác định các không của hệ thống. Hàm truyền đạt tương ứng với (8.78) là:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M \gamma_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (8.71)$$

Vì  $X(z) = F_N(z)$  và  $F_0(z) = G_0(z)$ , ta có thể viết (8.72) dưới dạng:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{m=0}^M \gamma_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \frac{F_0(z)}{F_N(z)} \\ &= \sum_{m=0}^M \gamma_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M \gamma_m B_m(z)}{A_N(z)} \end{aligned} \quad (8.72)$$

Nếu so sánh (8.66) với (8.72), ta có thể kết luận:

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M \gamma_m B_m(z) \quad (8.73)$$

Đây là quan hệ cần tìm, nó có thể được dùng để xác định các hệ số trọng số  $\{\gamma_m\}$ . Như vậy ta đã chứng minh rằng các hệ số của đa thức tử số  $C_M(z)$  xác định các tham số thang  $\{\gamma_m\}$ , trong khi đó các hệ số của đa thức mẫu số  $A_N(z)$  xác định các tham số dàn  $\{K_m\}$ .

Khi đã có các đa thức  $C_M(z)$  và  $A_N(z)$ , với  $N \geq M$ , trước hết ta xác định các tham số của dàn toàn cực, như đã nói trước đây bằng thuật toán biến đổi đã cho ở mục 8.2.3 để biến đổi các hệ số dạng trực tiếp sang các hệ số dàn. Nhờ các hệ thức đệ quy giảm bậc từng bước đã cho ở (8.48), ta tìm được các tham số dàn  $\{K_m\}$  và các đa thức  $B_m(z)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

Các tham số thang xác định (8.71) có thể được biểu diễn như sau:

$$C_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k B_k(z) + \gamma_m B_m(z) \quad (8.74)$$

hoặc tương đương

$$C_m(z) = C_{m-1}(z) + \gamma_m B_m(z) \quad (8.75)$$

Như vậy có thể tính  $C_m(z)$  một cách đệ quy từ đa thức nghịch đảo  $B_m(z), m=1,2,\dots,N$ . Vì  $\beta_m(m)=1$  với mọi  $m$ , nên các tham số  $\gamma_m, m=0,1,\dots,M$  có thể được xác định trước hết theo:

$$\gamma_m = C_m(z) \quad m=1,2,\dots,M \quad (8.76)$$

và cho chạy ngược lại quan hệ đệ quy này theo  $m$  (nghĩa là  $m=M, m=M-1, \dots, 2$ ), ta sẽ có  $c_m(m)$  và các tham số thang ứng với (8.76).

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 8

Trong chương 8, chúng ta đã tìm hiểu các cấu trúc của các bộ lọc số FIR và bộ lọc số IIR. Các cấu trúc này chính là sự thể hiện các cách mô tả hệ thống theo phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng và theo hàm truyền đạt  $H(z)$  mà chúng ta đã học ở các chương 1 và chương 2:

+ Mô tả quan hệ vào ra hệ thống theo phương trình sai phân:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-k)$$

+ Mô tả hệ thống theo hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

### I. Cấu trúc bộ lọc số FIR

Cấu trúc bộ lọc số FIR bao các cấu trúc sau:

#### 1. Cấu trúc trực tiếp

Suy ra từ mô tả quan hệ vào ra theo phép chập:  $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$ . Lưu ý rằng chiều dài đáp ứng xung  $h(n)$  của bộ lọc số FIR là  $L[h(n)] = N$ .

Sau đó thực hiện biến đổi  $z$  để xây dựng sơ đồ cấu trúc. Lưu ý đặc tính của bộ lọc số  $h(n) = \pm h(N-1-n)$  sẽ giúp ta giảm số phép nhân và bộ cộng khoảng một nửa.

#### 2. Cấu trúc nối tiếp

Dựa trên  $H(z) = G \prod_{k=1}^N H_k(z)$

ở đây:

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2} \quad k=1,2,\dots,k$$

Ta sẽ xây dựng được một hệ thống  $k$  mắt lọc nối tiếp nhau, mỗi mắt lọc là một hàm bậc 2 như trên.

### 3. Cấu trúc bộ lọc số FIR theo lấy mẫu tần số

Cấu trúc được xây dựng từ biểu diễn đáp ứng tần số của bộ lọc số FIR:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

Và các giá trị  $H(e^{j\omega})$  tại các tần số  $\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)(k + \alpha)$  chính là:

$$\begin{aligned} H(k + \alpha) &= H\left[\frac{2\pi}{N}(k + \alpha)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)n/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Từ đây, biểu diễn  $h(n)$  theo các mẫu tần số:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

để đưa ra sơ đồ hệ thống.

### 4. Cấu trúc bộ lọc số FIR dạng dàn (mắt cáo).

Cấu trúc này được xây dựng dựa trên xét một dãy bộ lọc FIR với hàm hệ thống:

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

ở đây  $A_m(z)$  là một đa thức:

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k) z^{-k} \quad m \geq 1$$

$A_0(z) = 1$ . Đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc thứ  $m$  là  $h_m(0) = 1$  và  $h_m(k) = \alpha_m(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Chỉ số dưới  $m$  ở đa thức  $A_m(z)$  ký hiệu cấp của đa thức. Ta sẽ xây dựng cấu trúc bộ lọc, tìm ra các hệ số từ các giá trị cụ thể của chỉ số  $m$ .

**Lưu ý:** Trong các ứng dụng thực tế, cấu trúc dàn toàn cực được dùng để mô hình bộ phận âm thanh con người. Trong trường hợp như thế, các tham số dàn  $\{k_m\}$  có ý nghĩa vật lý của các hệ số phản xạ sẽ đồng nhất trong môi trường vật lý. Đây là lý do để cho các tham số dàn thường được gọi là hệ số phản xạ. Trong các áp dụng như thế, mô hình ổn định của môi trường đòi hỏi các hệ số phản xạ, có được nhờ việc đo tín hiệu ra từ môi trường, phải nhỏ hơn đơn vị.

## II. Cấu trúc bộ lọc số IIR

Tương tự như cách xây dựng bộ lọc số FIR, bộ lọc số IIR cũng có cấu trúc dạng trực tiếp, cấu trúc dạng nối tiếp, cấu trúc dàn và cấu trúc dàn thang (mắt cáo). Ngoài ra, còn có thêm dạng

cấu trúc song song dựa trên phân tích  $H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$ .

**Lưu ý:** Trong cấu trúc trực tiếp bộ lọc số IIR ta có thể dựa trên phân tích

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

II. Hoán vị  $H_1(z)$  và  $H_2(z)$ , áp dụng định lý chuyển vị để đưa ra các dạng cấu trúc trực tiếp I và

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhx@e-ptit.edu.vn](mailto:dhx@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA

cuu duong than cong . com

Một vài cấu trúc bậc hai của hệ thống rời rạc.

Loại	Cấu trúc	Phương trình thực hiện	Hàm hệ thống
Trực tiếp		$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Trực tiếp chuyển vị loại I		$\begin{aligned} \omega(n) &= -a_1\omega(n-1) + a_2\omega(n-2) + x(n) \\ \omega(n) &= b_0\omega(n) + b_1\omega(n-1) + b_2\omega(n-2) \end{aligned}$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Trực tiếp chuyển vị loại II		$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + \omega_1(n-1) \\ \omega_1(n) &= b_1x(n) - a_1y(n) + \omega_2(n-1) \\ \omega_2(n) &= b_2x(n) - a_2y(n) \end{aligned}$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 8

### Bài 8.1

Cho bộ lọc có hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Hãy biểu diễn bộ lọc theo dạng trực tiếp

### Bài 8.2

Cho bộ lọc có hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Hãy biểu diễn bộ lọc theo dạng chuẩn tắc trực tiếp II

### Bài 8.3

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$2y(n) + y(n-1) = 4x(n) + 6x(n-1) + x(n-2)$$

Hãy thể hiện hệ thống ở dạng trực tiếp

### Bài 8.4

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$y'(n) + 0.5y(n-1) + 2y(n-2) = 2x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2)$$

Hãy vẽ sơ đồ hệ thống ở dạng chuẩn tắc trực tiếp 2

### Bài 8.5

Cho hệ thống với hàm truyền đạt

$$H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} + 0.5z^{-2}}{2 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 0.5z^{-3} + z^{-4}}$$

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống ở dạng trực tiếp và chuẩn tắc.

### Bài 8.6

Cho hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$2y(n) + 5y(n-1) + y(n-2) + y(n-3) = 2x(n) + x(n-1) + 0.5x(n-2)$$

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống ở dạng trực tiếp và chuẩn tắc.

### Bài 8.7

Cho một lọc dần 3 tầng với các hệ số  $k_1 = \frac{1}{4}, k_2 = \frac{1}{2}, k_3 = \frac{1}{3}$ , hãy tìm các hệ số bộ lọc FIR có cấu trúc dạng trực tiếp.



**Bài 8.8**

Cho một lọc dần 5 tầng với các hệ số  $k_1 = \frac{1}{4}, k_2 = \frac{1}{2}, k_3 = \frac{1}{3}, k_4 = \frac{1}{4}, k_5 = \frac{1}{2}$ , hãy tìm các hệ số bộ lọc FIR có cấu trúc dạng trực tiếp.

**Bài 8.9**

Tìm các hệ số dần tương ứng với bộ lọc FIR có hàm hệ thống:

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

**Bài 8.10**

Tìm các hệ số dần tương ứng với bộ lọc FIR có hàm hệ thống:

$$H(z) = A_2(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}$$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

## CHƯƠNG IX: LỌC SỐ NHIỀU NHỊP

### GIỚI THIỆU

Trong phần ứng dụng thực tiễn của xử lý tín hiệu số, ta có thể gặp bài toán chuyển đổi tốc độ lấy mẫu của một tín hiệu, tăng hoặc giảm nó theo một lượng nào đấy. Ví dụ, trong hệ thống viễn thông, việc phát và thu các loại tín hiệu khác nhau (chẳng hạn, teletip, Facimín, tiếng nói, hình ảnh v.v...) đòi hỏi phải có sự xử lý tín hiệu khác nhau theo các tốc độ khác nhau tương ứng với độ rộng băng tín hiệu. Quá trình biến đổi một tín hiệu từ tốc độ đã cho sang một tốc độ khác được gọi là *biến đổi tốc độ lấy mẫu*. Trong khi đó, hệ thống dùng nhiều tốc độ lấy mẫu trong xử lý tín hiệu được gọi là *hệ thống xử lý tín hiệu số đa tốc độ*.

Sự biến đổi tốc độ lấy mẫu của tín hiệu số có thể được thực hiện theo một trong hai phương pháp tổng quát. Phương pháp thứ nhất cho tín hiệu số qua bộ biến đổi D/A, lọc nó nếu cần và sau đó lấy mẫu lại tín hiệu tương tự thu được tại tốc độ mong muốn (tức là cho tín hiệu tương tự qua bộ A/D). Phương pháp thứ hai là thực hiện việc biến đổi tốc độ lấy mẫu trong miền số.

Một ưu điểm của phương pháp thứ nhất là tốc độ lấy mẫu mới có thể được chọn tùy ý và không cần có liên hệ đặc biệt nào đối với tốc độ lấy mẫu cũ. Tuy nhiên, nhược điểm chính là có méo tín hiệu do D/A tái phục hồi và ảnh hưởng lượng tử hoá trong biến đổi A/D. Ngược lại, vấn đề nảy sinh trong khi thực hiện biến đổi tốc độ lấy mẫu ở miền số là ở chỗ tỷ số của tốc độ lấy mẫu mới và cũ phải là hữu tỷ. Tuy nhiên, ràng buộc này không gây ra hạn chế trong hầu hết các ứng dụng thực tiễn. Do đó việc biến đổi tốc độ lấy mẫu luôn luôn được thực hiện trong miền số.

Trước khi xét trường hợp biến đổi tốc độ lấy mẫu tổng quát bằng hệ số  $\frac{M}{L}$ , ta xét hai trường hợp đặc biệt. Một là trường hợp giảm tốc độ lấy mẫu theo hệ số  $M$  và hai là tăng tốc độ lấy mẫu bằng hệ số  $L$ . Quá trình giảm tốc độ lấy mẫu bằng hệ số nguyên  $M$  được gọi là *phân chia*. Quá trình tăng tốc độ lấy mẫu bởi hệ số nguyên  $L$  được gọi là *nội suy*.

Trong chương này chúng ta sẽ đề cập đến các nội dung:

- Phép phân chia hệ số  $M$ .
- Phép nội suy hệ số  $L$ .
- Thay đổi nhịp lấy mẫu với hệ số  $M/L$ .
- Bộ lọc phân chia
- Bộ lọc nội suy
- Bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu hệ số  $M/L$ .
- Mã hóa bằng con.

## NỘI DUNG

### 9.1. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

Thay đổi nhịp lấy mẫu nghĩa là thay đổi tần số và chu kỳ lấy mẫu, ta sẽ tìm hiểu một số định nghĩa sau.

#### 9.1.1. Định nghĩa về phân chia và nội suy

##### a. Định nghĩa hệ thống xử lý số nhiều nhịp.

Nếu trong một hệ thống xử lý số tín hiệu, tần số lấy mẫu (nhịp lấy mẫu) được thay đổi trong quá trình xử lý thì hệ thống xử lý đó là hệ thống xử lý số nhiều nhịp.

##### b. Định nghĩa phép phân chia (Decimation)

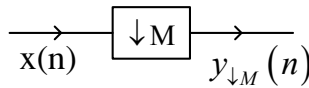
Việc giảm tần số lấy mẫu từ một giá trị  $F_s$  về một giá trị  $F'_s$  ( $F'_s < F_s$ ) gọi là phép phân chia.

- Nếu  $F'_s = \frac{F_s}{M}$  ( $M \in \mathbb{N}$ ,  $M > 1$ ) thì ta gọi phép phân chia theo hệ số  $M$ , và  $M$  gọi là hệ số phân chia.

##### c. Định nghĩa bộ phân chia

Hệ thống làm nhiệm vụ giảm tần số lấy mẫu được gọi là bộ phân chia.

Ký hiệu bộ phân chia:



Ký hiệu toán tử:

$$\begin{aligned} \downarrow M [x(n)] &= y_{\downarrow M}(n) \\ x(n) &\xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(n) \end{aligned} \quad (9.1)$$

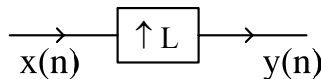
##### d. Định nghĩa phép nội suy (Interpolation)

Việc tăng tần số lấy mẫu từ một giá trị  $F_s$  lên  $F'_s$  ( $F'_s > F_s$ ) được gọi là phép nội suy.

Nếu  $F'_s = LF_s$  ( $L$  nguyên dương) thì người ta gọi là phép nội suy theo hệ số  $L$ . Còn  $L$  được gọi là hệ số nội suy.

##### e. Định nghĩa bộ nội suy

Hệ thống làm nhiệm vụ tăng tần số lấy mẫu được gọi là bộ nội suy.



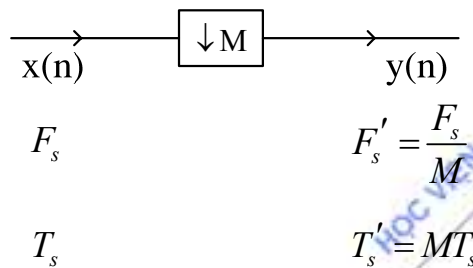
Ký hiệu toán tử:

$$\begin{aligned} \uparrow L[x(n)] &= y_{\uparrow L}(n) \\ x(n) &\xrightarrow{\downarrow L} y_{\uparrow L}(n) \end{aligned} \quad (9.2)$$

### 9.1.2. Phương pháp phân chia theo hệ số M

#### a. Biểu diễn trong miền n

Hệ thống và mối liên quan giữa tần số, chu kỳ của đầu vào và đầu ra hệ thống khi phân chia theo hệ số M trong miền n được thể hiện như sau.



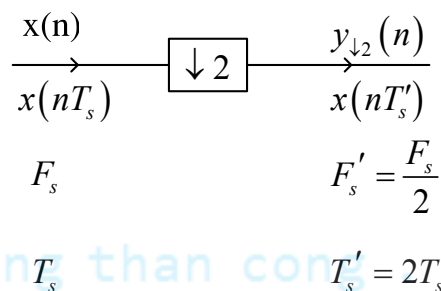
#### Ví dụ 9.1

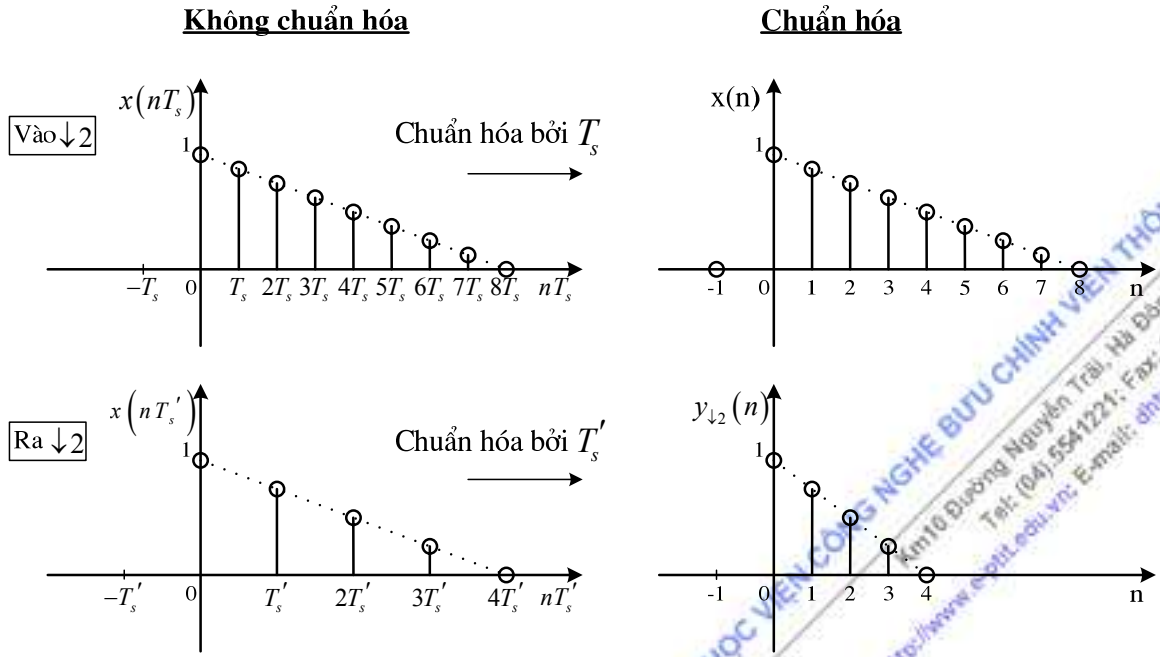
Cho một tín hiệu rời rạc sau đây:  $x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{8} & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Tín hiệu này đi qua bộ lọc phân chia với hệ số M = 2. Hãy vẽ dạng tín hiệu dưới dạng không chuẩn hóa và chuẩn hóa trước và sau khi ra khỏi bộ phân chia.

