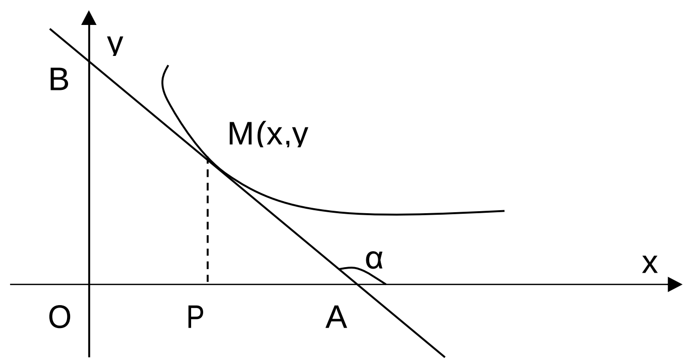
Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. Một số khái niệm cơ bản về phương trình vi phân

Xét một bài toán dẫn đến phương trình vi phân sau : Tìm phương trình đường cong sao cho mọi đoạn của tiếp tuyến chắn trên 2 trục toạ độ đều bị tiếp điểm chia thành 2 phần bằng nhau



Gọi $M(x,y)$ là điểm tuỳ ý trên đường cong. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $y'(x) = tg\alpha = -\dfrac{MP}{AP}$

Vì $MA = MB \Rightarrow PA = PO = x; \quad MP = y \Rightarrow y' = -\dfrac{y}{x}$ được gọi là phương trình vi phân.

Dễ thấy hàm $y = \dfrac{C}{x}$ với C là hằng số bất kỳ đều thoả mãn phương trình và nó được gọi là nghiệm của phương trình vi phân trên. Vậy chúng ta có một họ đường cong $y = \dfrac{C}{x}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Nếu thêm điều kiện đường cong phải đi qua điểm $(2,3)$ nghĩa là $y(2) = 3$ thì $C = 6$ và ta có được một đường cong cần tìm là $y = \dfrac{6}{x}$

Phương trình vi phân thường (gọi tắt là phương trình vi phân PTVP) là phương trình biểu thị mối liên hệ giữa một biến độc lập x, hàm cần tìm y và các đạo hàm của nó.

Nếu hàm phải tìm y có nhiều biến số và phương trình chứa các biến độc lập này, hàm y và các đạo hàm riêng của nó thì gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng (gọi tắt là phương trình đạo hàm riêng PTĐHR). Trong chương 2 này chúng ta chỉ khảo sát những PTVP thường.

Cấp của PTVP là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình đó.

Ví dụ 4.1 $xy'' + y = 3$ là PTVP cấp 2

$y' = \dfrac{y}{x}$ là PTVP cấp 1

$(x+y)dy - 2ydx = 0$ là PTVP cấp 1

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$ là PTĐHR cấp 1

Nghiệm của PTVP là tất cả các hàm số $y = y(x)$ sao cho khi thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức.

Thông thường PTVP có vô số nghiệm gọi là họ nghiệm, nghĩa là biểu thức nghiệm có chứa một hoặc nhiều tham số (tuỳ vào bậc của phương trình).

4.2. Phương trình vi phân cấp 1

4.2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là PTVP có dạng $F(x,y,y') = 0$ hoặc $y' = f(x,y)$, trong đó x là biến độc lập, y là hàm cần tìm theo biến x.

Nghiệm tổng quát (NTQ) của PTVP cấp 1 là họ đường $y = \varphi(x,C)$ với C là hằng số bất kỳ thoả mãn phương trình. Nếu $C = C_0$ thì đường cong $y = \varphi(x,C_0)$ gọi là nghiệm riêng của phương trình.

Đôi khi chúng ta không có được nghiệm tường minh $y = \varphi(x,C)$ mà được một hệ thức dạng $\phi(x,y,C) = 0$ thoả PTVP thì hệ thức đó gọi là tích phân tổng quát của PTVP. Nếu $C = C_0$ ta có tích phân riêng $\phi(x,y,C_0) = 0$

Về mặt hình học, đồ thị của nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát đều cho ta một họ đường cong gọi là các đường cong tích phân của PTVP.

Tuy nhiên, không phải bất kỳ nghiệm riêng nào của phương trình cũng được suy ra từ họ nghiệm tổng quát bằng cách thay hằng số C những giá trị cụ thể. Những nghiệm đó được gọi là nghiệm kỳ dị.

Ví dụ 4.2 Xét phương trình $y'^2 - xy' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = Cx - C^2$ là một họ đường thẳng. Tuy nhiên parabol $y = \frac{x^2}{4}$ cũng là nghiệm của phương trình và được gọi là nghiệm kỳ dị.

