Chương 3
TÍCH PHÂN MẶT

3.1. Tích phân mặt loại 1

3.1.1. Định nghĩa tích phân mặt loại 1

Cho một mặt cong S và hàm số $f(M) = f(x, y, z)$ xác định trên mặt S. Chia mặt S một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau. Gọi tên và diện tích của các mảnh nhỏ là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi mảnh cho ΔS_i chọn tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ và lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$.

Gọi d_i là đường kính của mảnh ΔS_i. Khi $n \to \infty$ sao cho $\max_i d_i \to 0$ mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách lấy điểm M_i, thì giới hạn đó gọi là tích phân mặt loại một của hàm $f(x, y, z)$ trên mặt S và ký hiệu $I = \iint_S f(x, y, z)dS$

Khi đó hàm f được gọi là khả tích trên mặt S.

Người ta đã chứng minh được rằng nếu mặt S trơn (tức là có pháp tuyến khác 0 và biến thiên liên tục trên S) và hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt S thì tích phân $I = \iint_S f(x, y, z)dS$ tồn tại.

3.1.2. Tính chất

Tích phân mặt loại 1 có các tính chất giống như các tính chất của tích phân kép.

Tính chất 1: Nếu các hàm $f(x, y, z), g(x, y, z)$ khả tích trên mặt S, còn a, b là các hằng số. Khi đó

$$\iint_S \left[af(x,y,z) + bg(x,y,z)\right]dS = a\iint_S f(x,y,z)dS + b\iint_S g(x,y,z)dS$$

Tính chất 2: Nếu $S = S_1 + S_2$ thì

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS$$

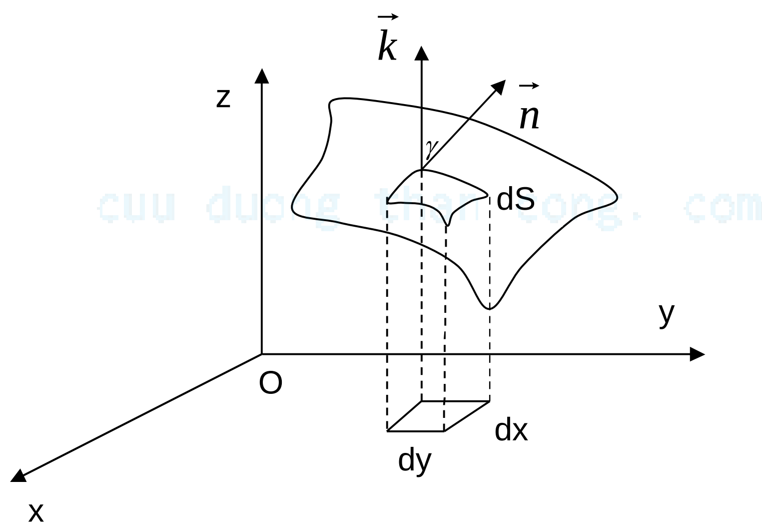
Tính chất 3: $\iint\limits_S dS = S$, S là diện tích của mặt cong S .

3.1.3. Cách tính

Phương pháp chung là đưa tích phân mặt $I = \iint\limits_S f(x,y,z)dS$ về tích phân kép.

Giả sử mặt cong S được cho bởi phương trình dạng $z = z(x,y)$ với $z(x,y)$ là hàm liên tục, đơn trị và có các đạo hàm riêng $z_x^/(x,y), z_y^/(x,y)$ liên tục trong miền D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy .

Hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên mặt S. Xét yếu tố diện tích mặt dS tại điểm $M(x,y) \in D$ là hình chiếu của một điểm nào đó trên mặt S có bán kính vecor là $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z(x,y))$



Vector pháp tuyến tại M là $\vec{n}(M) = -z_x^{'}(x,y)\vec{i} - z_y^{'}(x,y)\vec{j} + \vec{k}$

Gọi γ là góc giữa vector $\vec{n}(M)$ và trục Oz, ta có

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(z_x^{'}\right) + \left(z_y^{'}\right)^2}}$$

Mặt khác ta thấy hình chiếu của dS lên mặt phẳng Oxy là yếu tố diện tích của D, hơn nữa vì dS là vô cùng bé nên ta xem dS là diện tích phẳng

Suy ra $dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(z_x^{'}\right) + \left(z_y^{'}\right)^2}\,dxdy$

Vậy $$\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy}$$

Chú ý

➢ Nếu những đường thẳng song song với trục Oz cắt mặt S nhiều hơn một điểm, ta sẽ chia mặt S thành một số hữu hạn mảnh nhỏ, sao cho mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mỗi mảnh nhỏ không quá một điểm.