**Giải:**

Ta sẽ thực hiện bài toán trên như sau:





Hình 9.1 Minh họa kết quả của ví dụ 9.1

Sau khi ra khỏi bộ phân chia, chiều dài của tín hiệu giảm đi một nửa, ta gọi là nén tín hiệu.

$$\frac{L[x(n)]}{L[y_{\downarrow 2}(n)]} = 2$$

Trong miền  $n$  thì tín hiệu co lại, trong miền tần số  $\omega$  thì phổ bị giãn ra và như vậy sẽ gây hiện tượng chồng phổ và tín hiệu sẽ bị sai lệch đi.

Để khắc phục hiện tượng chồng phổ, trước khi đưa vào bộ phân chia, người ta phải đưa tín hiệu vào bộ lọc để cắt bớt phổ đi, sau đó tín hiệu đi qua bộ phân chia, lúc này phổ bị giãn ra tương ứng nên không có chồng phổ.

### b. Biểu diễn trong miền $z$

Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống khi phân chia theo hệ số  $M$  trong miền  $z$  được phân tích như sau.

$$y_{\downarrow M}(n) = x(nM)$$

$$\xrightarrow{x(z)} \boxed{\downarrow M} \xrightarrow{y_{\downarrow M}(z)}$$

Dùng biến đổi  $Z$ :

$$Y_{\downarrow M}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\downarrow M}(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nM) z^{-n}$$

Đổi biến số:  $nM = m$ ;  $n = \frac{m}{M}$

$$Y_{\downarrow M}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-\frac{m}{M}}, \text{ với điều kiện } m \text{ là số nguyên lần của } M$$

Định nghĩa dãy  $p(m)$

$$p(m) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}lm} = \begin{cases} 1 & \text{khi } m = nM \\ 0 & \text{khi } m \neq nM \end{cases} \quad (9.3)$$

Suy ra:

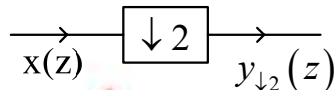
$$\begin{aligned} Y_{\downarrow M}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) p(m) z^{-\frac{m}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{l=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}lm} z^{-\frac{m}{M}} \\ Y_{\downarrow M}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{M}lm} z^{-\frac{m}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \underbrace{\left( e^{-j\frac{2\pi}{M}l} z^{\frac{1}{M}} \right)^{-m}}_{z'^{-m}} \end{aligned}$$

Vậy:

$$Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left( e^{-j\frac{2\pi}{M}l} z^{\frac{1}{M}} \right) \quad (9.4)$$

### Ví dụ 9.2

Cho dãy  $x(n)$  sau đây



Tín hiệu này đi qua bộ phân chia với hệ số  $M = 2$ . Tính  $X(z)$  và  $Y_{\downarrow 2}(z) = ?$

**Giải:**

Ta có:  $X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5} \quad (*)$

$$Y_{\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 X\left( e^{-j\pi l} z^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[ X\left( z^{\frac{1}{2}} \right) + X\left( -z^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

Thay vào (\*):

$$X\left( z^{\frac{1}{2}} \right) = z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{-1} + 3z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-2} + z^{-\frac{5}{2}}$$

$$X\left( -z^{\frac{1}{2}} \right) = -z^{-\frac{1}{2}} + 2z^{-1} - 3z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-2} - z^{-\frac{5}{2}}$$



$$X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)=4z^{-1}+4z^{-2}$$

$$Y_{\downarrow 2}(z)=4z^{-1}+4z^{-2}$$

### c. Biểu diễn trong miền $\omega$

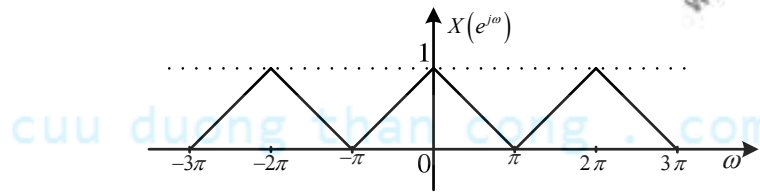
Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống khi phân chia theo hệ số M trong miền  $\omega$  được biểu diễn như sau.

$$Y_{\downarrow M}\left(e^{j\omega}\right)=Y_{\downarrow M}(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}X\left(e^{-j\frac{2\pi l}{M}}.e^{j\frac{\omega}{M}}\right)$$

$$Y_{\downarrow M}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right) \quad (9.5)$$

### Ví dụ 9.3

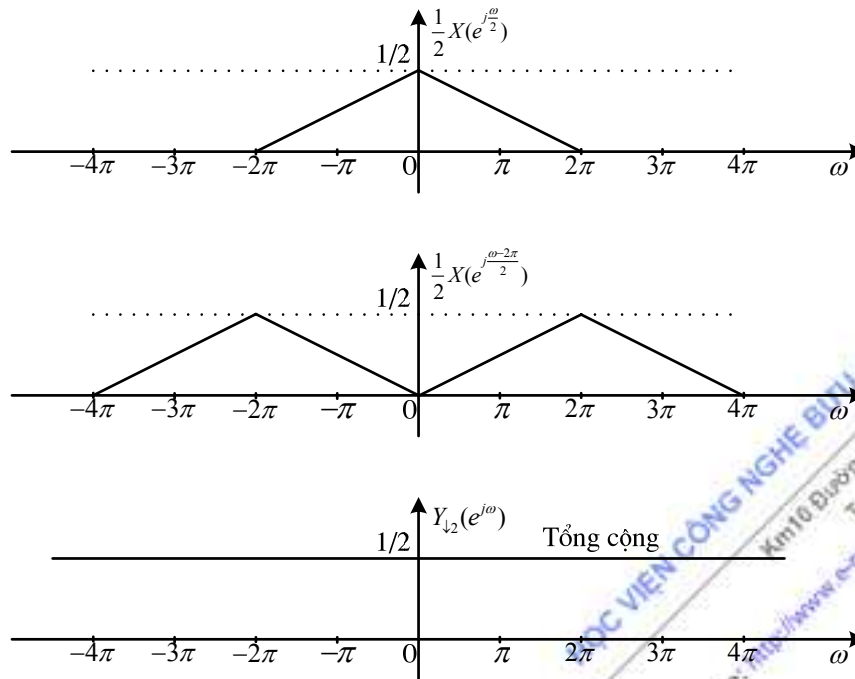
Cho một tín hiệu rời rạc  $x(n)$  có phổ như sau:



Tín hiệu này đi qua bộ phân chia với  $n = 2$ . Tìm phổ  $Y_{\downarrow 2}\left(e^{j\omega}\right) = ?$

**Giải:**

$$Y_{\downarrow 2}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}}\right), \text{ biến là } \frac{\omega}{2}$$

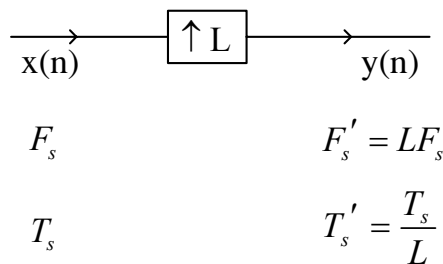


Hình 9.2 Minh họa kết quả của ví dụ 9.3

### 9.1.3. Phép nội suy với hệ số L

#### a. Biểu diễn trong miền n

Hệ thống và mối liên quan giữa tần số, chu kỳ của đầu vào và đầu ra hệ thống khi nội suy theo hệ số L trong miền n được thể hiện như sau.

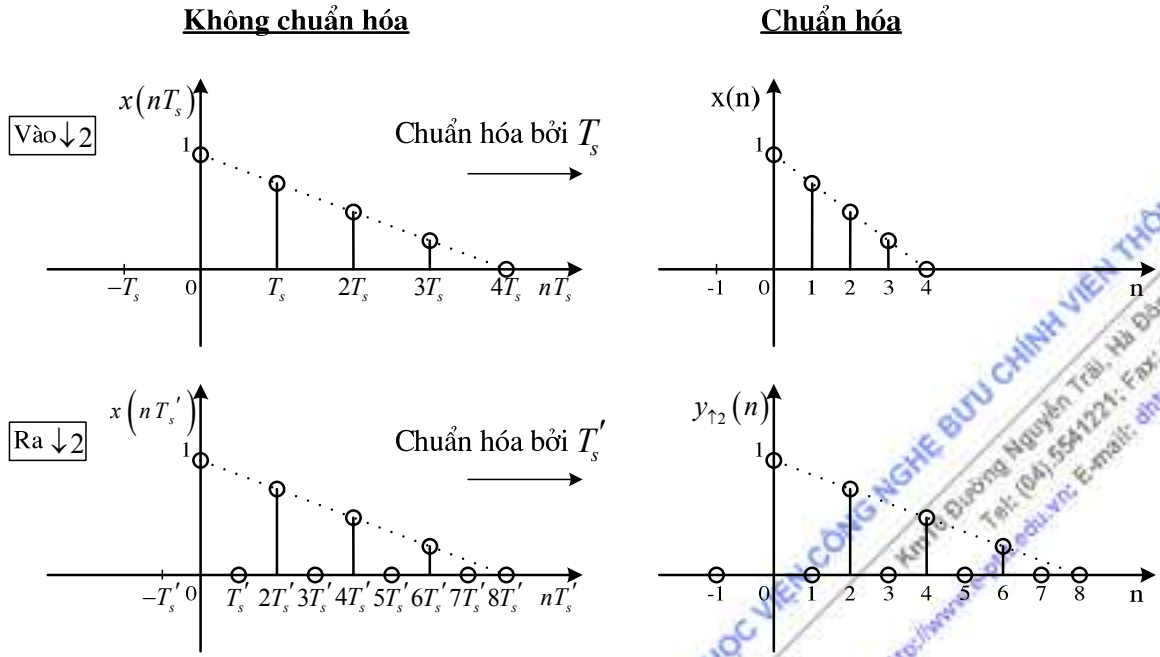


#### Ví dụ 9.4

Cho tín hiệu: 
$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tín hiệu này đi qua bộ nội suy với  $L = 2$ . Hãy biểu diễn tín hiệu ở dạng chuẩn hóa và không chuẩn hóa trước và sau khi ra khỏi bộ nội suy.

**Giải:**



Hình 9.3 Minh họa kết quả của ví dụ 9.4

**Nhận xét:** Tín hiệu qua bộ nội suy  $L = 2$  thì chiều dài tăng lên gấp đôi và phổ co lại, không chồng được.

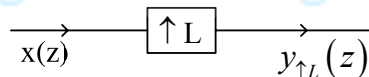
Vậy: Tín hiệu qua bộ nội suy  $L$  thì tín hiệu có chiều dài tăng lên gấp  $L$ .

Ta sẽ xác định các giá trị  $n$  như sau

$$y_{\uparrow 2}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0 & n \text{ lẻ} \end{cases} \quad (9.6)$$

### b. Biểu diễn trong miền $z$

Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống khi nội suy theo hệ số  $L$  trong miền  $z$  được phân tích như sau.



$$Y_{\uparrow L}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{L}\right) z^{-n}, \text{ Thay } n = mL$$

$$Y_{\uparrow L}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mL} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (z^L)^{-m} = X(z^L) \quad (9.7)$$

### Ví dụ 9.5

Cho tín hiệu  $x(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$ . Tín hiệu này qua bộ nội suy với  $L = 2$ .

Tìm  $X(z) = ?$  và  $Y_{\uparrow L}(z) = ?$

**Giải:**

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

$$Y_{\uparrow 2}(z) = z^{-2} + 2z^{-4} + 3z^{-6} + 2z^{-8} + z^{-10}$$

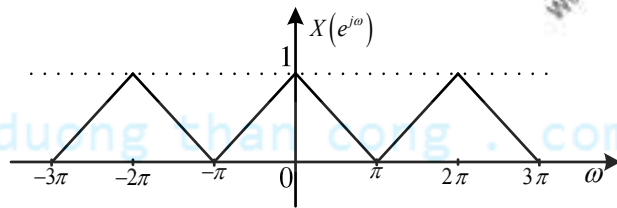
### c Biểu diễn trong miền $\omega$

Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống khi nội suy theo hệ số  $L$  trong miền  $\omega$  được biểu diễn như sau.

$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = Y(z) \Big|_{z=e^{j\omega L}} = X(e^{j\omega L}) \quad (9.8)$$

### Ví dụ 9.6

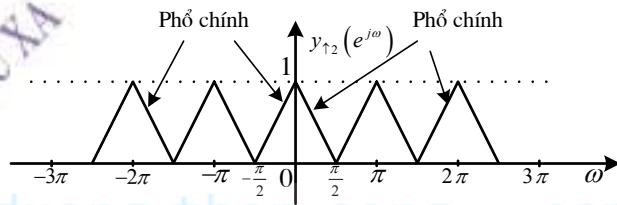
Cho tín hiệu  $x(n)$  có phổ như sau:



Tín hiệu này đi qua bộ nội suy với  $L = 2$ . Hãy vẽ phổ:  $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = ?$

**Giải:**

$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$$



Như vậy, xuất hiện những phần không phải là phổ chính, để chèn 0 vào ta phải đưa vào bộ

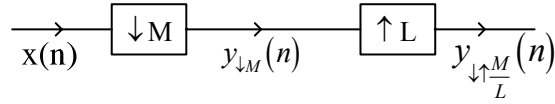
lọc  $\frac{\pi}{L}$ .

### 9.1.4. Thay đổi nhíp lấy mẫu với hệ số $\frac{M}{L}$

#### a. Biểu diễn trong miền $n$

Hệ thống và mối liên quan giữa tần số, chu kỳ của đầu vào và đầu ra hệ thống khi biến đổi nhíp lấy mẫu theo hệ số M/L trong miền n được thể hiện như sau.