4.2.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm – Bài toán Cauchy

Xét bài toán Cauchy với điều kiện đầu $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền mở $D \subset R^2$ và có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ bị chặn trong D thì bài toán Cauchy trên có nghiệm duy nhất xác định trong lân cận của x_0

4.2.3. Một số phương trình vi phân cấp 1

❖ **Phương trình tách biến**

- **Dạng 1:** $f(x)dx = g(y)dy$

$$f(x)dx = g(y)dy \Rightarrow \int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Ví dụ 4.3 Giải phương trình $y' = xy(y+2)$ (1)

<u>Giải:</u>

Nếu $y(y+2) \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{dy}{y(y+2)} = xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int xdx \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C$ là nghiệm tổng quát của (1)

Ngoài ra $y = 0$ và $y = -2$ cũng là 2 nghiệm riêng của (1).

Ví dụ 4.4 Giải bài toán Cauchy sau $\begin{cases} y' + 5x^4y^2 = 0 & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Từ (2) ta thấy $y \neq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -5x^4dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int 5x^4dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -x^5 + C \text{ hay } y = \frac{1}{x^5 - C}$$

Từ (2) $\Rightarrow C = -1$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là $y = \dfrac{1}{x^5+1}$

- **Dạng 2:** $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \text{ với } P(x) \neq 0;\ N(y) \neq 0$$

Ví dụ 4.5 Giải phương trình $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0 \quad (1)$

Giải:

Nếu $x \neq 1;\ y \neq -1$ thì $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^3-1}dx + \dfrac{y-1}{y+1}dy = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = -\int \frac{y-1}{y+1}dy$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3-1}d(x^3-1) = -\int\left(1 - \frac{2}{y+1}\right)dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| = 2\ln\left|y+1\right| - y + C \text{ là NTQ của (1)}$$

Ngoài ra $x = 1$ và $y = -1$ cũng là 2 nghiệm riêng của (1)

- **Dạng 3:** $y' = f(ax+by+c)$

Đặt $u = ax + by + c \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{du}{dx} - a\right)$

Thay vào phương trình $\dfrac{du}{dx} = a + bf(u)$

Ví dụ 4.6 Giải phương trình $y' = \cos(x - y - 1) \quad (1)$

Giải:

Đặt $u = x - y - 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{du}{dx}$

Thay vào (1) ta có $\dfrac{du}{dx} = 1 - \cos u \quad (2)$

Nếu $\cos u \neq -1$ thì $\dfrac{du}{1-\cos u} = dx \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{1-\cos u} = \int dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin^2\frac{u}{2}} = \int dx \Leftrightarrow -\cot g\frac{u}{2} = x + C$$

Hay $x + \cot g\dfrac{x-y-1}{2} + C = 0$ là NTQ của (1)

Ngoài ra nếu $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \Leftrightarrow y = x - 1 - k2\pi$ là một nghiệm riêng của (1)

❖ **Phương trình đẳng cấp**

- **Dạng 1:** $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x$

Thay vào phương trình $u + u'x = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u$ (tách biến)

Ví dụ 4.7 Giải phương trình $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ (1)

Giải:

Từ (1) ta có $y' = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}, \quad x, y \neq 0$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$. Thay vào (1): $u + u'x = \dfrac{1}{u} - 1 + u \Leftrightarrow u'x = \dfrac{1}{u} - 1$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{u} \quad (2)$$

Nếu $u \neq 1$ thì $(2) \Leftrightarrow \dfrac{u}{1-u}du = \dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow \displaystyle\int\left(\frac{1}{1-u} - 1\right)du = \int\frac{dx}{x}$

$$\Leftrightarrow -\ln|1-u| - u = \ln|x| + C$$

Hay $\ln|x| + \ln\left|1 - \dfrac{y}{x}\right| + \dfrac{y}{x} + C = 0$ là NTQ của (1)

Ngoài ra nếu $u = 1 \Leftrightarrow y = x, (x \neq 0)$ cũng là một nghiệm riêng của (1)

- **Dạng 2:** $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

➢ Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, đặt $\begin{cases} x = \xi + x_0 \\ y = \eta + y_0 \end{cases}$ trong đó (x_0, y_0) là nghiệm của $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $dx = d\xi; dy = d\eta$. Thay vào phương trình ta có $\dfrac{d\eta}{d\xi} = g\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)$ (dạng 1)

➢ Nếu $\Delta = 0$ thì $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. Đặt $u = a_1x + b_1y \Rightarrow u' = a_1 + b_1y' \Rightarrow \dfrac{u}{\lambda} = a_2x + b_2y$

Thay vào phương trình ta được phương trình tách biến

Ví dụ 4.8 Giải phương trình $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$ (1)

Giải:

Giải hệ $\begin{cases} 2x-4y+6=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=1; \quad y_0=2$

Đặt $\begin{cases} x=\xi+1 \\ y=\eta+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=d\xi \\ dy=d\eta \end{cases}$

Thay vào (1): $[2(\xi+1)-4(\eta+2)+6]d\xi+(\xi+1+\eta+2-3)d\eta=0$

$$\Leftrightarrow (2\xi-4\eta)d\xi+(\xi+\eta)d\eta=0 \quad (2)$$

Nếu $\xi+\eta\neq 0$ thì $(2)\Leftrightarrow \dfrac{d\eta}{d\xi}=-\dfrac{2\xi-4\eta}{\xi+\eta}=-\dfrac{2-4\dfrac{\eta}{\xi}}{1+\dfrac{\eta}{\xi}}$