➢ Nếu $f(x,y,z)=1$ ta có công thức tính diện tích mặt cong S

$$\boxed{S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy}$$

➢ Nếu mặt S được cho dưới dạng phương trình ẩn $F(x,y,z)=0$ thì pháp vector $\nabla F(x,y,z)$ và từ phương trình $F(x,y,z)=0$ sẽ xác định hàm ẩn $z=z(x,y)$.

Khi đó $$\boxed{\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_S f(x,y,z(x,y))\frac{|\nabla F(x,y,z)|}{|F_z'(x,y,z)|}dxdy}$$

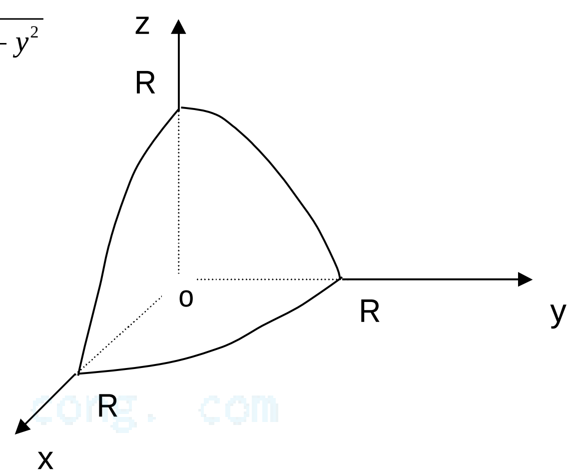
Ví dụ 3.1: Tính $I=\iint_S \frac{x}{x^2+y^2}dS$ với S là một phần tám mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ nằm trong góc phần tám thứ nhất $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

Giải

Ta có phương trình mặt S là $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$z_x' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y' = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$1+z_x'^2+z_y'^2 = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$



Áp dụng công thức tính tích phân mặt loại 1 ta có

$$I=\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy \text{ với } D:\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$$

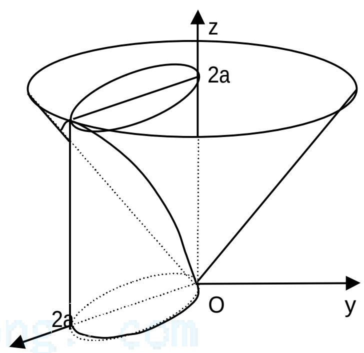
Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\end{cases}$.

Khi đó, $\left|J\right| = r$ và $D \to D^{/}: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$I = \iint_{D^{/}} \frac{r\cos\varphi}{r^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} rdrd\varphi = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi . \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi R}{2}.$$

$$= R.\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} .ar\sin\frac{r}{R}\Big|_0^R = \frac{\pi R}{2}$$

Ví dụ 3.2: Tính $I = \iint_S (xy + yz + zx)dS$, với S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$.



Giải

Ta có : $z_x^{/} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y^{/} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Do đó

$$1 + z_x^{/2} + z_y^{/2} = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 2$$

$$I = \iint_D \left(xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{2}dxdy$$

Với D là hình tròn được giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 = 2ax$.

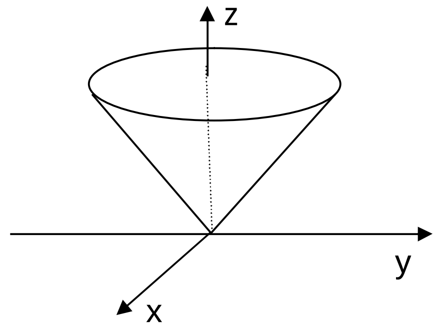
Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Khi đó, $\left|J\right| = r$ và $D \to D^{/}: \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2a\cos\varphi \end{cases}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi . \int_0^{2a\cos\varphi} \left(r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi\right)\sqrt{2}rdr$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi\right)\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi$$

Do tính chẵn lẻ nên $I = 4a^4\sqrt{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \dfrac{64\sqrt{2}a^4}{15}$

Ví dụ 3.3 : Tính $I = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dS$, với S là biên của vật thể giới hạn bởi $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.