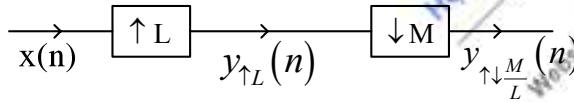
**Ta xét sơ đồ 1:**



$$\begin{aligned} F_s & \quad F'_s = \frac{F_s}{M} \quad F''_s = LF'_s = \frac{L}{M} F_s \\ T_s & \quad T'_s = MT_s \quad T''_s = \frac{T'_s}{L} = \frac{M}{L} T_s \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(n)$$

**Sơ đồ 2:**



$$\begin{aligned} F_s & \quad F'_s = LF_s \quad F''_s = \frac{F'_s}{M} = \frac{L}{M} F_s \\ T_s & \quad T'_s = \frac{T_s}{L} \quad T''_s = MT'_s = \frac{M}{L} T_s \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(n)$$

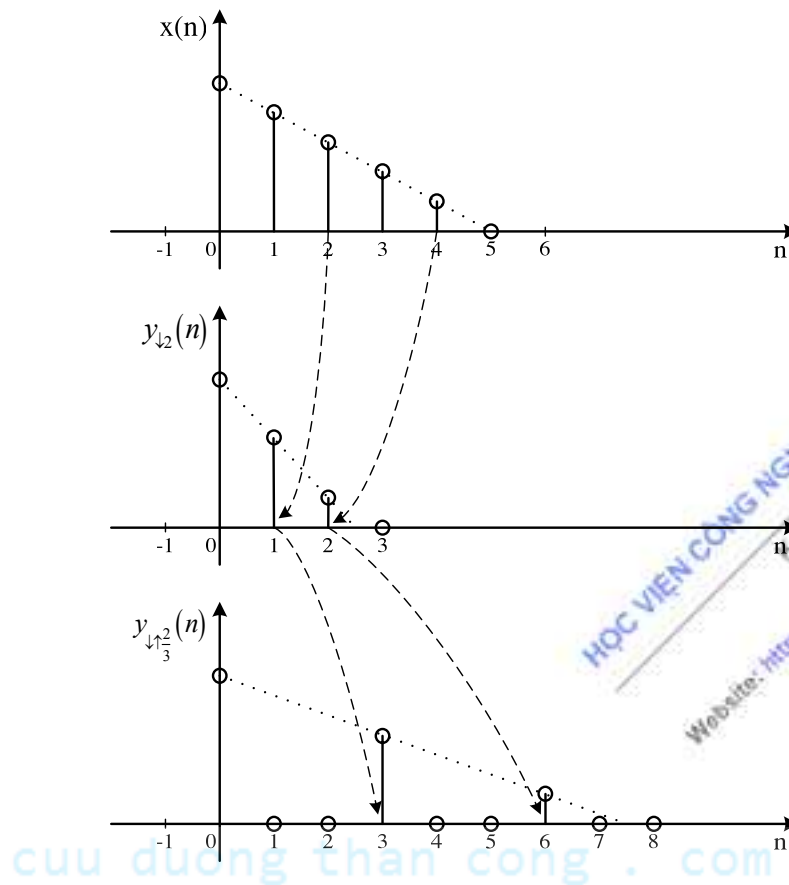
**Ví dụ 9.7**

Cho tín hiệu:  $x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{5} & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Tín hiệu này đi qua bộ biến đổi nhíp lấy mẫu  $\downarrow \uparrow \frac{M}{L}$  và  $\uparrow \downarrow \frac{M}{L}$  với  $\frac{M}{L} = \frac{2}{3}$ . Tìm

$y_{\downarrow \uparrow \frac{2}{3}}(n) = ?$  và  $y_{\uparrow \downarrow \frac{2}{3}}(n) = ?$

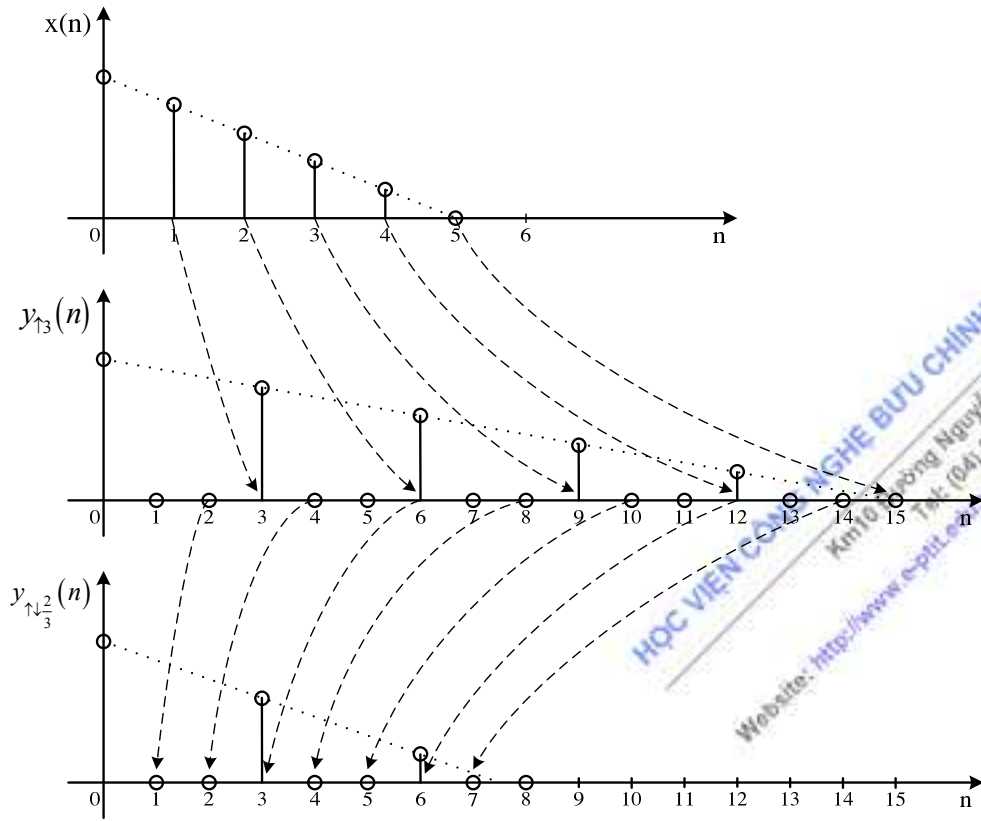
**Giải:** Theo sơ đồ giảm trước tăng sau  $\downarrow \uparrow$  ta có:



Hình 9.4 Sơ đồ giảm trước tăng sau  $\downarrow \uparrow$  theo hệ số  $2/3$  tín hiệu  $x(n)$

Theo sơ đồ tăng trước giảm sau  $\uparrow \downarrow$  ta có:





Hình 9.5 Sơ đồ tăng trước giảm sau  $\uparrow\downarrow$  theo hệ số 2/3 tín hiệu  $x(n)$

Nhận xét:  $y_{\downarrow\frac{2}{3}}(n) \equiv y_{\uparrow\frac{2}{3}}(n)$

Tổng quát:  $y_{\downarrow\frac{M}{L}}(n) \equiv y_{\uparrow\frac{M}{L}}(n)$ , Trường hợp này sẽ thỏa mãn nếu M và L thỏa mãn điều kiện sau đây:  $n_0L - n_1M = 1; n_1M - n_0L = 1$ . Với L và M thỏa mãn quan hệ EUCLID;  $n_0, n_1$ : các số nguyên.

### b. Biểu diễn trong miền z

Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống biến đổi nhíp lấy mẫu theo hệ số M/L trong miền z được phân tích như sau.

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow\frac{M}{L}} Y_{\downarrow\frac{M}{L}}(n) \quad (9.11)$$

**Trường hợp 1:**

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\downarrow\frac{M}{L}}(z)$$

$$Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \quad (9.12)$$

$$Y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) = Y_{\downarrow M}(z^L) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{L}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \quad (9.13)$$

**Trường hợp 2:**

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(z)$$

$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L) \quad (9.14)$$

$$Y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow L}\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{L}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \quad (9.15)$$

**Ví dụ 9.8**

Xét trường hợp  $L = M$

$$Y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{M}}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

Khi tín hiệu co lại đã sinh ra hiện tượng chồng phổ thì khi ta giãn phổ ra sẽ nhận được kết quả sai nên thu được tín hiệu sai.

$$Y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{M}}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z e^{-j2\pi l}\right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z) = X(z)$$

Trường hợp trên thì tín hiệu không bị sai vì ta đã giãn tín hiệu trước rồi mới co lại.

### c. Biểu diễn trong miền $\omega$

Hệ thống và mối liên quan giữa đầu vào và đầu ra hệ thống biến đổi nhịp lấy mẫu theo hệ số  $M/L$  trong miền  $\omega$  được thể hiện như sau.

$$Y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(e^{j\omega}) = Y_{\downarrow \uparrow \frac{M}{L}}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega L - 2\pi l}{M}}\right)$$

$$Y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow \downarrow \frac{M}{L}}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega L - 2\pi Ll}{M}}\right) \quad (9.16)$$

## 9.2. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP LẤY MẪU

### 9.2.1. Bộ lọc phân chia

Sau khi đã nghiên cứu phép phân chia và bộ phân chia, kết quả cho ta thấy tín hiệu  $x(n)$  khi đi qua bộ phân chia hệ số  $M$ , trong miền tần số sẽ tạo ra  $M-1$  thành phần lẫn mẫu (aliasing) gây ra hiện tượng chồng phổ. Để không gây ra chồng phổ thì ta phải cho tín hiệu này qua bộ lọc thông thấp có tần số cắt  $\omega_c = \frac{\pi}{M}$ .

Sơ đồ thể hiện như sau:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 \xrightarrow{\quad} & \boxed{h(n)} & \xrightarrow{\quad} & \boxed{\downarrow M} & \xrightarrow{\quad} \\
 x(n) & & y_H(n) & & y_{H\downarrow M}(n)
 \end{array} \\
 \omega_c = \frac{\pi}{M} \\
 F_s \qquad \qquad F_s \qquad \qquad F'_s \\
 x(n) \xrightarrow{H} y_H(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{H\downarrow M}(n)
 \end{array} \quad (9.17)$$

**a. Biểu diễn trong miền n**

Các quan hệ toán học trong bộ lọc phân chia ở miền n được thực hiện như sau:

$$y_H(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y_{H\downarrow M}(n) = y_H(nM) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(nM-k) \quad (9.18)$$

**Ví dụ 9.9**

Cho  $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $y_{H\downarrow 2}(n) = ?$

**Giải:**

$$\begin{array}{ccccc}
 \xrightarrow{\quad} & \boxed{h(n)} & \xrightarrow{\quad} & \boxed{\downarrow 2} & \xrightarrow{\quad} \\
 x(n) & & y_H(n) & & y_{H\downarrow 2}(n) = ?
 \end{array}$$

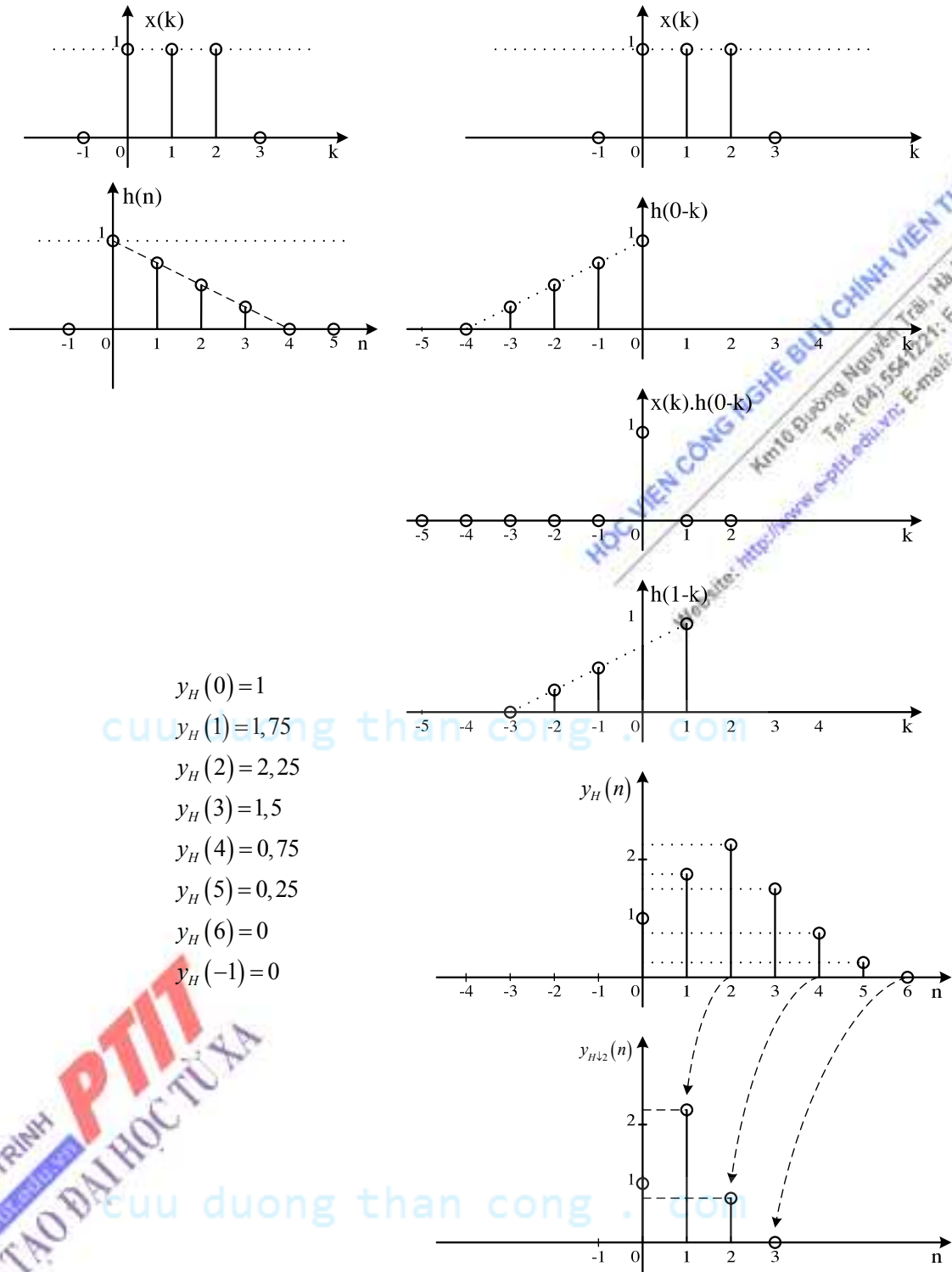
Thực hiện tích chập tuyến tính:

$$y_H(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y_H(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k)$$

$$y_H(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)$$

$$y_H(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$$



Hình 9.6 Minh họa ví dụ 9.9

### b. Biểu diễn trong miền $z$

Các quan hệ toán học trong bộ lọc phân chia ở miền  $z$  được thực hiện như sau.

$$X(z) \rightarrow Y_H(z) \rightarrow Y_{H/2}(z)$$

$$Y_H(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y_{H \downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

$$Y_{H \downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \cdot H\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) \quad (9.19)$$

### Ví dụ 9.10

Cho  $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $y_{H \downarrow 2}(z)$ ?

**Giải:**

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

$$Y_H(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y_{H \downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 X\left(z^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{2}l}\right) \cdot H\left(z^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{2}l}\right)$$

$$Y_{H \downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{X(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})}_{Y_H(z^{\frac{1}{2}})} + \underbrace{X(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})}_{Y_H(-z^{\frac{1}{2}})} \right]$$

$$Y_H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} + z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4} + z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-4} + \frac{1}{4}z^{-5}$$

$$Y_H(z) = 1 + \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{9}{4}z^{-2} + \frac{6}{4}z^{-3} + \frac{3}{4}z^{-4} + \frac{1}{4}z^{-5}$$

Ta có:

$$Y_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{7}{4}z^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{6}{4}z^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-\frac{5}{2}}$$

$$Y_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{7}{4}z^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4}z^{-1} - \frac{6}{4}z^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{Vậy: } Y_{H\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{18}{4} z^{-1} + \frac{6}{4} z^{-2} \right) = 1 + \frac{9}{4} z^{-1} + \frac{3}{4} z^{-2}$$

**Chú ý:** ta hãy xem xét bộ lọc kết cấu như sau trong miền Z thông qua ví dụ 9.11

**Ví dụ 9.11**

Xét hai sơ đồ sau và cho nhận xét:

$$X(z) \xrightarrow{H(z^M)} Y_H(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(z) \quad (\text{Sơ đồ 1})$$

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\downarrow MH}(z) \quad (\text{Sơ đồ 2})$$

**Giải:**

$$\text{Xác định: } Y_H(z) = X(z).H(z^M)$$

$$Y_{H\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}) H(z)$$

$$Y_{H\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} H(z) \sum_{l=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l})$$

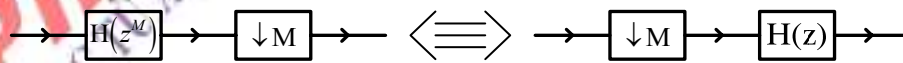
Bây giờ đảo lại ở sơ đồ 2 ta có:

$$X(z) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{\downarrow M}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\downarrow MH}(z)$$

$$Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

$$Y_{\downarrow MH}(z) = H(z).Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} H(z) \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

Kết luận: Hai sơ đồ là đồng nhất



Sơ đồ 1

Sơ đồ 2

Kết quả này của ví dụ 9.11 được ứng dụng rất nhiều trong mã hóa băng con.

**c. Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$**

Các quan hệ toán học trong bộ lọc phân chia ở miền tần số  $\omega$  được thực hiện như sau.

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(e^{j\omega})} Y_H(e^{j\omega}) \xrightarrow{\downarrow M} Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega})$$

$$Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) = Y_{H\downarrow M}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_H\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$$



$$Y_{H \downarrow M}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right) H\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right) \quad (9.20)$$

Nếu lấy tần số cắt  $\omega_c = \frac{\pi}{M}$  thì trong miền này phổ sẽ không chồng nhau.