Đặt $u=\dfrac{\eta}{\xi}\Rightarrow \dfrac{d\eta}{d\xi}=u+u'\xi=-\dfrac{2-4u}{1+u}\Leftrightarrow u'\xi=-u-\dfrac{2-4u}{1+u}=\dfrac{-u^2+3u-2}{1+u}$

Nếu $u\neq 1; u\neq 2$ ta có $\dfrac{u+1}{(u-1)(u-2)}du=-\dfrac{d\xi}{\xi}\Leftrightarrow \displaystyle\int\left(\frac{-2}{u-1}+\frac{3}{u-2}\right)du=-\int\frac{d\xi}{\xi}$

$$\Leftrightarrow -2\ln|u-1|+3\ln|u-2|=-\ln|\xi|+C$$

$$\Leftrightarrow -2\ln\left|\frac{y-2}{x-1}-1\right|+3\ln\left|\frac{y-2}{x-1}-2\right|=-\ln|x-1|+C_1$$

$$\Leftrightarrow -2\ln\left|\frac{y-x-1}{x-1}\right|+3\ln\left|\frac{y-2x}{x-1}\right|=-\ln|x-1|+C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{(y-2x)^3}{(x-1)(y-x-1)^2}\right|+\ln|x-1|=\ln C_2$$

$\Leftrightarrow (y-2x)^3=C(y-x-1)^2$, với $x\neq 1; y\neq x+1; y\neq -x+3; y\neq 2x$ là NTQ của (1)

Ngoài ra $y=x+1$ và $y=2x$ cũng là 2 nghiệm riêng của (1).

❖ **Phương trình vi phân toàn phần** $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$

Nếu $P(x,y)=f(x);\ Q(x,y)=g(y)$ thì phương trình trở thành dạng tách biến

Nếu $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ thì phương trình trở thành dạng vi phân toàn phần.

Cách giải : Tìm hàm thế vị $u(x,y)$ thoả mãn $\begin{cases} u'_x = P(x,y) \\ u'_y = Q(x,y) \end{cases}$.

Khi đó $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$ là NTQ của phương trình

Ví dụ 4.9 Giải phương trình $(x+y)dx + (x+y^2)dy = 0 \quad (1)$

Giải:

Ta có $\begin{cases} P(x,y) = x+y \\ Q(x,y) = x+y^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow (1)$ là phương trình vi phân toàn phần

Tìm hàm $u(x,y)$ sao cho $\begin{cases} u'_x = x+y & (2) \\ u'_y = x+y^2 & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có $u(x,y) = \int (x+y)dx = \dfrac{x^2}{2} + xy + g(y) \quad \Rightarrow u'_y = x + g'(y)$

Từ (3) ta có $g'(y) = y^2 \Rightarrow g(y) = \int y^2 dy = \dfrac{y^3}{3}$

$\Rightarrow u(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + \dfrac{y^3}{3}$

Vậy NTQ của (1) là $\dfrac{x^2}{2} + xy + \dfrac{y^3}{3} = C$

- **Thừa số tích phân**: Trong một số trường hợp phương trình vi phân dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ không phải là PTVP toàn phần. Nhưng tồn tại hàm $\mu(x,y)$ sao cho $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ là PTVP toàn phần. Khi đó ta gọi hàm $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của PTVP ban đầu.

Ví dụ 4.10 Chứng minh rằng x^3 là thừa số tích phân của phương trình

$$2\sin y^2 dx + xy\cos y^2 dy = 0$$

Giải:

Thật vậy, ta có $\begin{cases} P(x,y) = 2x^3 \sin y^2 \\ Q(x,y) = x^4 y\cos y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 y\cos y^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 y\cos y^2 \end{cases} \Rightarrow$ đfcm

- **Cách tìm thừa số tích phân:** Vì $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ là PTVP toàn phần nên $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \Leftrightarrow \mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x$.

Tuy nhiên tìm $\mu(x,y)$ từ điều kiện trên khá phức tạp. Do đó người ta thử tìm thừa số tích phân chỉ phụ thuộc một biến số.