Giải

Ta có $S = S_d + S_{xq}$

- Trên S_d: $z = 1$

  $z'_x = z'_y = 0$

  $I_1 = \iint\limits_{S_d} \left(x^2+y^2\right) dS = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$, với $D: x^2+y^2 \le 1$

  Chuyển sang hệ tọa độ cực ta thu được kết quả $I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2.rd\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

- Trên S_{xq}: $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Ta có $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 2$

  $I_2 = \iint\limits_{Sxq} \left(x^2+y^2\right) dS = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy$

  Chuyển sang hệ tọa độ cực ta thu được kết quả $I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3\sqrt{2}dr = \sqrt{2}\dfrac{\pi}{2}$

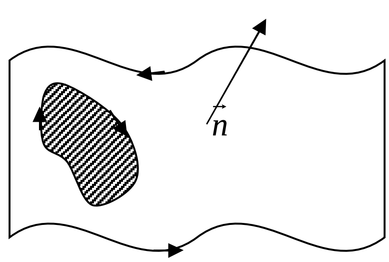
Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3.2. Tích phân mặt loại 2

3.2.1. Mặt định hướng

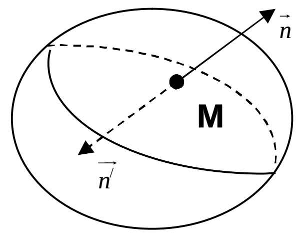
Ta nói mặt cong S là định hướng được hay là ***mặt định hướng*** nếu vector pháp tuyến $\vec{n}(M)$ xác định được tại mọi điểm M và biến thiên liên tục khi M chạy trên mặt S.

Khi xác định được vector pháp tuyến, ta nói đã xác định được hướng dương hay ***phía dương*** của mặt, tức là phía mà khi ta đứng trên đó thì pháp vector $\vec{n}(M)$ hướng từ "***chân đến đầu***" . Phía ngược lại gọi là phía âm hay hướng âm của mặt S.



Nếu mặt S đã xác định hướng thì coi như cũng xác định luôn hướng của các đường cong là biên của nó. Đó là hướng mà khi ta đướng theo hướng dương của mặt và đi theo nó thì luôn nhìn thấy mặt S ở phía tay trái.

Để nói đến hướng của mặt người ta dùng các từ như phía trên, phía dưới, phía trong, phía ngoài...



3.2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Cho các hàm $P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)$ xác định trên một mặt định hướng S. Chia mặt S một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của các mảnh nhỏ là $\Delta S_1,\Delta S_2,...,\Delta S_n$. Trên mỗi mảnh nhỏ ΔS_i lấy điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ bất kỳ và lập tổng

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i,z_i)\cos\alpha_i+Q(x_i,y_i,z_i)\cos\beta_i+R(x_i,y_i,z_i)\cos\gamma_i\right]\Delta S_i$$

trong đó $\alpha_i=\left(\vec{n}(M),Ox\right)$; $\beta_i=\left(\vec{n}(M),Oy\right)$; $\gamma_i=\left(\vec{n}(M),Oz\right)$.

Khi $n\to\infty$ sao cho $\max\limits_i d_i\to 0$ mà I_n dần tới một giới hạn hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia mặt S và cách lấy điểm M_i, thì giới hạn đó gọi là tích phân mặt loại hai của các hàm $P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)$ trên mặt S. Ký hiệu

$$I=\iint_S[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

Ngoài ra tích phân mặt loại hai còn hay viết dưới dạng:

$$I=\iint_S[P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy]$$

Người ta đã chứng minh được rằng nếu S là một mặt định hướng liên tục và có pháp tuyến biến thiên liên tục, còn các hàm $P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)$ liên tục trên mặt S thì tích phân mặt loại hai tồn tại.

3.2.3. Tính chất

Tương tự tích phân mặt loại một.

3.2.4. Cách tính

Phương pháp chung là đưa về tích phân kép thông qua tích phân mặt loại một như sau. Xét tích phân $I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy$

Giả sử mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mặt S ở không quá một điểm và mặt S có phương trình $z = z(x,y)$ với $z(x,y)$ là hàm đơn trị.

$$I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\, dS$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\cos\gamma \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$$

trong đó, z(x,y) là phương trình mặt cong S và D_{xy} là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy.