### Ví dụ 9.12

Cho tín hiệu  $x(n)$  có phổ  $X(e^{j\omega})$  như hình vẽ. Tín hiệu này qua bộ lọc thông thấp lý tưởng với  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ , sau đó qua bộ phân chia với  $M = 2$ . Vẽ  $Y_{H \downarrow 2}(e^{j\omega}) = ?$

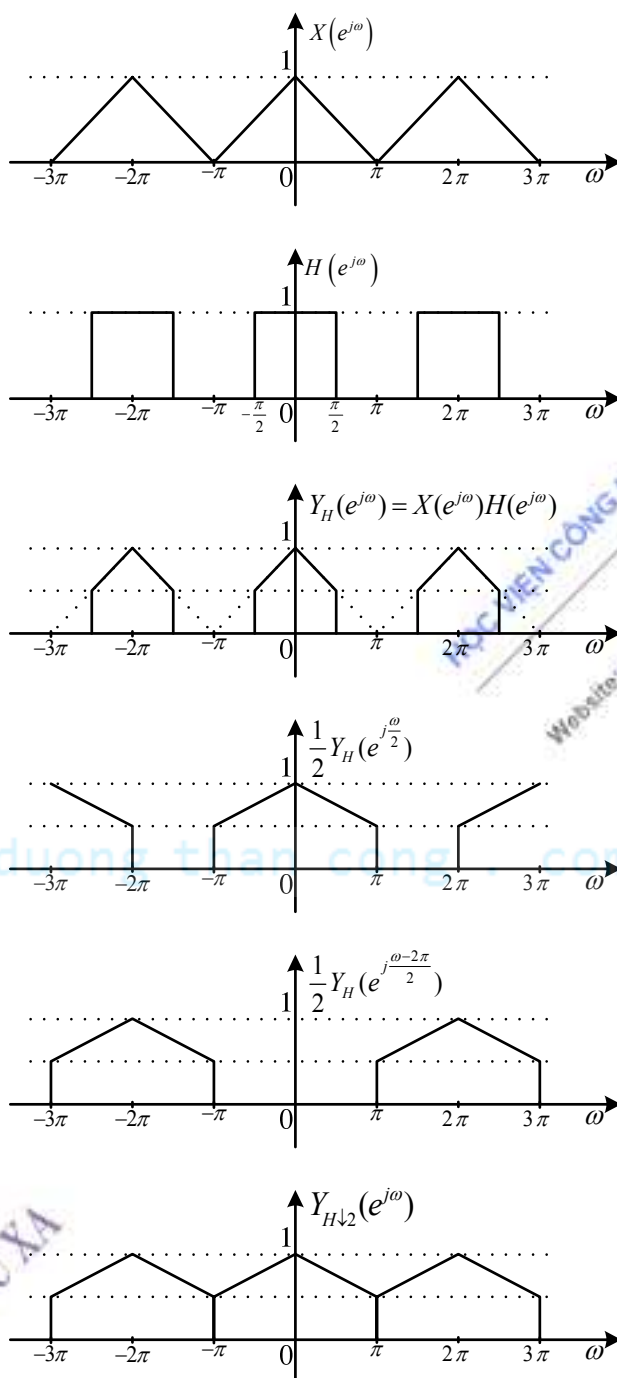
**Giải:**

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH ĐIỆN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA  
[www.e-ptit.edu.vn](http://www.e-ptit.edu.vn)

cuu duong than cong . com

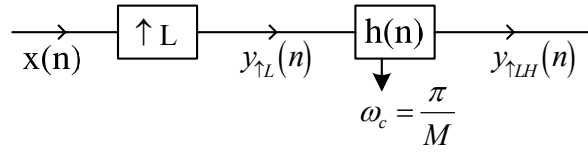


Hình 9.6 Minh họa ví dụ 9.12

### 9.2.2. Bộ lọc nội suy

Chúng ta đã nghiên cứu phép nội suy và bộ nội suy, kết quả phép nội suy đã chèn thêm  $L-1$  mẫu biên độ bằng 0 vào giữa hai mẫu của tín hiệu vào  $x(n)$  trong miền biến số  $n$ . Tương ứng trong miền tần số sẽ tạo ra  $L-1$  ảnh phụ mà không gây hiện tượng chồng phổ, như vậy phép nội suy không làm hư thông tin. Nhưng để nội suy các mẫu có biên độ bằng 0 ta phải đặt sau bộ nội suy

một bộ lọc có tần số cắt  $\omega_c = \frac{\pi}{L}$ . Trong miền n bộ lọc này có nhiệm vụ nội suy ra các mẫu biên độ 0, còn trong miền tần số nó làm nhiệm vụ loại bỏ các ảnh phụ của phổ cơ bản.



### a. Biểu diễn trong miền n

Các quan hệ toán học trong bộ lọc nội suy ở miền n được thực hiện như sau.

$$\begin{aligned}
 x(n) &\xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{H} y_{\uparrow LH}(n) \\
 y_{\uparrow L}(n) &= \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \neq \end{cases} \\
 y_{\uparrow LH}(n) &= y_{\uparrow L}(n) * h(n) = h(n) * y_{\uparrow L}(n) \\
 y_{\uparrow LH}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{L}\right) h(n-k), \\
 &k = 0, \pm L, \pm 2L, \dots
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Đổi biến số:  $r = \frac{k}{L} \rightarrow k = rL$  ta có:

$$y_{\uparrow LH}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) h(n - rL) \tag{9.22}$$

### Ví dụ 9.13

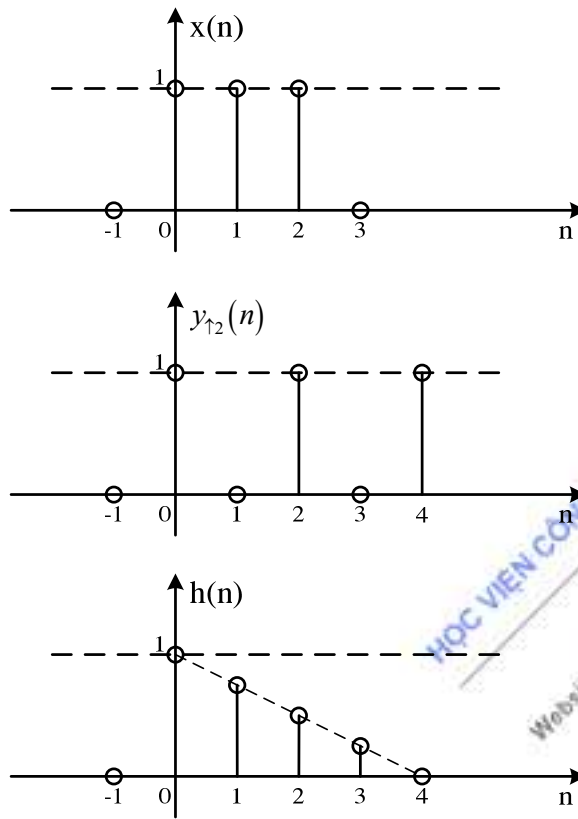
Cho  $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $y_{\downarrow 2H}(n) = ?$

**Giải:**

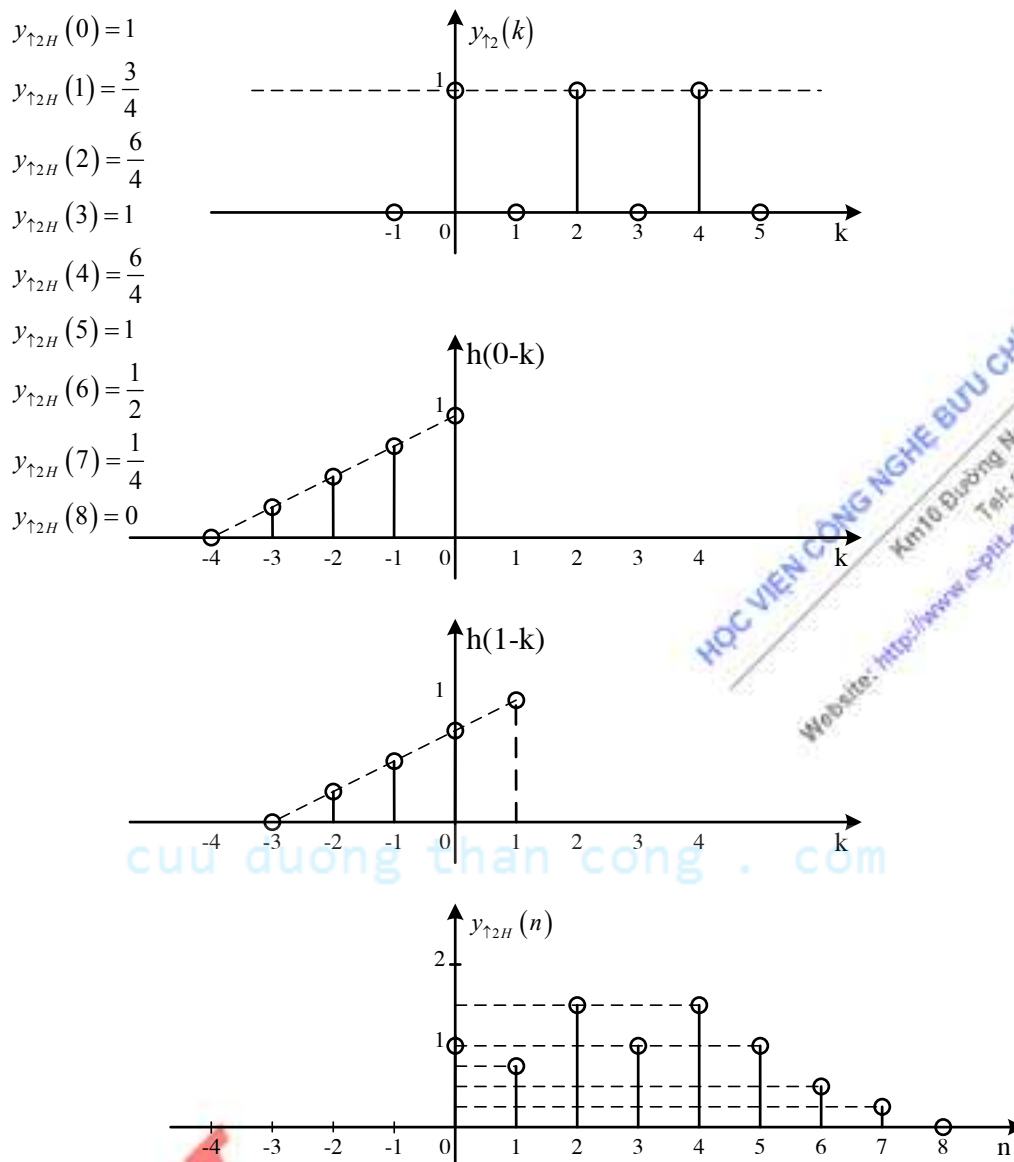
Qua bộ nội suy với  $n = 2$  thì cứ 2 điểm ta chèn 1 điểm 0



Hình 9.7 Minh họa ví dụ 9.13

Cho chấp:

$$y_{\uparrow 2H}(n) = y_{\uparrow 2}(n) * h(n) = h(n) * y_{\uparrow 2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow 2}(k) h(n-k)$$



Hình 9.8 Kết quả phép chập trong ví dụ 9.13

### b. Biểu diễn trong miền z

Các quan hệ toán học trong bộ lọc nội suy ở miền z được thực hiện như sau.

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z)$$

$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L)$$

$$Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z) \cdot H(z) = X(z^L) \cdot H(z) \quad (9.23)$$

### Ví dụ 9.14

Cho  $x(n) = \text{rect}_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $Y_{\downarrow 2H}(z) = ?$

**Giải:**

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$Y_{\uparrow 2}(z) = X(z^2) = 1 + z^{-2} + z^{-4}$$

$$H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

$$Y_{\uparrow 2H}(z) = Y_{\uparrow 2}(z) \cdot H(z) = X(z^2) \cdot H(z)$$

$$Y_{\uparrow 2H}(z) = \left(1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}\right) + \left(z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-4} + \frac{1}{4}z^{-5}\right) + \left(z^{-4} + \frac{3}{4}z^{-5} + \frac{1}{2}z^{-6} + \frac{1}{4}z^{-7}\right)$$

$$Y_{\uparrow 2H}(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + z^{-3} + \frac{3}{2}z^{-4} + z^{-5} + \frac{1}{2}z^{-6} + \frac{1}{4}z^{-7}$$

### c. Biểu diễn trong miền tần số $\omega$

Các quan hệ toán học trong bộ lọc nội suy ở miền tần số  $\omega$  được thực hiện như sau.

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega})$$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow LH}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (9.24)$$

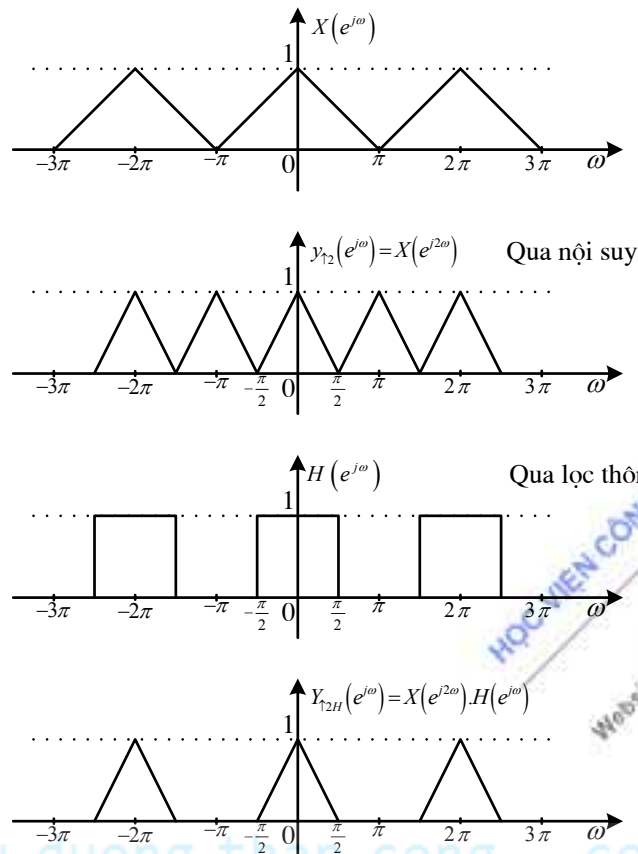
$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

### Ví dụ 9.15

Cho tín hiệu  $x(n)$  có phổ  $X(e^{j\omega})$  như hình vẽ. Tín hiệu này đi qua bộ nội suy với  $N = 2$ , sau đó qua bộ lọc thông thấp lý tưởng với  $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ . Hãy tìm  $Y_{\uparrow 2H}(e^{j\omega}) = ?$

**Giải:**

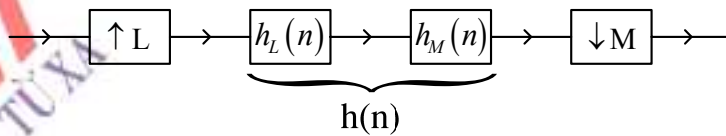




Hình 9.9 Minh họa ví dụ 9.15

### 9.2.3. Bộ lọc biến đổi nhíp lấy mẫu

Bộ lọc biến đổi nhíp lấy mẫu hệ số M/L sẽ hình thành khi ta sẽ ghép 2 bộ lọc phân chia và bộ lọc nội suy với nhau, để khỏi chồng phổ thì cho tín hiệu đi qua bộ lọc phân chia trước, nghĩa là chúng ta sẽ có tín hiệu trước sau đó mới giãn sau như sơ đồ dưới đây.



Từ đây ta có:

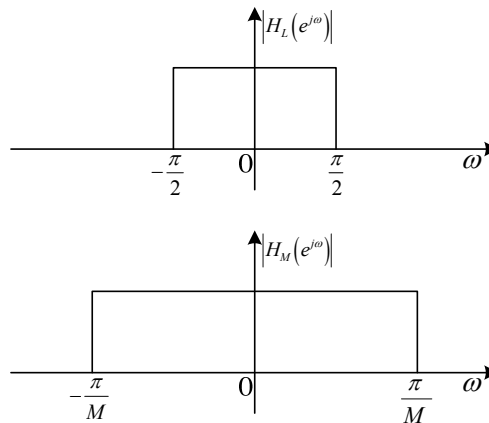
$$H(e^{j\omega}) = H_L(e^{j\omega}) \cdot H_M(e^{j\omega})$$

$$|H(e^{j\omega})| = |H_L(e^{j\omega})| \cdot |H_M(e^{j\omega})| \quad (9.25)$$

$$\text{Với } H_L(e^{j\omega}): \omega_c = \frac{\pi}{L} \text{ và } H_M(e^{j\omega}): \omega_c = \frac{\pi}{M}$$

### Ví dụ 9.16

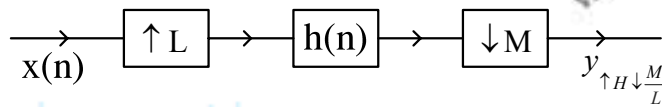
Cho 2 bộ lọc như sau hãy ghép chúng vào với nhau



Hình 9.10 Minh họa ví dụ 9.16

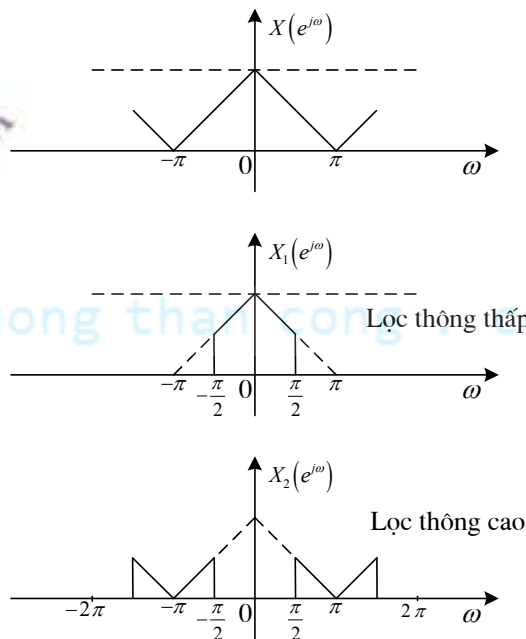
**Giải:**

Khi ghép 2 bộ chỉ cần thay bằng một bộ có tần số cắt nhỏ hơn. Kết quả cho ta bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu hệ số  $M/L$  với chỉ một bộ lọc thông thấp có đáp ứng xung  $h(n)$  và đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  như hình sau:



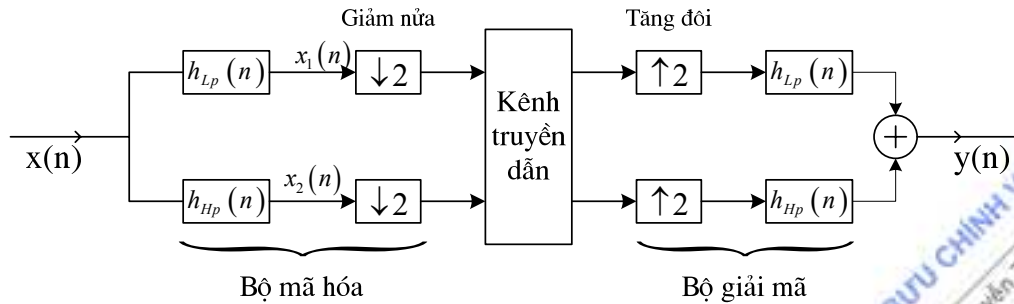
### 9.3. MÃ HOÁ BĂNG CON (Subband coding)

Đây là một ứng dụng của băng lọc số nhiều nhịp. Ở đây, một minh họa đơn giản nhất cho mã hóa băng con, ta sẽ sử dụng băng lọc số 2 kênh để mã hóa làm hai băng con, ta chia làm 2 băng con rồi sau đó tiến hành cộng lại để được tần số ban đầu như hình vẽ



Hình 9.11 Minh họa chia phổ tín hiệu.