- Nếu $\mu(x,y)=\mu(x)$ thì $\mu P'_y=\mu'_x Q+\mu Q'_x \Rightarrow \dfrac{\mu'_x}{\mu}=\dfrac{1}{Q}\left[P'_y-Q'_x\right]:=R(x)$

  $\boxed{\Rightarrow \mu(x)=e^{\int \frac{1}{Q}\left(P'_y-Q'_x\right)dx}}$ nếu $\dfrac{1}{Q}\left(P'_y-Q'_x\right)$ chỉ phụ thuộc x

- Nếu $\mu(x,y)=\mu(y)$ thì $\mu'_y P+\mu P'_y=\mu Q'_x \Rightarrow \dfrac{\mu'_y}{\mu}=\dfrac{1}{P}\left[Q'_x-P'_y\right]:=R(y)$

  $\boxed{\Rightarrow \mu(y)=e^{\int \frac{1}{P}\left(Q'_x-P'_y\right)dy}}$ nếu $\dfrac{1}{P}\left(Q'_x-P'_y\right)$ chỉ phụ thuộc y

Ví dụ 4.11 Giải phương trình $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$ (1)

<u>Giải:</u>

Ta có $P(x,y)=1-x^2y \Rightarrow P'_y=-x^2$

$Q(x,y)=x^2(y-x) \Rightarrow Q'_x=2xy-3x^2$

Vì $\dfrac{1}{Q}(P'_y-Q'_x)=\dfrac{1}{x^2(y-x)}(2x^2-2xy)=-\dfrac{2}{x}$ nên ta có thừa số tích phân là

$$\mu(x)=e^{-\int \frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}$$

Tìm hàm $u(x,y)$ sao cho $\begin{cases} u'_x=\dfrac{1-x^2y}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}-y & (2) \\ u'_y=\dfrac{x^2(y-x)}{x^2}=y-x & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có $u(x,y)=\int\left(\dfrac{1}{x^2}-y\right)dx=-\dfrac{1}{x}-xy+g(y) \Rightarrow u'_y=-x+g'(y)$

Thay vào (3) ta có $g'(y)=y \Rightarrow g(y)=\dfrac{y^2}{2}$

$$\Rightarrow u(x,y)=-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}$$

Vậy NTQ của (1) là $-\dfrac{1}{x}-xy+\dfrac{y^2}{2}=C,\quad (x\neq 0)$

Ngoài ra $x=0$ cũng là một nghiệm riêng của (1).

❖ **Phương trình tuyến tính** $\boxed{y'+a(x)y=b(x) \quad (*)}$, trong đó $a(x); b(x)$ là các hàm liên tục.

Nếu $b(x)=0$ thì (*) là phương trình tuyến tính thuần nhất, ngược lại nếu $b(x)\neq 0$ thì (*) là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

<u>Cách giải:</u>

➢ ***<u>Phương pháp thừa số tích phân</u>***

Từ (*) ta có $[a(x)y-b(x)]dx-dy=0$

Ta có $P(x,y)=a(x)y-b(x)\Rightarrow P'_y=a(x)$; $Q(x,y)=-1\Rightarrow Q'_x=0$

Vì $\frac{1}{Q}(P'_y-Q'_x)=a(x)$ nên (*) có thừa số tích phân là $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$

Nhân 2 vế của (*) với $\mu(x)=e^{\int a(x)dx}$ ta được

$$e^{\int a(x)dx}y'+e^{\int a(x)dx}a(x)y=e^{\int a(x)dx}b(x)$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{\int a(x)dx}y\right)'=b(x)e^{\int a(x)dx}\Leftrightarrow e^{\int a(x)dx}y=\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+C$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+C\right]$$

Chú ý:

- Nếu $b(x)=0$ thì $y=Ce^{-\int a(x)dx}$ là NTQ của phương trình tuyến tính thuần nhất
- Từ $y=e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}+C\right]=Ce^{-\int a(x)dx}+e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$ ta thấy khi C = 0 thì $\overline{y}=e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất
- Như vậy NTQ của phương trình không thuần nhất bằng tổng NTQ của phương trình thuần nhất và một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. và người ta có thể chọn nghiệm riêng bất kỳ.

➢ ***<u>Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange</u>***

NTQ của phương trình thuần nhất $Y=Ce^{-\int a(x)dx}$. Suy ra NTQ của phương trình không thuần nhất có dạng $y=C(x)e^{-\int a(x)dx}$

Ta có $y' = C'(x)e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$. Thay vào (*) ta có

$$C'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x) \Rightarrow C'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C$$

Vậy NTQ của phương trình tuyến tính cấp 1 là

$$\boxed{y = e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C\right]}$$

Ví dụ 4.12 Giải phương trình $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (1)

Giải:

Ta có $a(x) = \cos x \Rightarrow \int a(x)dx = \int \cos x dx = \sin x$

$$b(x) = e^{-\sin x} \Rightarrow \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx = \int e^{-\sin x}e^{\sin x}dx = \int dx = x$$

Vậy NTQ của (1) là $y = e^{-\sin x}(C + x)$

Ví dụ 4.13 Giải phương trình $y' = \dfrac{y^2}{2xy+3}$ (1)

Giải:

Nếu $y \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2xy+3}{y^2} = \dfrac{2x}{y} + \dfrac{3}{y^2} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = \dfrac{3}{y^2}$ là phương trình tuyến tính với x là hàm theo biến y

Ta có $a(y) = -\dfrac{2}{y} \Rightarrow \int a(y)dy = -\int \dfrac{2}{y}dy = -2\ln|y|$

$$b(y) = \frac{3}{y^2} \Rightarrow \int b(y)e^{\int a(y)dy}dy = \int \frac{3}{y^2}e^{-2\ln|y|}dy = \int \frac{3}{y^4}dy = -\frac{1}{y^3}$$

Vậy NTQ của (1) là $x = e^{2\ln|y|}\left(C - \dfrac{1}{y^3}\right) = y^2\left(C - \dfrac{1}{y^3}\right) = Cy^2 - \dfrac{1}{y}$

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm riêng của (1).