Khi đó

- Nếu pháp tuyến dương $\vec{n}(M)$ của mặt S tạo với trục Oz một góc nhọn thì

$$\boxed{I = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy}$$

với D_{xy} là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy.

- Nếu pháp tuyến dương $\vec{n}(M)$ của mặt S tạo với trục Oz một góc tù thì

$$\boxed{I = \iint\limits_S R(x,y,z)\;dxdy = -\iint\limits_{Dxy} R(x,y,z(x,y))\,dxdy}$$

Tương tự ta cũng tính được các tích phân $\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx$ và $\iint\limits_S P(x,y,z)dxdy$

Chú ý:

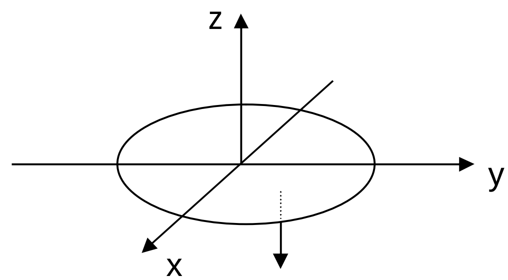
- Nếu những đường thẳng song song với trục Oz cắt mặt S nhiều hơn một điểm thì ta sẽ chia mặt S thành mảnh nhỏ, sao cho mỗi mảnh nhỏ có tính chất trên.
- Nếu S là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz thì $\iint\limits_S R(x,y,z(x,y)\,dxdy = 0$. Tương tự, nếu các đường sinh song song với trục Ox thì $\iint\limits_S P(x,y,z(x,y)\,dydz = 0$ và song song với trục Oy thì $\iint\limits_S Q(x,y,z(x,y)\,dxdz = 0$.

- Nếu đổi hướng mặt cong S thì tích phân mặt loại hai đổi dấu.

Ví dụ 3.4: Tính $I = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, với S là mặt dưới của hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ nằm trong mặt phẳng Oxy.

Giải

Mặt S có phương trình $z = 0$, $x^2 + y^2 \le R^2$. Hình chiếu của S xuống mặt Oxy là hình tròn D: $x^2 + y^2 \le R^2$.



Ta thấy $\left(\vec{n}, Oz\right) = \pi$ nên ta có

$$I = -\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

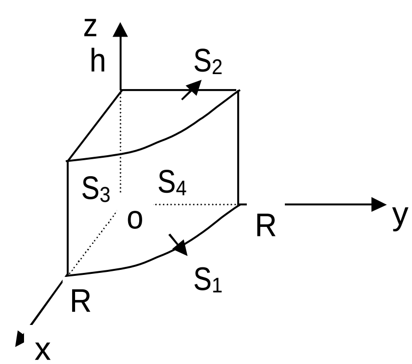
Chuyển sang hệ tọa độ cực ta có

Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Suy ra $|J| = r$ và $D \to D' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2.rdr = -\frac{\pi}{2} R^4$$

Ví dụ 3.5: Tính $I = \iint_S yz\ dxdy$ với S là phía ngoài của mặt giới hạn bởi vật thể

$x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le h$



Giải

Mặt S được chia thành 5 mặt: hai đáy S_1, S_2 hai mặt bên $S_3(y = 0),\ S_4(x = 0)$ và mặt trụ $S_5\left(x^2 + y^2 = R^2\right)$.

Các mặt S_3, S_4 và mặt trụ S_5 song song với trục Oz nên tích phân theo các mặt đó bằng 0.

- Trên mặt S_1 vì $z = 0$ nên $\iint_{S_1} yz\ dxdy = 0$.

- Trên mặt S_2 vì $z = h$ và $\left(\vec{n}, Oz\right) = 0$ nên

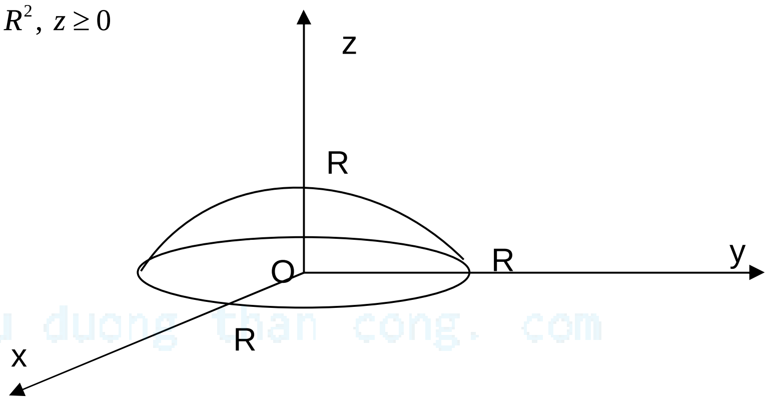
$I_1 = \iint\limits_{S_2} yz\ dxdy = h\iint\limits_{D_{xy}} ydxdy$ với $D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Chuyển qua hệ tọa độ cực ta thu được kết quả $I_1 = h\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^2 dr = \dfrac{hR^3}{3}$