Như vậy phải ta phải dùng các bộ lọc và các bộ phân chia, tín hiệu khi xử lý được chia thành 2 nhánh, năng lượng mỗi nhánh giảm xuống còn  $\frac{1}{2}$  so với ban đầu như hình vẽ



Hình 9.12 Sơ đồ mã hóa bằng con 2 băng lọc

Mã hóa băng con rất thuận tiện cho việc nén tiếng nói vì đối với tiếng nói, phổ năng lượng phân bố tập trung ở miền tần số thấp ta phải mã hóa tín hiệu với số bit lớn, còn ở miền tần số cao, năng lượng của tiếng nói rất nhỏ nên ta chỉ cần một số bit ít hơn.

Kỹ thuật mã hóa băng con hiện nay còn được ứng dụng nền tín hiệu ảnh, ta cũng có thể chia với số kênh nhiều hơn 2 để mã hóa băng con.

## TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 9.

Trong chương 9, chúng ta đã đề cập đến các vấn đề liên quan đến lọc số nhiều nhịp, phép phân chia, nội suy; bộ lọc phân chia, nội suy; các phép biến đổi nhịp lấy mẫu hệ số M/L và bộ lọc biến đổi nhịp lấy mẫu M/L; mã hóa băng con.

Kỹ thuật lọc số nhiều nhịp ngày càng được ứng dụng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số để tăng tốc độ tính toán, giảm số phép nhân phải thực hiện trong một giây. Hai ứng dụng nổi bật của lọc số nhiều nhịp là mã hóa băng con và phân đường dùng cho Viễn thông.

Các nội dung chính cần nhớ bao gồm.

**1. Các định nghĩa và ký hiệu về phép phân chia, nội suy và các định nghĩa về bộ phân chia, bộ nội suy.**

**Bộ phân chia:**

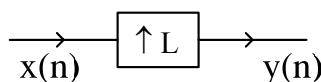


Ký hiệu toán tử:

$$\downarrow M[x(n)] = y_{\downarrow M}(n)$$

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(n)$$

**Bộ nội suy**

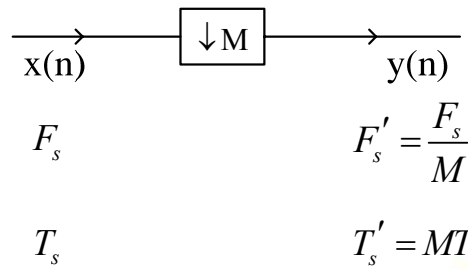


Ký hiệu toán tử:

$$\begin{aligned}\uparrow L[x(n)] &= y_{\uparrow L}(n) \\ x(n) &\xrightarrow{\downarrow L} y_{\uparrow L}(n)\end{aligned}$$

## 2. Phép phân chia hệ số M

Biểu diễn trong miền n



Biểu diễn trong miền z

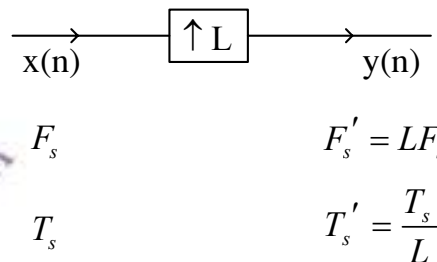
Ta có: 
$$Y_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{-j\frac{2\pi l}{M}} z^{\frac{1}{M}}\right)$$

Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

Ta có: 
$$Y_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega - 2\pi l}{M}}\right)$$

## 3. Phép nội suy hệ số L

Biểu diễn trong miền n



Biểu diễn trong miền z

Ta có: 
$$Y_{\uparrow L}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-nL} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) (z^L)^{-m} = X(z^L)$$

Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

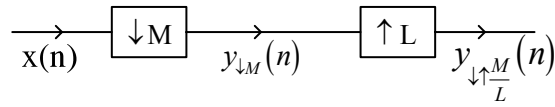
Ta có: 
$$Y_{\uparrow L}(e^{j\omega}) = Y(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega L})$$

## 4. Phép biến đổi nhịp lấy mẫu hệ số M/L

Có 2 loại sơ đồ:

**Sơ đồ 1:**

Biểu diễn trong miền n



$$F_s \quad F'_s = \frac{F_s}{M} \quad F''_s = LF'_s = \frac{L}{M} F_s$$

$$T_s \quad T'_s = MT_s \quad T''_s = \frac{T'_s}{L} = \frac{M}{L} T_s$$

$$x(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\downarrow M}(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\downarrow \frac{M}{L}}(n)$$

Biểu diễn trong miền z

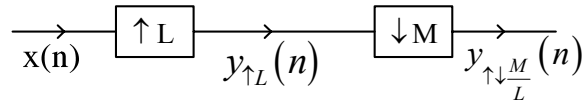
$$Y_{\downarrow \frac{M}{L}}(z) = Y_{\downarrow M}(z^L) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{L}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

$$Y_{\downarrow \frac{M}{L}}(e^{j\omega}) = Y_{\downarrow \frac{M}{L}}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega L - 2\pi l}{M}}\right)$$

**Sơ đồ 2:**

Biểu diễn trong miền n



$$F_s \quad F'_s = LF_s \quad F''_s = \frac{F'_s}{M} = \frac{L}{M} F_s$$

$$T_s \quad T'_s = \frac{T_s}{L} \quad T''_s = MT'_s = \frac{M}{L} T_s$$

$$x(n) \xrightarrow{\uparrow L} y_{\uparrow L}(n) \xrightarrow{\downarrow M} y_{\uparrow \frac{M}{L}}(n)$$

Biểu diễn trong miền z

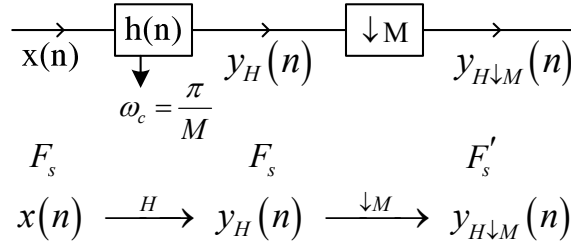
$$Y_{\uparrow \frac{M}{L}}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} Y_{\uparrow L}\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{L}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}l}\right)$$

Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

$$Y_{\uparrow \frac{M}{L}}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow \frac{M}{L}}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega L - 2\pi l}{M}}\right)$$

**5. Bộ lọc phân chia**

Sơ đồ:



Quan hệ vào ra của bộ lọc phân chia được thể hiện như sau:

Biểu diễn trong miền n

$$y_{H\downarrow M}(n) = y_H(nM) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(nM - k)$$

Biểu diễn trong miền z

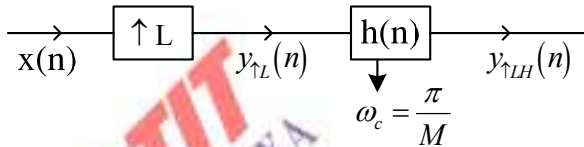
$$Y_{H\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi l}{M}}\right) H\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2\pi l}{M}}\right)$$

Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

$$Y_{H\downarrow M}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right) H\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$$

## 6. Bộ lọc nội suy

Sơ đồ:



Quan hệ vào ra của bộ lọc phân chia được thể hiện như sau:

Biểu diễn trong miền n

$$y_{\uparrow LH}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\uparrow L}(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{L}\right)h(n-k)$$

Biểu diễn trong miền z

$$Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z).H(z) = X(z^L).H(z)$$

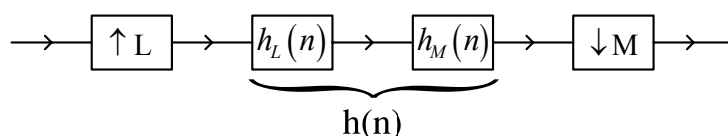
Biểu diễn trong miền tần số  $\omega$

$$Y_{\uparrow LH}(e^{j\omega}) = Y_{\uparrow L}(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

## 7. Bộ lọc biến đổi nhíp lấy mẫu



Sơ đồ:

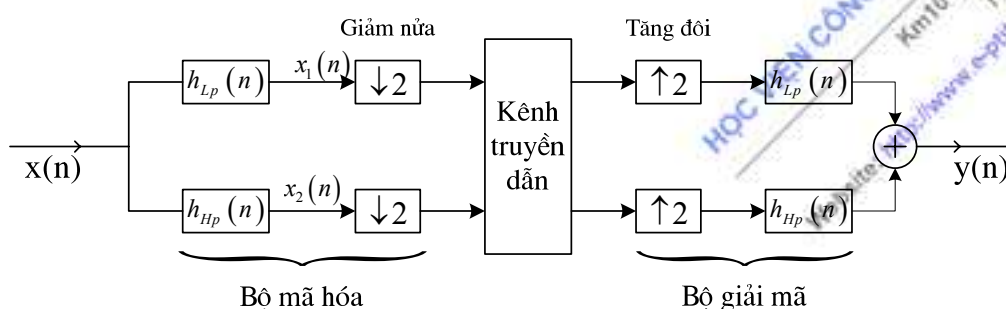


Với đáp ứng tần số bộ lọc biến đổi nhíp lấy mẫu như sau:

$$H(e^{j\omega}) = H_L(e^{j\omega}).H_M(e^{j\omega})$$

## 8. Mã hoá bằng con

Chúng ta kết hợp các phép toán và các bộ lọc phân chia, nội suy để thao tác vào phổ tín hiệu chẳng hạn như phân chia tần số tín hiệu thành các băng con rồi truyền đi như sơ đồ sau:



Đây chính là sơ đồ mã hoá tín hiệu thành 2 băng con.

**Lưu ý:** Khi thao tác phân chia hay nội suy tín hiệu ta nhớ rằng khi chiều dài tín hiệu tăng lên thì phổ của tín hiệu giảm đi và ngược lại.

Đây là một chương khá quan trọng để thao tác và biến đổi tín hiệu theo các mong muốn người thiết kế, do vậy trong chương này các bạn cần nắm chắc các kỹ thuật, các phép toán biến đổi về phân chia nội suy tín hiệu như đã tổng kết ở trên.

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 9

## Bài 9.1

Cho tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Hãy xác định tín hiệu khi đi qua bộ phân chia với hệ số  $M=2$

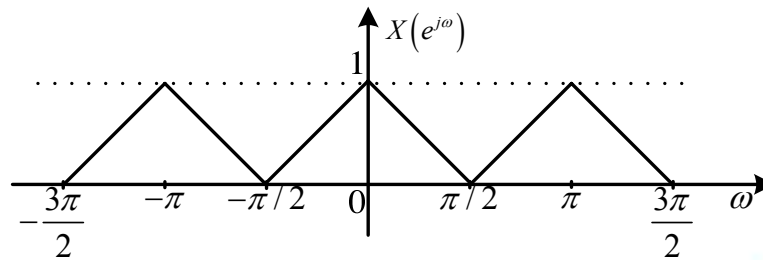
## Bài 9.2

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7}$$

Hãy xác định tín hiệu  $Y_{\downarrow M}(z)$  với  $M=2$

**Bài 9.3**

Cho phổ tín hiệu



Hãy xác định  $Y_{\downarrow 2}(e^{j\omega})$

**Bài 9.4**

Cho  $x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Hãy xác định:  $y_{\uparrow 2}(n)$

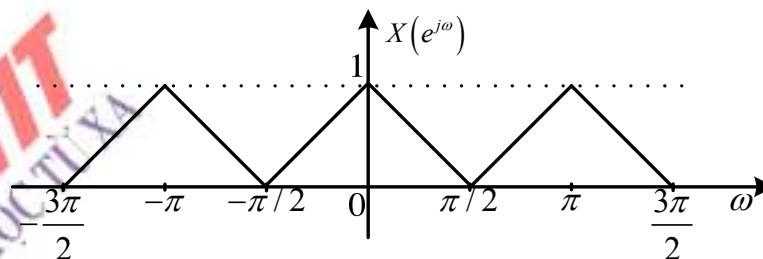
**Bài 9.5**

Cho tín hiệu  $x(n) = \{1, 3, 3, 1\}$ . Tín hiệu này qua bộ nội suy với  $L = 2$ .

Tìm  $X(z) = ?$  và  $Y_{\uparrow L}(z) = ?$

**Bài 9.6**

Cho phổ tín hiệu



Hãy xác định  $Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = ?$

**Bài 9.7**

Cho 2 sơ đồ

Sơ đồ 1:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z)$$

Sơ đồ 2:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{H\uparrow L}(z)$$

Hãy chứng minh 2 sơ đồ tương đương.

### Bài 9.8

Cho tín hiệu:  $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6}$

Tín hiệu này đi qua bộ lấy mẫu  $\downarrow \uparrow \frac{2}{3}$  và  $\uparrow \downarrow \frac{2}{3}$ . Tìm  $Y_{\downarrow \uparrow \frac{2}{3}}(z) = ?$  và  $Y_{\uparrow \downarrow \frac{2}{3}}(z) = ?$

### Bài 9.9

Cho  $x(n) = \text{rect}_2(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $y_{H\downarrow 2}(z) = ?$

### Bài 9.10

Cho  $x(n) = \text{rect}_2(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Tính  $Y_{\uparrow 2H}(z) = ?$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)

[cuuduongthancong.com](http://cuuduongthancong.com)



## ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

### ĐÁP ÁN CHƯƠNG I

#### Bài 1.1.

Do  $\omega = 2\pi f$ , tín hiệu trên có các tần số thành phần sau:

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, \quad F_2 = 150 \text{ Hz}, \quad F_3 = 50 \text{ Hz}$$

Như vậy,  $F_{\max} = 150 \text{ Hz}$  và theo định lý lấy mẫu ta có:

$$F_s \geq 2F_{\max} = 300 \text{ Hz}$$

Tốc độ lấy mẫu Nyquist là  $F_N = 2F_{\max}$ . Do đó,  $F_N = 300 \text{ Hz}$ .

#### Bài 1.2

a) Tần số của tín hiệu tương tự là  $F = 50 \text{ Hz}$ . Vì thế, tốc độ lấy mẫu tối thiểu cần thiết để khôi phục tín hiệu, tránh hiện tượng chồng mẫu là  $F_s = 100 \text{ Hz}$ .

b) Nếu tín hiệu được lấy mẫu tại  $F_s = 200 \text{ Hz}$  thì tín hiệu rời rạc có dạng

$$x(n) = 3 \cos(100\pi/200)n = 3 \cos(\pi/2)n$$

#### Bài 1.3

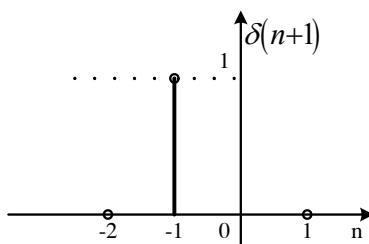
Theo định nghĩa dãy nhảy đơn vị  $u(n)$  và dãy xung đơn vị  $\delta(n)$  ta có:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

#### Bài 1.5

Ta có:

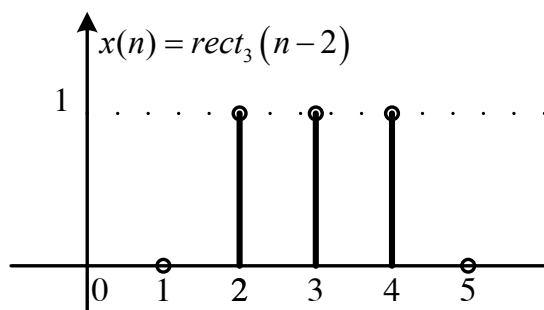
$$\delta(n+1) = \begin{cases} 1 & n+1=0 \rightarrow n=-1 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



### Bài 1.6

Ta xác định  $u(n-2)$  và  $u(n-5)$  sau đó thực hiện phép trừ thu được kết quả

$$x(n) = u(n-5) - u(n-2) = \text{rect}_3(n-2)$$



### Bài 1.7

Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{4}{3} + \frac{9}{8} - 1 = \frac{35}{24} \end{aligned}$$

Vì năng lượng  $E$  là hữu hạn nên tín hiệu  $x(n)$  là tín hiệu năng lượng.