❖ **Phương trình Bernoulli** $\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \quad (*)}$

Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (*) trở thành phương trình vi phân tuyến tính

Nếu $\alpha \neq 0,1$, giả sử $y \neq 0$ chia 2 vế của (*) cho y^{α} ta được

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow \dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{z'}{1-\alpha}$

Thay vào (*) ta có $z'+(1-\alpha)a(x)z=(1-\alpha)b(x)$ là phương trình tuyến tính

Để ý $y=0$ cũng là nghiệm riêng của (*)

Ví dụ 4.14 Giải phương trình $y'=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{1}{2y}$ (1)

<u>Giải:</u>

(1) $\Leftrightarrow y'-\dfrac{1}{2x}.y=-\dfrac{1}{2}.y^{-1}\Leftrightarrow yy'-\dfrac{1}{2x}y^2=-\dfrac{1}{2}$ (2)

Đặt $z=y^2\Rightarrow z'=2yy'$. Thay vào (2) $z'-\dfrac{1}{x}z=-1$ (3)

$\Rightarrow$ NTQ của (3) là

$$z=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}\left(C+\int-e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx\right)=|x|\left(C-\int\frac{1}{x}dx\right)=|x|\left(C-\ln|x|\right)=|x|\ln\left|\frac{C'}{x}\right|$$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y^2=|x|\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$

Ví dụ 4.15 Giải phương trình $y'x^3\sin y+2y=xy'$ (1)

<u>Giải:</u>

Từ (1) ta có $y'=-\dfrac{2y}{x^3\sin y-x}$, $\quad x^3\sin y-x\neq 0$

Nếu $y\neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x'=-\dfrac{x^3\sin y-x}{2y}=\dfrac{1}{2y}.x-\dfrac{\sin y}{2y}.x^3\Leftrightarrow x'-\dfrac{1}{2y}x=-\dfrac{\sin y}{2y}x^3$ (2)

Đặt $z=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow z'=-\dfrac{2}{x^3}x'$ Thay vào (2) ta có $z'+\dfrac{1}{y}z=\dfrac{\sin y}{y}$ (3)

$\Rightarrow$ NTQ của (3) là $z=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(C+\int\dfrac{\sin y}{y}e^{\int\frac{1}{y}dy}dy\right)=\dfrac{1}{|y|}\left(C+\int\sin y\,dy\right)=\dfrac{1}{|y|}(C-\cos y)$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{C-\cos y}{|y|}$ hay $|y|=(C-\cos y)x^2$

Ngoài ra $y=0$ cũng là một nghiệm riêng của (1)

4.3. Phương trình vi phân cấp 2

4.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 có dạng $F(x,y,y',y'')=0$ hoặc $y''=f(x,y,y')$, trong đó x là biến độc lập, y là hàm theo biến x.

Nghiệm tổng quát phụ thuộc vào 2 tham số có dạng $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ hoặc tích phân tổng quát $\psi(x,y,C_1,C_2)=0$.

Nếu cho C_1,C_2 những giá trị cụ thể ta có nghiệm riêng của phương trình. Nghiệm riêng tìm được nếu biết 2 điều kiện nào đó.

Ví dụ 4.16 Giải bài toán $\begin{cases} y''=2x \\ y(0)=0 \\ y(1)=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Giải:

Dễ thấy NTQ của bài toán là $y=\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$

Thay điều kiện đầu ta có $\begin{cases} C_2=0 \\ \dfrac{1}{3}+C_1+C_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của bài toán $y=\dfrac{x^3}{3}-x$

4.3.2. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm – Bài toán Cauchy

Xét bài toán Cauchy với điều kiện đầu như sau $\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0\end{cases}$

Nếu hàm số $f(x,y,y')$ liên tục trên miền mở $D\subset R^3$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y};\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trên D thì bài toán Cauchy có duy nhất nghiệm.