Vậy $I = \dfrac{hR^3}{3}$.

Ví dụ 3.6: Tính $I = \iint\limits_S x^2\ dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, với S là phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0$

Giải



- Tính $I_1 = \iint\limits_S x^2 dydz$.

  Ta thấy rằng $S = S_1 + S_2$ với S_1 ứng với $x \le 0$ và $\left(\vec{n}, Ox\right) > \dfrac{\pi}{2}$ và S_2 ứng với $x \ge 0$ và $\left(\vec{n}, Ox\right) < \dfrac{\pi}{2}$.

  Hình chiếu của S_1, S_2 lên mặt Oyz là nửa hình tròn D_{yz}.

  Do đó $I_1 = \iint\limits_S x^2 dydz = \iint\limits_{S_1} x^2 dydz + \iint\limits_{S_2} x^2 dydz = \iint\limits_{D_{yz}} x^2 dydz - \iint\limits_{D_{yz}} x^2 dydz = 0$

- Tương tự ta có $I_2 = \iint\limits_S y^2 dzdx = 0$

- Tính $I_3 = \iint\limits_S z^2 dxdy$

  Ta có $\left(\vec{n}, Oz\right) < \dfrac{\pi}{2}$ và $D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2$ với $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$.

Vì vậy $I_3 = \iint\limits_S z^2 dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy$

Chuyển sang hệ tọa độ cực ta thu được kết quả

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(R^2 - r^2\right) rdr = \frac{1}{2}\pi R^4$$

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{1}{2}\pi R^4$.

3.2.5. Công thức Gauss – Ostrogratski

Công thức này cho ta mối liên hệ giữa tích phân bội ba và tích phân mặt loại hai như sau:

Định lý: Nếu các hàm $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)$ cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền V thì ta có

$$\boxed{\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz}$$

trong đó S là biên của miền V, tích phân mặt S lấy theo mặt ngoài.

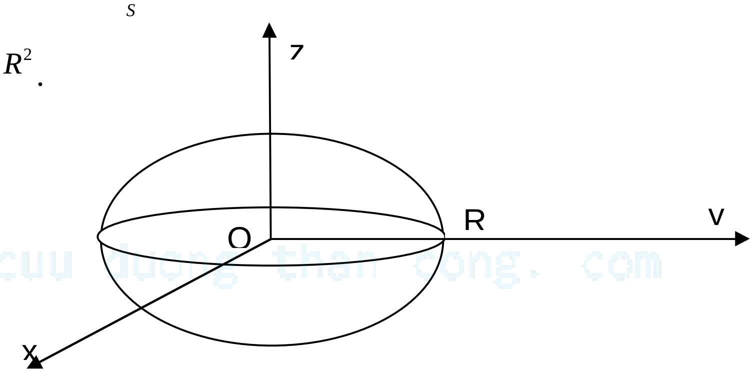
Công thức trên gọi là công thức Gauss - Ostrogratski.

Chú ý: Nếu $P = x,\ Q = y,\ R = z$ ta có công thức tính thể tích

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy}$$

Ví dụ 3.7: Tính $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ với S là mặt ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải



Áp dụng công thức Gauss – Ostrograski ta có $I = 3\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$

với $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

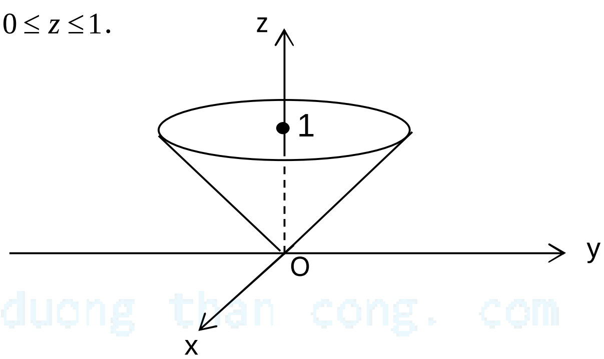
Chuyển sang hệ tọa độ cầu bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

Khi đó, $|J| = r\sin^2\theta$ và $V \to V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

Suy ra $I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} r^2 r^2 dr = \frac{12}{5}\pi R^5$.