### Bài 1.8

**Đáp số:** Năng lượng của tín hiệu bằng vô hạn.

Chú ý  $|Ae^{j\omega_0 n}| = \sqrt{A^2 [\cos^2(\omega_0 n) + \sin^2(\omega_0 n)]} = A$

### Bài 1.9

Xác định công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị  $u(n)$

**Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Do đó, tín hiệu nhảy bậc đơn vị là một tín hiệu công suất.

### Bài 1.10

Ta có:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}$$

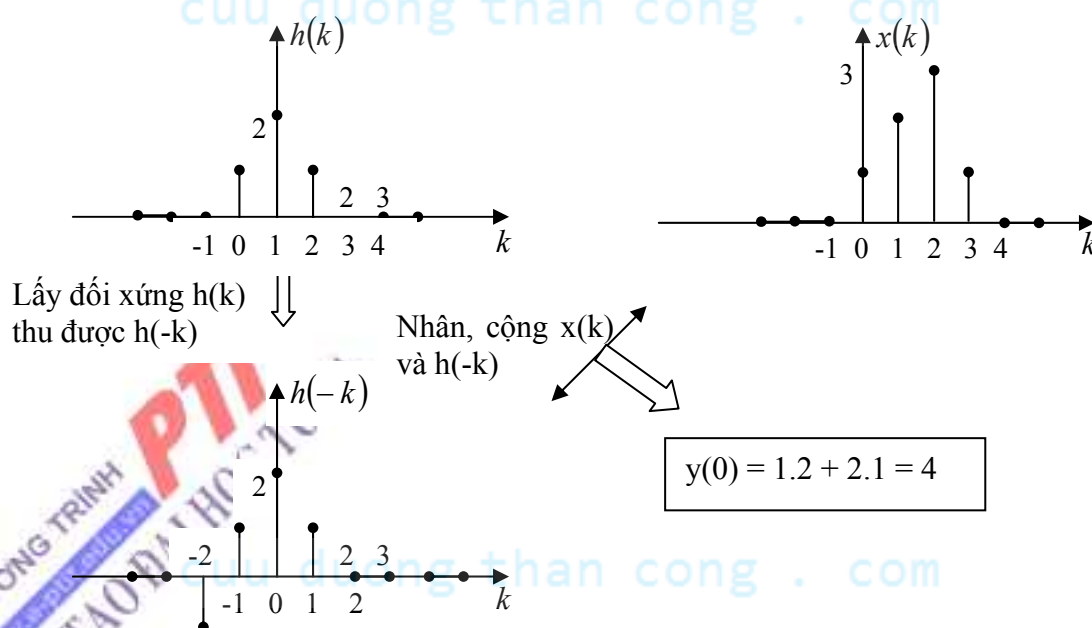
Do đó, tín hiệu nhảy bậc đơn vị là một tín hiệu công suất.

### Bài 1.11

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N A^2 = A^2$$

### Bài 1.12

Ta sẽ thực hiện phép chập bằng đồ thị: đổi sang biến  $k$ , giữ nguyên  $x(k)$ , lấy đối xứng  $h(k)$  qua trục tung thu được  $h(-k)$ , sau đó dịch chuyển  $h(-k)$  theo từng mẫu để tính lần lượt các giá trị của  $y(n)$  cụ thể như hình sau:



Dịch chuyển  $h(-k)$  ta có và tính tương tự ta có.... $y(-2)=0$ ,  $y(-1)=1$ ,  $y(0)=4$ ,  $y(1)=8$ ,  $y(2)=8$ ,  $y(3)=3$ ....cuối cùng ta thu được kết quả:

$$y(n) = \left\{ \dots, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \dots \right\}$$



### Bài 1.14

Nhận xét: Hệ thống nhân quả  $h(n)$  và  $x(n)$  đều nhân quả

$$y(n) = \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n (b.a^{-1})^k$$

Có dạng:  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$y(n) = \begin{cases} a^n \frac{1-(b.a^{-1})^{n+1}}{1-(b.a^{-1})} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

### Bài 1.15

a) Đối với các chuỗi xung đầu vào  $x_1(n)$  và  $x_2(n)$ , tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1(n) = nx_1(n)$$

$$y_2(n) = nx_2(n)$$

Liên hợp tuyến tính hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \end{aligned}$$

Trong khi đó liên hợp hai tín hiệu ra  $y_1$   $y_2$  tạo nên tín hiệu ra:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

So sánh 2 phương trình ta suy ra hệ là tuyến tính.

b) Đầu ra của hệ là bình phương của đầu vào, (Các thiết bị điện thường có qui luật như thế và gọi là thiết bị bậc 2).

Đáp ứng của hệ đối với hai tín hiệu vào riêng rẽ là:

$$y_1(n) = x_1^2(n)$$

$$y_2(n) = x_2^2(n)$$

Đáp ứng của hệ với liên hợp tuyến tính hai tín hiệu vào:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 \\ &= a_1^2x_1^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n) + a_2^2x_2^2(n) \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu hệ tuyến tính, nó sẽ tạo ra liên hợp tuyến tính từ hai tín hiệu, tức là:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$$

Vì tín hiệu ra của hệ như đã cho không bằng nhau nên hệ là không tuyến tính.

#### Bài 1.16

- a) Hệ tuyến tính
- b) Hệ không tuyến tính.

#### Bài 1.17

Các hệ thuộc phần a), b) rõ ràng là nhân quả vì đầu ra chỉ phụ thuộc hiện tại và quá khứ của đầu vào.

#### Bài 1.18

Các hệ ở phần a), b) và c) là không nhân quả vì đầu ra phụ thuộc cả vào giá trị tương lai của đầu vào. Hệ d) cũng không nhân quả vì nếu lựa chọn  $n = -1$  thì  $y(-1) = x(1)$ . Như vậy đầu ra tại  $n = -1$ , nó nằm cách hai đơn vị thời gian về phía tương lai.

#### Bài 1.19

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = N \quad \left( = \sum_{n=0}^{N-1} |1| = N \right) \rightarrow \text{Hệ ổn định}$$

#### Bài 1.20

Hệ này không phải là nhân quả. Điều kiện ổn định là :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n$$

Ta xác định được rằng tổng thứ nhất là hội tụ với  $|a| < 1$ , tổng thứ hai có thể được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^n} = \frac{1}{|b|} \left( 1 + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|b|^2} + \dots \right) \\ &= \beta (1 + \beta + \beta^2 + \dots) = \frac{\beta}{1 - \beta} \end{aligned}$$

ở đây  $\beta = 1/|b|$  phải nhỏ hơn đơn vị để chuỗi hội tụ. Bởi vậy, hệ là ổn định nếu cả  $|a| < 1$  và  $|b| > 1$  đều thỏa mãn.

#### Bài 1.21.

##### Hướng dẫn

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \text{rect}_3(n) \\ h_2(n) &= \delta(n-1) + \delta(n-2) \\ h_3(n) &= \delta(n-3) \end{aligned}$$

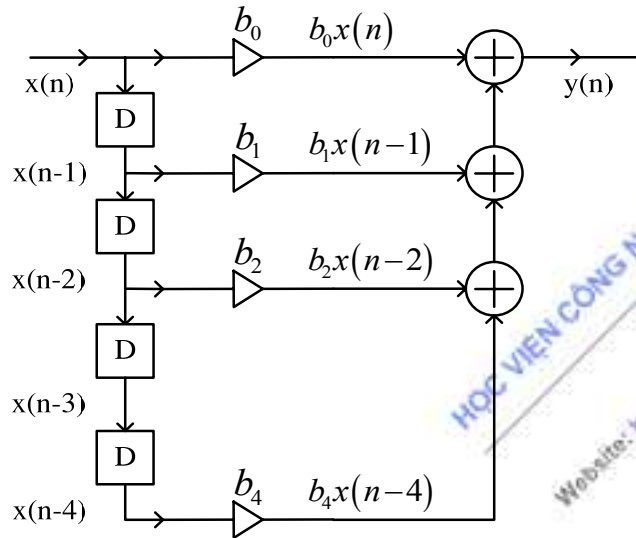
Hướng dẫn:

Thực hiện  $h_2(n) + h_3(n)$  rồi sau đó lấy kết quả thu được chập với  $h_1(n)$ :

$$h(n) = h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n)]$$

### Bài 1.22

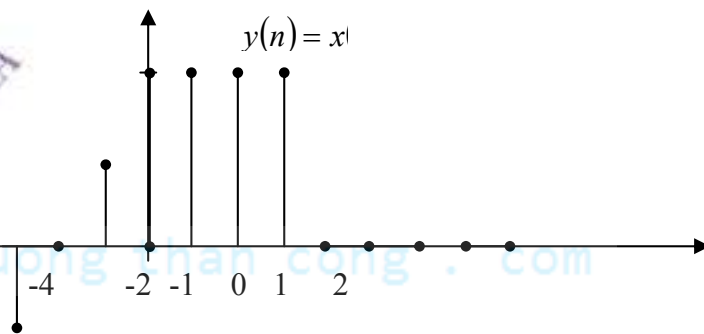
Áp dụng các công cụ thực hiện hệ thống ta vẽ được hệ thống như sau:



### Bài 1.23

Ta chú ý rằng tín hiệu  $y(n)$  đạt được từ  $x(n)$  bằng cách lấy mỗi một mẫu khác từ  $x(n)$ , bắt đầu với  $x(0)$ . Chẳng hạn  $y(0) = x(0)$ ,  $y(1) = x(2)$ ,  $y(2) = x(4)$ ,... và  $y(-1) = x(-2)$ ,  $y(-2) = x(-4)$ , v.v...

Nói cách khác, ta bỏ qua các mẫu ứng với số lẻ trong  $x(n)$  và giữ lại các mẫu mang số chẵn. Tín hiệu phải tìm được mô tả như sau:



### Bài 1.24

Dạng nghiệm riêng là:

$$y_p(n) = B2^n \quad n \geq 0$$

Thay  $y_p(n)$  vào đầu bài ta có

$$B2^n = \frac{5}{6} B2^{n-1} - \frac{1}{6} B2^{n-2} + 2^n$$

$$4B = \frac{5}{6}(2B) - \frac{1}{6}B + 4 \quad \text{và tìm thấy } B = \frac{8}{5}$$

Bởi vậy, nghiệm riêng là

$$y_p(n) = \frac{8}{5} 2^n \quad n \geq 0$$

### Bài 1.25

Đáp án:

$$y(n) = (13/50) - (104/75).2^n + (13/6).5^n \text{ với } n \geq 0.$$

### Bài 1.26

Đáp án:

$$R_{xx}(-2) = R_{xx}(2) = 1;$$

$$R_{xx}(-1) = R_{xx}(1) = 2;$$

$$R_{xx}(0).$$

Lưu ý: hàm tự tương quan bao giờ cũng đạt giá trị cực đại tại  $n=0$ .

### Bài 1.27

Phương án c)

### Bài 1.28

Phương án b)

### Bài 1.29

Phương án b)

### Bài 1.30

Phương án a)

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG II

### Bài 2.1

Đáp án

a)  $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$ , RC cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$ .

b)  $X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$ , RC: cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$  và  $z = \infty$

c)  $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$ , RC: cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$ .

d)  $X_4(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$ , RC: cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$  và  $z = \infty$

### Bài 2.2

Đáp án:

a)  $X_1(z) = z^{-k}$  [nghĩa là,  $\delta(n-k) \xleftrightarrow{ZT} z^{-k}$ ],  $k > 0$ , RC: cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$ .

b)  $X_2(z) = z^k$  [nghĩa là,  $\delta(n+k) \xleftrightarrow{ZT} z^k$ ],  $k > 0$ , RC: cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = \infty$ .

### Bài 2.3

Theo định nghĩa ta có:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Nếu  $|\alpha z^{-1}| < 1$  hoặc tương ứng  $|z| > |\alpha|$ , thì chuỗi này hội tụ đến  $1/(1 - \alpha z^{-1})$ .

Như vậy, ta sẽ có cặp biến đổi  $z$ .

$$x(n) = \alpha^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad \text{RC: } |z| > |\alpha|$$

Miền hội tụ RC là miền nằm ngoài đường tròn có bán kính  $|\alpha|$ .

Lưu ý rằng, nói chung,  $\alpha$  cần không phải là số thực.

### Bài 2.4

Đáp án

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}} \quad \text{RC: } |z| > 3$$

### Bài 2.5

Ta có:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & z = 1 \\ \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} & z \neq 1 \end{cases}$$

vì  $x(n)$  là hữu hạn, nên RC của nó là cả mặt phẳng  $z$ , trừ  $z = 0$ .

### Bài 2.6

Đáp án:

Thực hiện giống ví dụ 2.5 ta có:

$$x(n) = (-1/3)^n \cdot u(n)$$

### Bài 2.7

Điểm cực:  $z_{p1}, z_{p2} = (-1/2) \pm j(3/2)$ ;  $z_{p3} = 1/2$ .

Điểm không:  $z_{o1} = -3$

### Bài 2.8

Đáp án: Hệ thống không ổn định

### Bài 2.9

Ta có:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(2z^2-7z+3)z} \text{ có 3 điểm cực } z_{p1} = \frac{1}{2}, z_{p2} = 3, z_{p3} = 0$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)z} = \frac{A_1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{A_2}{z-3} + \frac{A_3}{z}$$

Đều là cực đơn nên:

$$A_1 = \left. \left( z - \frac{1}{2} \right) \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2\left(\frac{1}{2}-3\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{1\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2}} = -1$$

$$A_2 = \left. \left( z - 3 \right) \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)z} \right|_{z=3} = \frac{3+2}{2\left(3-\frac{1}{2}\right) \cdot 3} = \frac{5}{6 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \left. \frac{z+2}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)} \right|_{z=0} = \frac{0+2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy: } \frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{\frac{1}{3}}{z-3} + \frac{\frac{1}{3}}{z}$$

$$X(z) = -\frac{1}{2} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-3} + \frac{1}{3}$$



$m = 0$  thì

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3} 3^n u(n) + \frac{2}{3} \delta(n)$$

Như vậy đã hoàn thành biến đổi Z ngược.

### Bài 2.10

Đáp án:

- a) Hệ có 1 điểm không  $z_{01} = -3/2$ ; hai điểm cực là  $z_{p1} = -1/3$  và  $z_{p2} = -1/2$
- b) Căn cứ vào các điểm cực đều nằm trong vòng tròn đơn vị ta thấy hệ thống ổn định.
- c/ Tìm  $h(n)$  giống bài tập 2.9

### Bài 2.11

Đáp án:

- a) Hệ thống không ổn định
  - b)  $h(n) = 2.u(n) - 2.(1/2)^n .u(n)$
  - c) Dựa vào kết quả câu b) và tính chất trễ ta có
- $$h(n) = 2.u(n+2006) - 2.(1/2)^{2006}u(n+2006)$$

### Bài 2.12

Áp dụng: Trong miền z: song song thì cộng, nối tiếp thì nhân.

Phân tích ra  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$ , ...

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = H_{11}(z) + H_{12}(z)$$

$$H_{11}(z) = \frac{X_1(z)}{X(z)}$$

$$X_1(z) = 2X(z) + 3z^{-1}X(z)$$

$$H_{11}(z) = 2 + 3z^{-1}$$

$$H_{12}(z) = \frac{X_2(z)}{X(z)}$$

$$X_2(z) = X(z) + 4z^{-1}X_2(z)$$

$$X(z) = X_2(z)(1 - 4z^{-1})$$

$$H_{12}(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1}}$$

$$H_1(z) = 2 + 3z^{-1} + \frac{1}{1 - 4z^{-1}}$$

$$H_2(z) = z^{-1}$$

$$H(z) = \left( 2 + 3z^{-1} + \frac{1}{1 - 4z^{-1}} \right) z^{-1}$$

### Bài 2.13

Áp dụng tiêu chuẩn Jury. Hệ ổn định

### Bài 2.14

Bằng cách tính biến đổi  $z$  của phương trình sai phân, ta có:

$$Y(z) = \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + 2X(z)$$

Do vậy hàm hệ thống là:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Hệ thống này có một cực tại  $z = \frac{1}{2}$  và một zero tại gốc 0.

Ta có:

$$h(n) = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n)$$

Đây là đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.

### Bài 2.15

Phương án a)

### Bài 2.16

Phương án b)

### Bài 2.17

Phương án b)

### Bài 2.18

Phương án a)

**Bài 2.19**

Phương án b)

**Bài 2.20**

Phương án c)

**ĐÁP ÁN CHƯƠNG III**

**Bài 3.1**

Ta phân ra làm 2 trường hợp  $n < 0$  và  $n > 0$  ứng với các tín hiệu  $x_1(n)$  và  $x_2(n)$  như vậy ta có kết quả:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \end{aligned}$$

**Bài 3.2**

Vì  $x(n)$  là một khả tổng tuyệt đối nên biến đổi Fourier của nó tồn tại. Hơn nữa,  $x(n)$  là tín hiệu năng lượng hữu hạn với  $E_x = |A|^2 L$ . Biến đổi Fourier của tín hiệu này là

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} \\ X(e^{j\omega}) &= A e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)(L-1)} \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} \end{aligned}$$

Với  $\omega = 0$ , biến đổi ta có  $X(e^{j0}) = |A|L$ .

Phổ biên độ của  $x(n)$  có dạng

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A|L & \omega = 0 \\ |A| \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} & \neq \end{cases}$$

**Bài 3.3**

Sử dụng biến đổi Fourier, ta có

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = 1 + 2 \cos \omega$$

Do đó

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) = (1 + 2\cos \omega)^2 \\ &= 3 + 4\cos \omega + 2\cos 2\omega \\ &= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \end{aligned}$$

Biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x(n) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Kết quả này trùng với kết quả nếu ta tính tích chập trên bằng phương pháp đồ thị.