4.3.3. Một số phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được.

❖ **Phương trình không chứa x:** $\boxed{F(y,y',y'')=0}$

Đặt $y'=z(y)$. Đạo hàm 2 vế theo x ta có $z'_y.y'=y''=z'_y.z$

Thay vào phương trình ta được PTVP cấp 1 hàm z theo biến y dạng $F(y,z,z'z)=0$

Ví dụ 4.17 Giải phương trình $y'.y''-3y''^2=0$ (1)

Giải:

Đặt $z(y)=y'\Rightarrow y''=z'_y.y'=z'_y.z$

Thay vào (1): $z'z^2 - 3z'^2 z^2 = 0 \Leftrightarrow z'z^2(1-3z') = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z'=0 \\ z'=\dfrac{1}{3} \\ z=0 \end{array}\right.$

$z'=0 \Rightarrow z = y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$

$z' = \dfrac{1}{3} \Rightarrow z = y' = \dfrac{1}{3}y + C_3 \Rightarrow y = e^{-\int -\frac{1}{3}dx}\left(C_4 + \int C_3 e^{\int -\frac{1}{3}dx}dx\right) = C_4 e^{\frac{x}{3}} - 3C_3$

$z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C_5$

❖ **Phương trình không chứa y:** $\boxed{F(x, y', y'') = 0}$

Đặt $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'$. Thay vào phương trình ta được PTVP cấp 1 hàm z theo biến x dạng $F(x, z, z') = 0$

Ví dụ 4.18 Giải phương trình $\begin{cases} x^4 y'' + 2x^3 y' = 1 & (1) \\ y(1) = y'(1) = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Đặt $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'$. Thay vào (1): $x^4 z' + 2x^3 z = 1 \Leftrightarrow z' + \dfrac{2}{x}z = \dfrac{1}{x^4}$

$$\Rightarrow z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(C + \int \frac{1}{x^4} e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right) = \frac{1}{x^2}\left(C + \int \frac{1}{x^2}dx\right) = \frac{1}{x^2}\left(C - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y = \int\left(\frac{C}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = -\frac{C_1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C_2$$

Thay điều kiện (2) ta có $\begin{cases} -C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{2} \\ C_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của bài toán là $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{3}{2x} + \dfrac{3}{2}$

❖ **Phương trình không chứa y, y':** $\boxed{F(x, y'') = 0}$

Ví dụ 4.19 Giải phương trình $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

<u>Giải:</u>

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow y' = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C_1$$

$$\Rightarrow y = \int (tgx + C_1)dx = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$$

4.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

4.4.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

PTVP tuyến tính cấp hai thuần nhất là phương trình vi phân có dạng $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (*)}$, trong đó $a(x); b(x)$ là những hàm liên tục cho trước.

- **Định lý 1**: Nếu $y_1; y_2$ là 2 nghiệm của (*) thì $y_1 + y_2; cy_1$ (c là hằng số tuỳ ý khác 0) cũng là nghiệm của (*).

Chứng minh:

Vì $y_1; y_2$ là 2 nghiệm của (*) nên

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0$$

$$\Rightarrow (y_1 + y_2)'' + a(x)(y_1 + y_2)' + b(x)(y_1 + y_2) = 0 \text{ và } (cy_1)'' + a(x)(cy_1)' + b(x)cy_1 = 0$$

$\Rightarrow$ đfcm

- **Định lý 2**: Nếu $y_1; y_2$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (*), nghĩa là $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$ thì NTQ của (*) có dạng $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Nhận xét: PTVP tuyến tính thuần nhất luôn có hệ nghiệm cơ bản (gồm các nghiệm riêng đltt). Với PTVP tuyến tính thuần nhất cấp 2 sẽ luôn có 2 nghiệm riêng đltt.

- **Định lý 3**: Nếu y_1 là một nghiệm riêng của (*) thì $y_2 = y_1 \int \dfrac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx$ là nghiệm riêng của (*) và độc lập tuyến tính với y_1

Chứng minh

Gọi y_2 là một nghiệm riêng bất kỳ của (*). Khi đó ta có

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0 \qquad (1)$$

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0 \qquad (2)$$

Nhân (1) với y_2 và nhân (2) với y_1 rồi lấy (1)-(2) ta có

$$y_1'' y_2 - y_1 y_2'' + a(x)\left[y_1' y_2 - y_1 y_2'\right] = 0 \qquad (3)$$

Đặt $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \Rightarrow w' = -y_1'' y_2 + y_1 y_2''$

Thay vào (3) ta có $w' + a(x)w = 0 \Rightarrow w = Ce^{-\int a(x)dx}$

$$\Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = Ce^{-\int a(x)dx} \Rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx} \Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx \text{ (chọn } C = 1)$$

Ví dụ 4.20 Giải phương trình $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (1) biết $y_1 = x$ là 1 nghiệm riêng.