Ví dụ 3.8 Tính $I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ với S là mặt ngoài của mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

Giải



Nhận xét $S = S + S_d - S_d = S_1 - S_d$ với S_1 là mặt ngoài của hình nón.

Xét $I_1 = \iint_{S_1} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, áp dụng công thức Gauss, ta có

$I_1 = \iiint_V (0+0+0)dxdydz = 0$.

Xét $I_2 = \iint_{S_d} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$

với S_d là phía trên của hình tròn $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Ta có $I_2 = \iint_{S_d} (x-y)dxdy = \iint_{D_{xy}} (x-y)dxdy$ với $D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$.

Chuyển qua hệ tọa độ cực ta thu được

$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r\cos\varphi - r\sin\varphi) rdr = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi \int_0^1 r^2 dr = 0$

Vậy $I = I_1 - I_2 = 0$.

3.2.6. Công thức Stokes

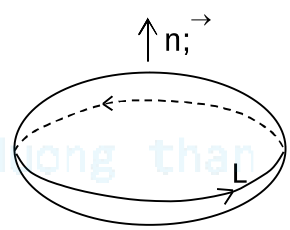
Công thức Stokes cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai và tích phân mặt loại hai. Giả sử S là gồm một số hữu hạn các mặt liên tục và có pháp tuyến biến thiên liên tục. Ta có định lý sau

Định lý: Nếu các hàm $P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt S, thì ta có

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

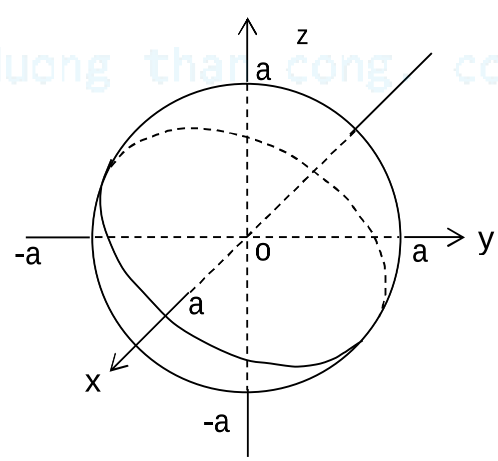
trong đó L là biên của mặt S.

Chiều lấy tích phân trên L và S là chiều dương. Nghĩa là chiều được chọn sao cho một người đứng trên mặt S, hướng của pháp tuyến dương đi từ chân đến đầu, nhìn thấy chiều trên L là ngược chiều kim đồng hồ.



Nếu S là một hình phẳng vuông góc với trục Oz thì từ $z=z_0$ suy ra $dz=0$ ta có công thức Green.

Ví dụ 3.9 Tính $I=\oint_L ydx+zdy+xdz$ với L là đường tròn do mặt phẳng $x+y+z=0$ cắt mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$, theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ hướng dương của trục Ox.



Giải

Ta có S là hình tròn với biên là đường tròn L nằm trong mặt phẳng $x+y+z=0$, có $\vec{n}=(1,1,1)$.

Áp dụng công thức Stokes ta có

$$I=\oint_L ydx+zdy+xdz=-\iint_S dydz+dxdz+dxdy$$
$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$$

với $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ là các cosin chỉ hướng của vector pháp $\vec{n}$.

Suy ra $I=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\pi a^2$.

3.3. Trường vector

3.3.1. Định nghĩa trường vector

Ta nói rằng trong miền V có một trường vectơ $\vec{F}$, nếu tại mỗi điểm $M\in V$ xác định một đại lượng vectơ hay một hàm vector $\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y,z)$

Như vậy cho một trường vectơ $\vec{F}$ trong miền V là cho một hàm vectơ $\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ xác định trong miền ấy.

Trường vectơ $\vec{F}$ được gọi là liên tục trong V nếu P, Q, R là các hàm liên tục. Trường vectơ $\vec{F}$ được gọi là khả vi trong V nếu P, Q, R là các hàm khả vi.