### Bài 3.4

Vì  $|a| < 1$  nên dãy  $x(n)$  là một khả tổng tuyệt đối. Có thể kiểm tra lại bằng cách dùng công thức tổng cấp số nhân, nghĩa là

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Vì thế biến đổi Fourier của  $x(n)$  tồn tại như vậy:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

Vì  $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$ , nên

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Phổ mật độ năng lượng là

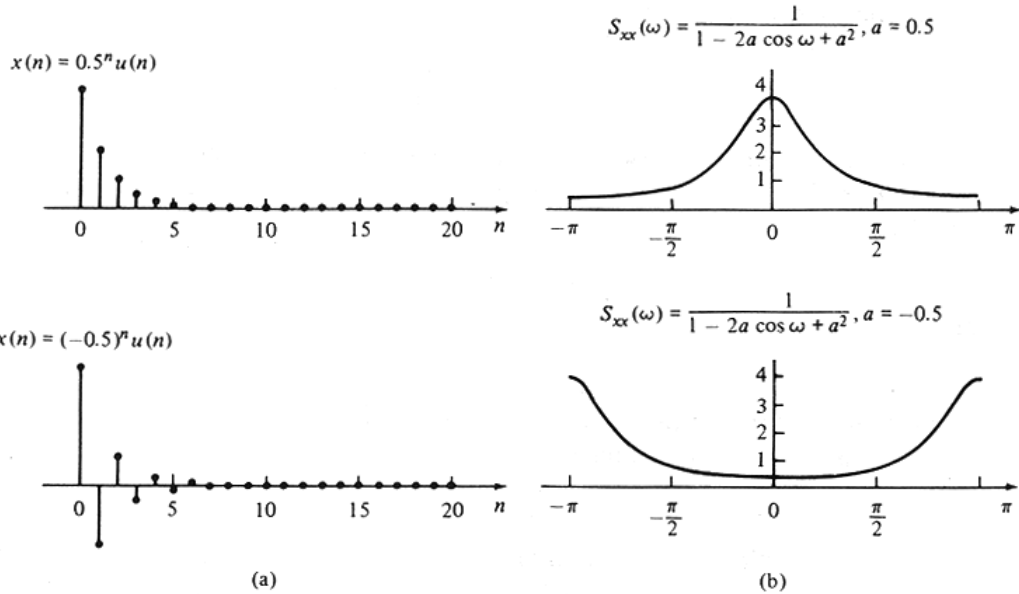
$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

hoặc tương đương

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2 - 2a \cos \omega + a^2}$$

### Bài 3.5

Hình biểu diễn tín hiệu  $x(n)$  và phổ tương ứng của nó khi  $a = 0.5$  và  $a = -0.5$ . Nhận xét: khi  $a = -0.5$  tín hiệu biến đổi nhanh hơn và phổ lớn hơn ở các tần số cao.



### Bài 3.6

Đáp án: Phương án d)

### Bài 3.7

Đáp án: Phương án a)

### Bài 3.8

Đáp án: Phương án d)

### Bài 3.9

Đáp án: Phương án c)

### Bài 3.10

Đáp án: Phương án b)

### Bài 3.11

Đáp án: Phương án a).

### Bài 3.12

Đáp án: Phương án c)

### Bài 3.13

Đáp án: Phương án a)

### Bài 3.14

Đáp án: Phương án b)

### Bài 3.15

Đáp án: Phương án d)

### Bài 3.16

Đáp án: Phương án c)

### Bài 3.17

Đáp án: Phương án a) và c)

### Bài 3.18

Đáp án: Phương án b)

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG IV

### Bài 4.1

Hướng dẫn: Cách làm tương tự ví dụ 4.1

### Bài 4.2

Đây là dãy tuần hoàn chu kỳ  $N=4$

Dựa vào biến đổi DFT  $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Ta có:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = (e^{-j\frac{\pi}{2}})^{k \cdot n} = (-j)^{k \cdot n}$$

Từ đây ta thay vào có:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot (j)^{-kn}$$

Vậy:

$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) \cdot (j)^{-0 \cdot n} = 10$$

$$\tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) \cdot (j)^{-1 \cdot n} = -3 + j$$

$$\tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) \cdot (j)^{-2 \cdot n} = 0$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) \cdot (j)^{-3 \cdot n} = -3 - j$$

### Bài 4.3

Hướng dẫn: Giải tương tự bài trên

### Bài 4.4

Đáp án:



$$X(k) = \frac{1 - e^{-j2\pi kn/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= \frac{\sin(\pi kL/N)}{N \sin(\pi k/N)} e^{-j\pi k(L-1)/N}$$

#### Bài 4.6

Đáp án: Cách làm tương tự ví dụ 4.6 và ta có:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 (*)_4 x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(n-m)_4 = x_2(n-1)_4$$

Tức  $x_3(0)_4 = 1/4$ ;  $x_3(1)_4 = 1$ ;  $x_3(2)_4 = 3/4$ ;  $x_3(3)_4 = 1/2$ .

#### Bài 4.7

Đáp án: Phương án b)

#### Bài 4.8

Đáp án: Phương án d)

#### Bài 4.9

Đáp án: Phương án b)

#### Bài 4.10

Đáp án đúng: a)

### ĐÁP ÁN CHƯƠNG V

#### Bài 5.1

Ta có FIR loại 1

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Vậy

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$h(0) = h(6) = 1; \quad h(1) = h(5) = 2; \quad h(2) = h(4) = 3; \quad h(3) = 4.$$

#### Bài 5.2

Ta có FIR loại 2

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Vậy

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ vậy tâm đối xứng nằm giữa 2 và 3.}$$

$$h(0) = h(5) = 1; \quad h(1) = h(4) = 2; \quad h(2) = h(3) = 3.$$

### Bài 5.3

Ta có FIR loại 3

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Vậy

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3 \text{ vậy tâm phản đối xứng nằm tại 3.}$$

$$h(0) = -h(6) = 1; \quad h(1) = -h(5) = 2; \quad h(2) = -h(4) = 3; \quad h(3) = h(-3) = 0.$$

### Bài 5.4

Ta có FIR loại 4

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Vậy

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ vậy tâm phản đối xứng nằm giữa 2 và 3.}$$

$$h(0) = -h(5) = 1; \quad h(1) = -h(4) = 2; \quad h(2) = -h(3) = 3.$$

### Bài 5.5

Công thức bộ lọc thông cao pha không ( $\theta(\omega) = 0$ ):

$$h_{hp}(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

Trong bài này có dịch đi, từ pha không chuyển sang pha tuyến tính

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\frac{9-1}{2}\omega = -4\omega$$

$$h_{hp}(n) = \delta(n-4) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n-4)}{\omega_c(n-4)} = \delta(n-4) - \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{\pi}{4}(n-4)}{\frac{\pi}{4}(n-4)}$$

$$H_d(z) = -\frac{1}{12\sqrt{2}\pi}z^{-1} - \frac{1}{4\pi}z^{-2} - \frac{3}{4\sqrt{2}\pi}z^{-3} + \frac{3}{4}z^{-4} - \frac{3}{4\sqrt{3}\pi}z^{-5} - \frac{1}{4\pi}z^{-6} - \frac{1}{12\sqrt{2}\pi}z^{-7}$$

Hay:

$$y(n) = -\frac{1}{12\sqrt{2}\pi}x(n-1) - \frac{1}{4\pi}x(n-2) - \frac{3}{4\sqrt{2}\pi}x(n-3) + \frac{3}{4}x(n-4) - \frac{3}{4\sqrt{3}\pi}x(n-5) - \frac{1}{4\pi}x(n-6) - \frac{1}{12\sqrt{2}\pi}x(n-7)$$

**Bài 5.6, Bài 5.7, Bài 5.8** Cách làm tương tự ví dụ trên.

**Bài 5.9**

Đáp án: Phương án a)

**Bài 5.10**

Đáp án: Phương án c).

**Bài 5.11**

Đáp án: Phương án d)

**Bài 5.12**

Đáp án: Phương án a)

**Bài 5.13**

Đáp án: Phương án c)

**Bài 5.14**

Đáp án: Phương án b).

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG VI

**Bài 6.1**

Ta có: Ánh xạ chuyển sang miền số theo phương pháp tương đương vi phân là:  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$

Do vậy ta có:

$$H(z) = \frac{1}{\left[(1-z^{-1}/T)+1\right]} = \frac{zT/(1+T)}{z - [1/(1+T)]}$$

Hay với  $T=0.1$ : 
$$H(z) = \frac{0,09z}{z - 0,909} = \frac{0,09}{1 - 0,909z^{-1}}$$

### Bài 6.2

Ta chú ý rằng bộ lọc tương tự có một điểm không tại  $s = -0.1$  và một cặp phức liên hợp tại:

$$s_{pk} = -0.1 \pm j3$$

Ta tìm  $H(z)$  trực tiếp theo khai triển phân thức của  $H_a(s)$ . Như vậy ta có:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 - j3} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 + j3}$$

Khi đó:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{-j3T} z^{-1}}$$

Vì hai cực là phức liên hợp, ta có thể kết hợp chúng để tạo ra bộ lọc hai cực đơn với hàm hệ thống:

$$H(z) = \frac{1 - e^{0,1T} \cos 3T z^{-1}}{1 - 2e^{0,1T} \cos 3T z^{-1} + e^{0,2T} z^{-1}}$$

### Bài 6.3

$$H_a(s) = \frac{u_{ra}}{u_{vao}}, \text{ với } u_{ra} = i \frac{R_2 s L}{R_2 + sL}; u_{vao} = i \left( R_1 + \frac{R_2 s L}{R_2 + sL} \right)$$

$$H_a(s) = \frac{R_2 s L}{R_1 R_2 + R_1 s L + R_2 s L} = \frac{R_2 L s}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) L s}$$

$$H(z) = \frac{R_2 L \frac{1 - z^{-1}}{T_s}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) L \frac{1 - z^{-1}}{T_s}} = \frac{R_2 L (1 - z^{-1})}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L (1 - z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{R_2 L (1 - z^{-1})}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L - (R_1 + R_2) L z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{R_2 L}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L} (1 - z^{-1})}{1 - \frac{(R_1 + R_2) L}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L} z^{-1}}$$

$$M = 1 \rightarrow b_0 = \frac{R_2 L}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L}; \quad b_1 = -b_0$$

$$N = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{(R_1 + R_2) L}{R_1 R_2 T_s + (R_1 + R_2) L}$$

$$\text{Vậy: } y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + a_1 y(n-1)$$

Sau đó ta vẽ sơ đồ cấu trúc bộ lọc số.

#### Bài 6.4

Tương tự như các bài trên.

#### Bài 6.5

Các tần số tới hạn chính là tần số -3dB  $\Omega_c$  và tần số băng chặn  $\Omega_s$ . Cụ thể, chúng bằng:

$$\Omega_c = 1000\pi$$

$$\Omega_s = 2000\pi$$

Ứng với độ suy giảm 40dB,  $\delta_2 = 0.01$ . Vì thế, từ (8.2.54) ta có:

$$N = \frac{\log_{10}(10^4 - 1)}{2 \log_{10} 2} = 6,64$$

Để thỏa mãn các chỉ tiêu mong muốn, ta chọn  $N = 7$ . Các vị trí cực là:

$$s_{pk} = 1000\pi e^{j[\pi/2 + (2k+1)\pi/14]} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6$$

#### Bài 6.6

Các điểm cực này đều được phân bố đều trong vòng tròn Butterworth. Khi chuẩn hóa thì các vòng tròn có bán kính là 1, không chuẩn hóa thì bán kính là  $\omega_c$ .

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1) \left( s - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) \left( s - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right)}$$

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1) \left[ s^2 + 1 + s \left( -e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) \right]} = \frac{1}{(s+1) \left[ s^2 + 1 + s \left( -2 \cos \frac{2\pi}{3} \right) \right]}$$

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1)[s^2 - s + 1]}$$

**Bài 6.7** Đáp án: Phương án c)

**Bài 6.8** Đáp án: Phương án a)

**Bài 6.9** Đáp án: Phương án b)

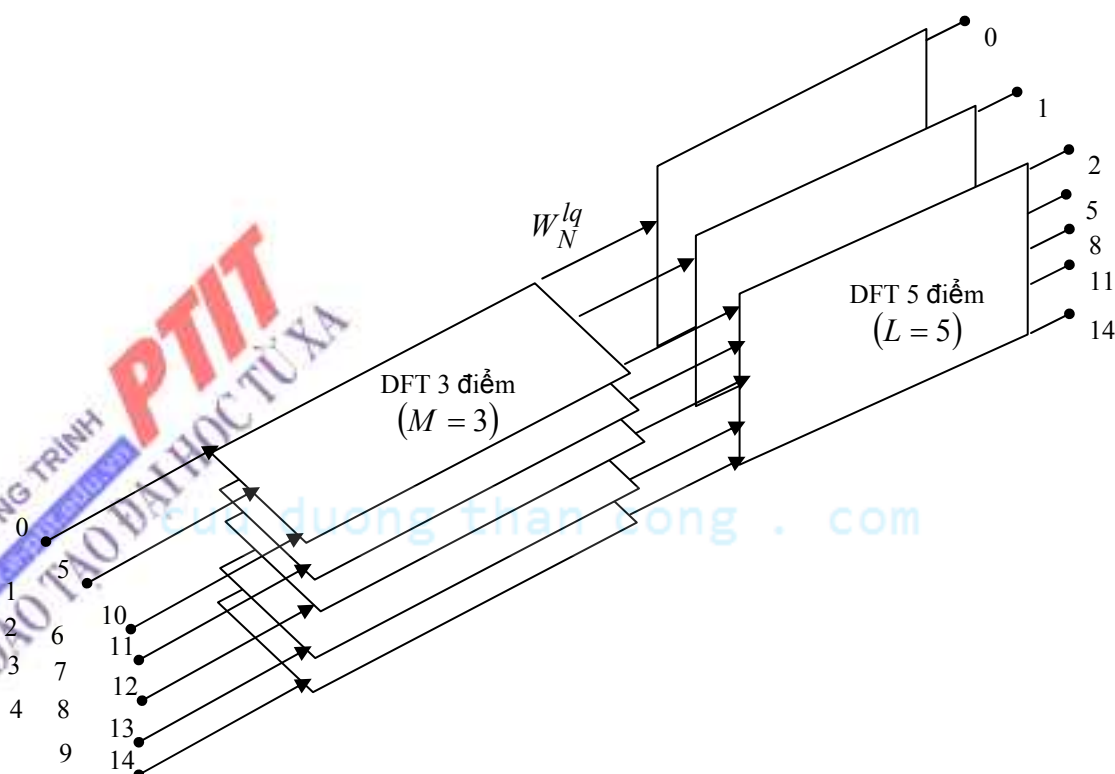
**Bài 6.10** Đáp án: Phương án d)

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG VII

### Bài 7.1

Để minh họa cho thủ tục tính toán ở trên, chúng ta hãy xem xét việc tính một DFT  $N = 15$  điểm.  $N = 3 \times 5 = 15$  nên ta chọn  $L = 5$  và  $M = 3$ . Mặt khác chúng ta lưu dãy  $x(n)$  15 điểm theo kiểu cột như sau:

$$\begin{array}{lll} \text{Hàng 1:} & x(0, 0) = x(0) & x(0, 1) = x(5) & x(0, 2) = x(10) \\ \text{Hàng 2:} & x(1, 0) = x(1) & x(1, 1) = x(6) & x(1, 2) = x(11) \\ \text{Hàng 3:} & x(2, 0) = x(2) & x(2, 1) = x(7) & x(2, 2) = x(12) \\ \text{Hàng 4:} & x(3, 0) = x(3) & x(3, 1) = x(8) & x(3, 2) = x(13) \\ \text{Hàng 5:} & x(4, 0) = x(4) & x(4, 1) = x(9) & x(4, 2) = x(14) \end{array}$$



Tính toán DFT với  $N = 15$  điểm bằng tích của các DFT 3 điểm và 5 điểm.



Bây giờ chúng ta tính lần lượt DFT 3 điểm của các hàng. Việc tính toán này dẫn đến mảng  $5 \times 3$  sau :

$$\begin{matrix} F(0, 0) & F(0, 1) & F(0, 2) \\ F(1, 0) & F(1, 1) & F(1, 2) \\ F(2, 0) & F(2, 1) & F(2, 2) \\ F(3, 0) & F(3, 1) & F(3, 2) \\ F(4, 0) & F(4, 1) & F(4, 2) \end{matrix}$$

Trong bước tiếp theo cần phải nhân mỗi giá trị  $F(l, q)$  với hệ số pha  $W_N^{lq} = W_{15}^{lq}$ , với  $0 \leq l \leq 4$  và  $0 \leq q \leq 2$ . Việc tính toán này dẫn đến mảng  $5 \times 3$  :

$$\begin{matrix} \text{Cột 1} & \text{Cột 2} & \text{Cột 3} \\ G(0, 0) & G(0, 1) & G(0, 2) \\ G(1, 0) & G(1, 1) & G(1, 2) \\ G(2, 0) & G(2, 1) & G(2, 2) \\ G(3, 0) & G(3, 1) & G(3, 2) \\ G(4, 0) & G(4, 1) & G(4, 2) \end{matrix}$$

Bước cuối cùng là tính toán DFT 5 điểm lần lượt cho 3 hàng. Việc tính toán lần cuối này ta nhận được các giá trị mong muốn của DFT ở dạng :

$$\begin{matrix} X(0, 0) = x(0) & X(0, 1) = x(5) & X(0, 2) = x(10) \\ X(1, 0) = x(1) & X(1, 1) = x(6) & X(1, 2) = x(11) \\ X(2, 0) = x(2) & X(2, 1) = x(7) & X(2, 2) = x(12) \\ X(3, 0) = x(3) & X(3, 1) = x(8) & X(3, 2) = x(13) \\ X(4, 0) = x(4) & X(4, 1) = x(9) & X(4, 2) = x(14) \end{matrix}$$

Minh hoạ trong hình 9.9 thể hiện các bước tính toán này.