<u>Giải:</u>

Từ (1) ta có $y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2}{x^2+1} y = 0$ (2)

Nghiệm riêng thứ 2 của (2) là

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2} dx = x \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Vậy NTQ của (1) là $y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1)$

Ví dụ 4.21 Giải phương trình $(x^2-1)y'' + 2xy' = 0$ (1)

<u>Giải:</u>

Từ (1) ta có $y'' + \frac{2x}{x^2-1} y' = 0$ (2)

Nhận thấy $y_1 = 1$ là một nghiệm riêng của (1) nên nghiệm riêng thứ 2 là

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx = \int e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx} dx = \int \left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Vậy NTQ của (1) là $y = C_1 + C_2 \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

4.4.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất là phương trình có dạng $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (*)}$

PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng với (*) là $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (**)

- **Định lý 4**: Nếu Y là NTQ của (**) và $\overline{y}$ là một nghiệm riêng của (*) thì NTQ của (*) có dạng $y = Y + \overline{y}$
- **Định lý 5:** (Nguyên lý chồng nghiệm): Cho 2 PTVP sau

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_2(x)$$

Nếu $y_1; y_2$ lần lượt là 2 nghiệm riêng của 2 PTVP trên thì $y_1 + y_2$ sẽ là nghiệm riêng của PTVP $y'' + a(x)y' + b(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

Ví dụ 4.22 Giải phương trình $y'' + y = 3x \quad (1)$

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0 \quad (2)$

Nhận thấy $y_1 = \sin x$ là một nghiệm riêng của (2) nên nghiệm riêng thứ 2 là

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx = \sin x \int \frac{e^{-\int 0 dx}}{\sin^2 x} dx = \sin x.(-\cot gx) = -\cos x$$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Nhận thấy $\overline{y} = 3x$ là một nghiệm riêng của (1) nên NTQ của (1) là

$$y = Y + \overline{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 3x$$

Ví dụ 4.23 Giải phương trình $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x \quad (1)$ biết 2 nghiệm riêng là $y_1 = x; \quad y_2 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + \dfrac{4x}{x^2 - 1} y' + \dfrac{2}{x^2 - 1} = 0 \quad (2)$

Theo nguyên lý chồng nghiệm thì $y_0 = y_2 - y_1 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} - x = \dfrac{1}{x + 1}$ là một nghiệm riêng của (2). Do đó nghiệm riêng thứ 2 của (2) là

$$y_2 = \frac{1}{x+1} \int \frac{e^{-\int \frac{4x}{x^2-1}dx}}{\frac{1}{(x+1)^2}} dx = \frac{1}{x+1} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y = C_1 \dfrac{1}{x+1} + C_2 \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y = Y + y_1 = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{x^2-1} + x$

- ***Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange***

Cho PTVP tuyến tính không thuần nhất dạng $y''+a(x)y'+b(x)y = f(x)$ (*) và PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng là $y''+a(x)y'+b(x)y = 0$ (**)

Nếu (**) có NTQ là $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ thì NTQ của (*) có dạng $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, trong đó $C_1(x);C_2(x)$ thoả mãn điều kiện $\begin{cases} C_1^{'}(x)y_1 + C_2^{'}y_2 = 0 \\ C_1^{'}(x)y_1^{'} + C_2^{'}y_2^{'} = f(x) \end{cases}$

Chứng minh:

Ta có NTQ của (1) $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

$\Rightarrow y' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1^{'} + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2^{'} = C_1(x)y_1^{'} + C_2(x)y_2^{'}$ (1)

$\Rightarrow y'' = C_1^{'}(x)y_1^{'} + C_1(x)y_1^{''} + C_2^{'}(x)y_2^{'} + C_2(x)y_2^{''} = C_1(x)y_1^{''} + C_2(x)y_2^{''} + f(x)$ (2)

Thay vào (*) suy ra đfcm

Ví dụ 4.24 Giải phương trình $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$ (1)

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ (2)

Dễ thấy $y_1 = 1$ là một nghiệm riêng của (2). Do đó nghiệm riêng thứ 2 là

$$y_2 = \int e^{-\int -\frac{1}{x}dx}dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$\Rightarrow$NTQ của (2) là $Y = C_1x^2 + C_2$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) có dạng $y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$ thoả $\begin{cases} x^2C_1'(x) + C_2'(x) = 0 \\ 2xC_1'(x) = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1^{'}(x) = \dfrac{1}{2} \\ C_2^{'}(x) = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{2}x + C_1 \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{6} + C_2 \end{cases}$$

Vậy NTQ của (1) là $y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$

Ví dụ 4.25 Giải phương trình $xy''+2y'+xy=x$ (1) biết phương trình thuần nhất có một nghiệm riêng là $y_1=\dfrac{\cos x}{x}$

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ (2)

Nghiệm riêng thứ 2 của (2) là

$$y_2=\frac{\cos x}{x}\int\frac{x^2e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{\cos^2 x}dx=\frac{\cos x}{x}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{\cos x}{x}tgx=\frac{\sin x}{x}$$

Vậy NTQ của (2) là $Y=C_1\dfrac{\cos x}{x}+C_2\dfrac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) có dạng $y=C_1(x)\dfrac{\cos x}{x}+C_2(x)\dfrac{\sin x}{x}$ thoả mãn hệ sau

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\cos x}{x}+C_2'(x)\dfrac{\sin x}{x}=0\\ C_1'(x)\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}+C_2'(x)\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=1\end{cases}$$

$\Delta=\dfrac{1}{x^2};\quad \Delta_1=-\dfrac{\sin x}{x};\quad \Delta_2=\dfrac{\cos x}{x}$

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-x\sin x\\ C_2'(x)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=x\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1(x)=x\cos x-\sin x+C_1\\ C_2(x)=x\sin x+\cos x+C_2\end{cases}$$

Vậy NTQ của (1) là $y=\left(x\cos x-\sin x+C_1\right)\dfrac{\cos x}{x}+\left(x\sin x+\cos x+C_2\right)\dfrac{\sin x}{x}$

$$y=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}+1$$

4.4.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất là phương trình có dạng $y''+ay'+by=f(x)$, trong đó a,b là các hằng số thực.