Ví dụ 3.10

a. Trường vectơ vận tốc của một dòng chảy có hướng tiếp tuyến đối với dòng chảy ấy.

b. Trường lực, trường gradient của một mặt cong nào đó là các trường vector.

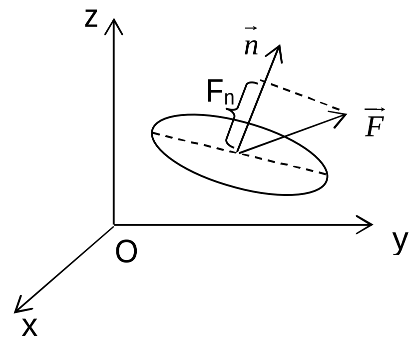
3.3.2. Thông lượng và độ phân kỳ

❖ **Thông lượng**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ và một mặt định hướng S có pháp tuyến dương $\vec{n}$. Giả sử $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các côsin chỉ hướng của $\vec{n}$. Khi đó đại lượng

$$\boxed{W = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy}$$

được gọi là thông lượng của trường vector $\overrightarrow{F}$ qua mặt cong S.



Nếu ta đặt $F_n = Ch_{\vec{n}}\overrightarrow{F}$ thì

$F_n = \overrightarrow{F}.\vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$
$\vec{n} = \left(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\right)$

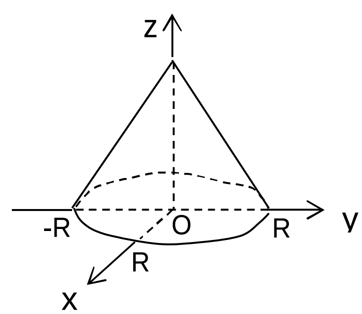
Khi đó thông lượng có thể viết dưới dạng

$$W = \iint_S \overrightarrow{F}.\vec{n}dS$$

Ý nghĩa: Nếu $\overrightarrow{F}$ là trường tốc độ của dòng chất lỏng thì thông lượng của trường $\overrightarrow{F}$ qua mặt cong S là lượng chất lỏng chảy qua S theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$ trong một đơn vị thời gian.

Ví dụ 3.11. Tính thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua phía ngoài mặt xung quanh của khối nón tròn xoay có trục là Oz, đáy thuộc mặt phẳng Oxy, bán kính $R = 2$, độ cao $h = 1$.

Giải



Ta có $S = S + S_d - S_d = S_1 - S_d$.

Do đó, thông lượng của trường vectơ $\overrightarrow{F}$ là

$$W = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Vì S_1 là mặt kín và tích phân lấy theo mặt ngoài nên

$$I_1 = \iint_{S_1}\left(xdydz + ydxdz + zdxdy\right) = 3\iiint_V dV = 3.\frac{\pi R^2 h}{3} = 4\pi$$

và $I_2 = \iint_{S_d:\,z=0}\left(xdydz + ydxdz + zdxdy\right) = 0$

Vậy $W = I_1 - I_2 = 4\pi$

❖ **Độ phân kỳ**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Khi đó đại lượng $\boxed{div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$ được gọi là độ phân kỳ hay divergence của trường vectơ $\vec{F}$.

❖ **Ý nghĩa và mối quan hệ giữa thông lượng và độ phân kỳ**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, trong đó P,Q,R là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền kín V có biên là mặt S. Khi đó dạng công thức ***Gauss - Ostrogratski*** có dạng

$$\iiint_V div\vec{F}dV = \iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$$

Như vậy thông lượng của trường vectơ $\vec{F}$ ***qua mặt kín*** S ***bằng tổng độ phân kỳ của trường vector đó trong miền*** V ***giới hạn bởi mặt*** S.

Giả sử $div\vec{F}(M)$ liên tục và $div\vec{F}(M) > 0$ trong miền V thì ta thấy thông lượng W qua mặt S từ trong ra ngoài là một số dương. Khi ấy trong V có điểm nguồn. Ngược lại, nếu $div\vec{F}(M) < 0$ thì trong V có điểm rò.