Ta cần quan tâm đến việc dãy dữ liệu được phân chia và kết quả DFT  $X(k)$  được lưu trong các mảng một chiều. Khi dãy đầu vào  $x(n)$  và dãy đầu ra của DFT  $X(k)$  trong các mảng hai chiều được đọc chéo từ hàng 1 sang hàng 5 thì các dãy chúng ta nhận được là :

**DÃY ĐẦU VÀO**

$$x(0) \ x(5) \ x(10) \ x(1) \ x(6) \ x(11) \ x(2) \ x(7) \ x(12) \ x(3) \ x(8) \ x(13) \ x(14) \ x(9) \ x(14)$$

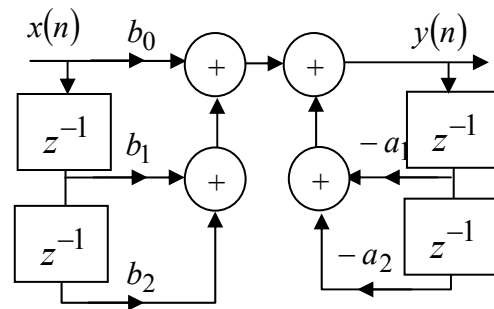
**DÃY ĐẦU RA**

$$X(0) \ X(1) \ X(2) \ X(3) \ X(4) \ X(5) \ X(6) \ X(7) \ X(8) \ X(9) \ X(10) \ X(11) \ X(12) \ X(13) \ X(14)$$

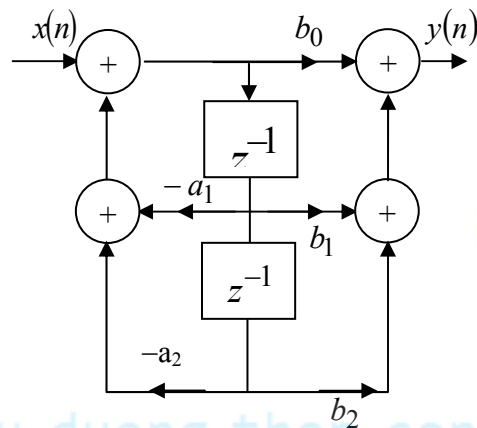
Chúng ta thấy rằng dãy đầu vào bị xáo trộn từ các trật tự bình thường trong tính toán DFT. Mặt khác, dãy đầu ra lại tuân đúng với trật tự. Trong trường hợp này việc sắp xếp lại mảng đầu vào phụ thuộc vào việc phân đoạn của mảng một chiều thành mảng hai chiều và trật tự mà theo đó các tính toán DFT được tính. Việc xáo trộn của dãy dữ liệu đầu vào hoặc dãy dữ liệu đầu ra này là một đặc tính chung của hầu hết các thuật toán tính toán FFT.

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG VIII

### Bài 8.1

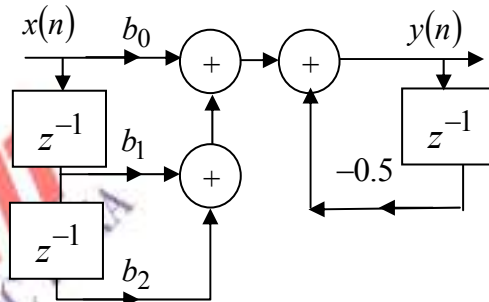


### Bài 8.2



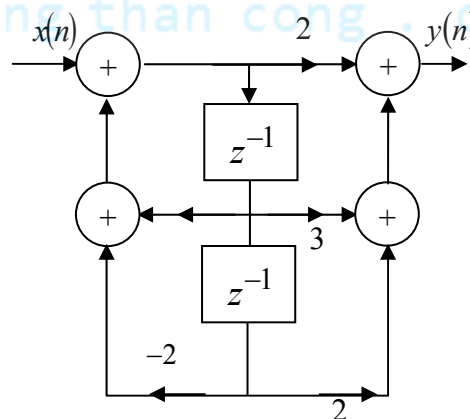
### Bài 8.3

Phải đưa về dạng:  $y(n) + 0.5y(n-1) = 2x(n) + 3x(n-1) + 0.5x(n-2)$



### Bài 8.4

Chuyển như bài 8.2 ta có



### Bài 8.5

Cách làm tương tự bài 8.1, 8.2

### Bài 8.6

Cách làm tương tự bài 8.1, 8.2

### Bài 8.7

Ta giải bài toán theo phương pháp đệ quy với  $m = 1$ . Như vậy, ta có:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0(z) + k_1 z^{-1} B_0(z) \\ &= 1 + k_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1} \end{aligned}$$

Từ đó các hệ số của bộ lọc FIR tương ứng với dàn 1 tầng là  $\alpha_1(0) = 1$ ,  $\alpha_1(1) = k_1 = \frac{1}{4}$ . Vì  $B_m(z)$  là đa thức nghịch đảo của  $A_m(z)$ , nên ta có:

$$B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$$

Kế tiếp ta cộng thêm tầng thứ hai vào dàn. Đối với  $m = 2$ , cho:

$$\begin{aligned} A_2(z) &= A_1(z) + k_2 z^{-1} B_1(z) \\ &= 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} \end{aligned}$$

Do đó các tham số bộ lọc FIR tương ứng với dàn hai tầng là  $\alpha_2(0) = 1$ ,  $\alpha_2(1) = \frac{3}{8}$ ,  $\alpha_2(2) = \frac{1}{2}$ . Và ta cũng có:

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

Cuối cùng, việc bổ xung thêm tầng thứ 3 vào dàn sẽ dẫn đến đa thức:

$$\begin{aligned} A_3(z) &= A_2(z) + k_3 z^{-1} B_2(z) \\ &= 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3} \end{aligned}$$

Vì vậy, bộ lọc FIR dạng trực tiếp cần tìm được đặc trưng bởi các hệ số:

$$\alpha_3(0) = 1, \quad \alpha_3(1) = \frac{13}{24}, \quad \alpha_3(2) = \frac{5}{8} \quad \text{và} \quad \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$$

### Bài 8.8

Cách làm tương tự bài 8.7

### Bài 8.9

Trước hết ta lưu ý rằng  $K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$ . Hơn nữa:

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

Hệ thức giảm bước với  $m = 3$  có:

$$\begin{aligned} A_2(z) &= \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} \\ &= 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \end{aligned}$$

Vì thế  $K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{2}$  và  $B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} + z^{-2}$ . Bằng sự lặp lại phép đệ quy hạ tầng bước ta đạt được:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} \\ &= 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } K_1 = \alpha_1(1) = \frac{1}{4}$$

### Bài 8.10

Cách làm tương tự bài 8.9

## ĐÁP ÁN CHƯƠNG IX

### Bài 9.1

Tương tự ví dụ 9.1 ta có: sau khi chuẩn hoá tín hiệu đi qua bộ phân chia là:  $y_{\downarrow 2}(n) = x(2n)$

$$y_{\downarrow 2}(0) = 1;$$

$$y_{\downarrow 2}(1) = 2/3;$$

$$y_{\downarrow 2}(2) = 1/3;$$

### Bài 9.2

Cách làm giống ví dụ 9.2

### Bài 9.3

Cách làm giống ví dụ 9.3

### Bài 9.4

$$y_{\uparrow 2}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm 1L, \pm 2L, \dots \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Ta có:  $y_{\uparrow 2}(0) = 1$                        $y_{\uparrow 2}(2) = \frac{2}{3}$                        $y_{\uparrow 2}(3) = \frac{2}{3}$

### Bài 9.5

$$X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}$$

$$Y_{\uparrow 2}(z) = z^{-2} + 3z^{-4} + 3z^{-6} + z^{-8}$$

### Bài 9.6

$$Y_{\uparrow 2}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$$

Ta vẽ ra thấy phổ bị nén lại một nửa giống ví dụ 9.6

### Bài 9.7

Sơ đồ 1:

$$X(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{\uparrow L}(z) \xrightarrow{H(z)} Y_{\uparrow LH}(z)$$

$$Y_{\uparrow L}(z) = X(z^L)$$

$$Y_{\uparrow LH}(z) = Y_{\uparrow L}(z) \cdot H(z) = X(z^L) \cdot H(z)$$

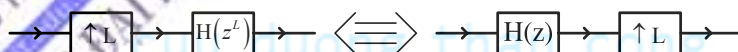
Sơ đồ 2:

$$X(z) \xrightarrow{H(z)} Y_H(z) \xrightarrow{\uparrow L} Y_{H\uparrow L}(z)$$

$$Y_H(z) = X(z)H(z)$$

$$Y_{H\uparrow L}(z) = Y_H(z^L) = X(z^L) \cdot H(z^L)$$

Kết luận: 2 sơ đồ tương đương



### Bài 9.8

Cho tín hiệu:  $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 6z^{-5} + 7z^{-6}$

Tín hiệu này đi qua bộ lấy mẫu  $\downarrow \uparrow \frac{2}{3}$  và  $\uparrow \downarrow \frac{2}{3}$ . Tìm  $Y_{\downarrow \uparrow \frac{2}{3}}(z) = ?$  và  $Y_{\uparrow \downarrow \frac{2}{3}}(z) = ?$

### Bài 9.9

$$X(z) = 1 + z^{-1}$$

$$H(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$Y_H(z) = X(z).H(z)$$

$$Y_{H\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 X\left(z^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{2}l}\right) . H\left(z^{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{2}l}\right)$$

$$Y_{H\downarrow 2}(z) = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{X(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})}_{Y_H(z^{\frac{1}{2}})} + \underbrace{X(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})}_{Y_H(-z^{\frac{1}{2}})} \right]$$

Cứ thế ta tiếp tục tính tương tự như ví 9.10

#### Bài 9. 10

$$X(z) = 1 + z^{-1}$$

$$Y_{\uparrow 2}(z) = X(z^2) = 1 + z^{-2}$$

$$H(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$Y_{\uparrow 2H}(z) = Y_{\uparrow 2}(z).H(z) = X(z^2).H(z)$$

Từ đây ta thực hiện tương tự giống ví dụ 9.14

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây  
Tel: (04) 5541221; Fax: (04) 5540587  
Website: <http://www.e-ptit.edu.vn>; E-mail: [dhtr@e-ptit.edu.vn](mailto:dhtr@e-ptit.edu.vn)

[Cuu duong than cong . com](http://CuuDuongThanCong.com)

CHƯƠNG TRÌNH **PTIT**  
ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA  
[www.ptit.edu.vn](http://www.ptit.edu.vn)

[Cuu duong than cong . com](http://CuuDuongThanCong.com)



## CÁC TỪ VIẾT TẮT

### Tiếng Anh.

**A/D:** Analog to Digital - tương tự/số

**D/A:** Digital to Analog - số/tương tự

**BIBO:** Bounded Input Bounded Output - chặn trên chặn dưới

**FIR:** Finite Impulse Response - đáp ứng xung hữu hạn

**IIR:** Infinite Impulse Response - đáp ứng xung vô hạn

**SNR:** Signal to Noise Ratio - tỉ số tín hiệu/nhiều

**RC:** Region of Convergence - miền hội tụ

**DFT:** Discrete Fourier Transform - biến đổi Fourier rời rạc

**IDFT:** Inverse Discrete Fourier Transform - biến đổi Fourier rời rạc ngược

**FFT:** Fast Fourier Transform - biến đổi Fourier nhanh

### Tiếng Việt.

**HTTT:** Hệ thống tuyến tính

**TTBB:** Tuyến tính bất biến

**PTSP:** Phương trình sai phân

**HTTTBB:** Hệ thống tuyến tính bất biến

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Nguyễn Quốc Trung*. "Xử lý tín hiệu và lọc số" - Tập 1, tập 2, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội 2001.
2. *Nguyễn Xuân Quỳnh*. "Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng", Nhà xuất bản Giáo dục, Hà nội 1995.
3. *Jonh G.Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Introduction to Digital Signal Processing" Maxwell Macmillan International Editions, New York 1989.
4. *Jonh G.Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Digital Signal Processing: Principles Algorithms, and Applications" Macmillan Publishing Company, printed the republic of Singapore, 1992.
5. *Leland B.Jackson* "Signal, Systems and Transforms" Addison – Wesley Publishing Company, printed in the US of America 1991.

cuu duong than cong . com



cuu duong than cong . com

## MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU.....	1
CHƯƠNG I: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN THỜI GIAN RỜI RẠC	3
GIỚI THIỆU .....	3
NỘI DUNG .....	5
1.1. BIỂU DIỄN TÍN HIỆU RỜI RẠC .....	5
1.2. CÁC HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN.....	15
1.3. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẲNG .....	21
1.4. CÁC HỆ THỐNG KHÔNG ĐỆ QUY VÀ ĐỆ QUY .....	26
1.5. THỰC HIỆN HỆ THỐNG .....	28
1.6. TƯƠNG QUAN TÍN HIỆU .....	30
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 1 .....	32
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1 .....	35
CHƯƠNG II: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z .....	40
GIỚI THIỆU .....	40
NỘI DUNG .....	41
2.1. BIẾN ĐỔI Z (ZT: Z TRANSFORM).....	41
2.2. CỰC VÀ KHÔNG (POLE AND ZERO).....	44
2.3. BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC (IZT: INVERSE Z TRANSFORM).....	46
2.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z .....	51
2.5. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z.....	51
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG II. ....	58
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2.....	62
CHƯƠNG III: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC .....	67
GIỚI THIỆU .....	67
NỘI DUNG .....	69
3.1. BIẾN ĐỔI FOURIER.....	69
3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER.....	76
3.3. QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z .....	77
3.4. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC .....	78
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 3 .....	86
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3 .....	90
CHƯƠNG IV: BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC $k$ (HOẶC $\omega_k$ ).....	95
GIỚI THIỆU .....	95
NỘI DUNG .....	95
4.1. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DẪY TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N.....	95
4.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DẪY TUẦN HOÀN CHU KỲ N.....	96

4.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT ĐỐI VỚI DẪY KHÔNG TUẦN HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N. ....	102
4.4. CÁC TÍNH CHẤT CỦA DFT ĐỐI VỚI DẪY CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN N. ....	105
4.5. PHÉP CHẬP NHANH (PHÉP CHẬP PHÂN ĐOẠN) .....	113
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 4 .....	114
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4 .....	116
<b>CHƯƠNG V: TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN FIR. ....</b>	<b>119</b>
GIỚI THIỆU .....	119
NỘI DUNG .....	119
5.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH.....	119
5.2. TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR THEO PHƯƠNG PHÁP CỦA SỐ. ....	122
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 5 .....	133
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 5 .....	135
<b>CHƯƠNG VI: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CÓ CHIỀU DÀI VÔ HẠN IIR.....</b>	<b>138</b>
GIỚI THIỆU .....	138
NỘI DUNG .....	138
6.1. CƠ SỞ TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ IIR.....	138
6.2. PHƯƠNG PHÁP BẤT BIẾN XUNG .....	139
6.3. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI SONG TUYẾN.....	143
6.4. PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG ĐƯƠNG VI PHẦN.....	146
6.5. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ BUTTERWORTH.....	148
6.6. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CHEBYSHEP.....	149
6.7. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ ELIP (CAUER).....	152
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 6 .....	152
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 6.....	154
<b>CHƯƠNG VII: BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH - FFT.....</b>	<b>158</b>
GIỚI THIỆU .....	158
NỘI DUNG .....	158
7.1. BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH .....	158
7.2. THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 2 .....	162
7.3. THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 4 .....	171
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 7 .....	175
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 7 .....	177
<b>CHƯƠNG VIII: CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ.....</b>	<b>178</b>
GIỚI THIỆU .....	178
NỘI DUNG .....	179
8.1. CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ FIR .....	179
8.2. CẤU TRÚC BỘ LỌC SỐ IIR .....	188
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 8 .....	199
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 8.....	203
<b>CHƯƠNG IX: LỌC SỐ NHIỀU NHỊP .....</b>	<b>205</b>
GIỚI THIỆU .....	205
NỘI DUNG .....	206
9.1. THAY ĐỔI NHỊP LẤY MẪU .....	206

9.2. BỘ LỌC BIẾN ĐỔI NHỊP LẤY MẪU.....	217
9.3. MÃ HOÁ BĂNG CON (Subband coding).....	229
TÓM TẮT VÀ HƯỚNG DẪN HỌC TẬP CHƯƠNG 9.....	230
CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 9.....	234
<b>ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.....</b>	<b>237</b>
ĐÁP ÁN CHƯƠNG I.....	237
ĐÁP ÁN CHƯƠNG II.....	243
ĐÁP ÁN CHƯƠNG III.....	248
ĐÁP ÁN CHƯƠNG IV.....	251
ĐÁP ÁN CHƯƠNG V.....	252
ĐÁP ÁN CHƯƠNG VI.....	254
ĐÁP ÁN CHƯƠNG VII.....	257
ĐÁP ÁN CHƯƠNG VIII.....	259
ĐÁP ÁN CHƯƠNG IX.....	261
<b>CÁC TỪ VIẾT TẮT.....</b>	<b>264</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>	<b>265</b>
<b>MỤC LỤC.....</b>	<b>266</b>

cuu duong than cong . com



cuu duong than cong . com

# XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Mã số: 492XLS340

**Chịu trách nhiệm bản thảo**

TRUNG TÂM ĐÀO TẠO BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG 1

*(Tài liệu này được ban hành theo Quyết định số: 376/QĐ-TTĐT1 ngày 22/05/2006 của Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)*



---

In tại : Công ty cổ phần In Bưu điện  
Số lượng : 2000 cuốn, khổ 19 x 26 cm  
Ngày hoàn thành : 01/06/2006.