Nếu xét tại điểm $M_0 \in V$, có lân cận là quả cầu B_0 có mặt cầu biên là S_0 thì

$$\iiint_{B_0} div\vec{F}dV = \iint_{S_0} \vec{F}.\vec{n}dS = div\vec{F}(M_0)\iiint_{B_0} dV$$

$$\Rightarrow div\vec{F}(M_0) = \frac{\iint_{S_0} \vec{F}.\vec{n}dS}{V_{B_0}} \quad \rightarrow \quad \text{mat do thong luong cua truong F tai } M_0$$

3.3.3. Hoàn lưu và vector xoáy

❖ **Hoàn lưu**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ xác định trong miền V và L là một đường cong kín nằm trong V.

Khi đó đại lượng

$$\boxed{C = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz}$$

được gọi là hoàn lưu của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo đường cong kín L.

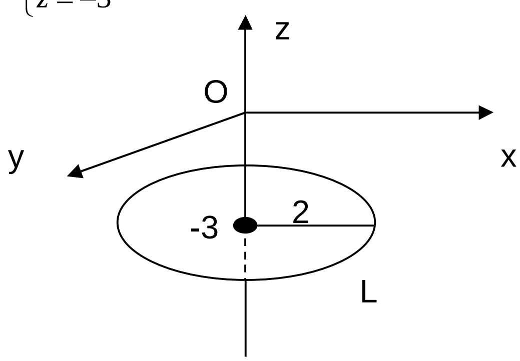
Nếu $d\vec{r}$ là vectơ nằm theo hướng tiếp tuyến dương của đường cong L có các thành phần dx, dy, dz thì hoàn lưu có thể viết dưới dạng $C = \oint_L \vec{F} d\vec{r}$

Nếu $\vec{F}$ là trường lực thì hoàn lưu của $\vec{F}$ dọc theo đường cong L chính là công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ tác động lên chất điểm dọc theo hướng của L.

Ví dụ 3.12. Tính hoàn lưu của trường vectơ $\vec{F}(x,y,z) = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$

dọc theo hướng dương của đường tròn $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = -3 \end{cases}$

Giải



Ta có $C = \oint_L x^2y^3dx + dy + zdz$

Phương trình tham số của đường tròn L là $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = -3 \end{cases}$

Suy ra $C = \int_0^{2\pi} \left[32\cos^2 t.\sin^3 t.(-2\sin t) + 2\cos t\right] dt$

$$C = \int_0^{2\pi} \left[-64\cos^2 t.\sin^4 t + 2\cos t\right] dt = -8\pi$$

❖ **Vector xoáy**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Khi đó

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}$$

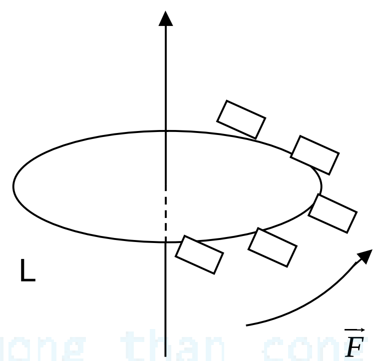
được gọi là vectơ xoáy hay rôta của trường vectơ $\vec{F}$.

❖ **Ý nghĩa và mối quan hệ của hoàn lưu và vector xoáy**

Cho trường vectơ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, trong đó $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên mặt S có biên là L. Khi đó công thức ***Stokes*** có dạng

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right).\vec{n}dS=\oint_L \vec{F}d\vec{r}$$

Như vậy, ta thấy rằng hoàn lưu của trường vectơ $\vec{F}$ dọc theo đường cong kín L bằng thông lượng của vector xoáy qua mặt cong S có biên là đường L.



Trong miền V ta đặt một vòng tròn nhỏ L có gắn các cánh mỏng, nếu $\vec{F}$ là trường tốc độ của dòng chảy thì dưới sự tác động của $\vec{F}$ các cánh mỏng sẽ xoay theo đường cong L quanh trục. Hiệu quả xoay (công sinh ra bởi lực $\vec{F}$) tạo ra "xoáy" cho trường $\vec{F}$.

Nói một cách khác, hoàn lưu đặc trưng cho tính xoáy của trường vector và vector xoáy $\overrightarrow{rot}\ \vec{F}$ đặc trưng cho tính xoáy tại một điểm. Cụ thể nếu $\overrightarrow{rot}\ \vec{F}(M)\neq 0$ thì M là điểm xoáy, ngược lại nếu $\overrightarrow{rot}\ \vec{F}(M)\neq 0$ thì M không là điểm xoáy.