Dạng thuần nhất tương ứng là $y''+ay'+by=0$

❖ **Giải phương trình dạng thuần nhất** $y''+ay'+by=0$ (*)

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $k^2+ak+b=0$ (**)

Bước 2: Tìm nghiệm của (*) dựa trên các nghiệm của phương trình đặc trưng như sau

Nghiệm của (**)	**Hệ nghiệm cơ bản của (*)**	**NTQ của (*)**
k là nghiệm kép	$y_1 = e^{kx};\ y_2 = xe^{kx}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
$k_1; k_2$ là 2 nghiệm thực phân biệt	$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$k = \alpha \pm i\beta$ là cặp nghiệm phức liên hợp	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Ví dụ 4.26 Giải phương trình $y'' - y = 0$ (1)

Giải:

Phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Ví dụ 4.27 Giải phương trình $y'' + 2y' + 5y = 0$ (1)

Giải:

Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$

Ví dụ 4.28 Giải phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ (1)

Giải:

Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y = \left(C_1 x + C_2\right)e^{x}$

❖ **Giải phương trình dạng không thuần nhất** $y'' + ay' + by = f(x)$ (*)

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Bước 2: Có 2 phương pháp

- **Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange**

NTQ của (*) có dạng $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, trong đó $C_1(x); C_2(x)$ thoả mãn hệ sau $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

- **Phương pháp hệ số bất định**

Tìm một nghiệm riêng $\overline{y}$ của (*) khi biểu thức $f(x)$ có một trong các dạng đặc biệt sau đây. Khi đó NTQ của (*) là $y = Y + \overline{y}$.

Dạng $f(x)$	**Dạng nghiệm riêng** $\overline{y}$
$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ $P_n(x)$ là đa thức bậc n theo x.	• Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $\overline{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$
	• Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì $\overline{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$
	• Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì $\overline{y} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$
$f(x) = e^{\alpha x}(A_n(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x)$ $A_n(x), B_m(x)$ là các đa thức bậc n và m theo x.	• Nếu $\alpha \pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $\overline{y} = e^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x)$ với $s = \max\{m, n\}$
	• Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $\overline{y} = xe^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x)$ với $s = \max\{m, n\}$

Chú ý: Hệ số trong các đa thức $Q_n(x); M_s(x); N_s(x)$ được tính bằng cách thay nghiệm riêng $\overline{y}$ vào phương (*) và đồng nhất hệ số 2 vế.

Ví dụ 4.29 Giải phương trình $y'' + 3y' - 4y = xe^x$ (1)

<u>Giải:</u>

Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 3y' - 4y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng $k^2+3k-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$

Tìm nghiệm riêng của (1) dạng $\overline{y}=xe^x(Ax+B)$

Ta có $\overline{y}'=e^x\left[Ax^2+(2A+B)x+B\right]$; $\overline{y}''=e^x\left[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B\right]$.

Thay vào (1) ta được $\begin{cases} 10A=1 \\ 2A+5B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{10} \\ B=-\dfrac{1}{25} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của (1) là $\overline{y}=xe^x\left(\dfrac{x}{10}-\dfrac{1}{25}\right)$

Vậy NTQ của (1) là $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}+xe^x\left(\dfrac{x}{10}-\dfrac{1}{25}\right)$

Ví dụ 4.30 Giải phương trình $y''-3y'+2y=\left(x^2+x\right)e^{2x}$ (1)

<u>Giải:</u>

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''-3y'+2y=0$ (2)

Phương trình đặc trưng $k^2-3k+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Tìm nghiệm riêng của (1) dạng $\overline{y}=e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$\Rightarrow$ $y'=e^{3x}\left(3Ax^2+(3B-2A)x+3C-B\right)$

$y''=e^{3x}\left(9Ax^2++9Bx+9C-2A\right)$

Thay vào (1) ta được $\begin{cases} 2A=1 \\ 6A+2B=1 \\ -2A+3B+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$

$\Rightarrow$Nghiệm riêng của (1) là $\overline{y}=e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+2\right)$

Vậy NTQ của (1) là $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+2\right)$

Ví dụ 4.31 Giải phương trình $y''+y=4x\sin x$ (1)

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''+y=0$ (2)

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0 \Rightarrow k=\pm i$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

Tìm nghiệm riêng của (1) dạng $\overline{y}=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$

$$\Rightarrow \quad y'=\left[Cx^2+(2A+D)x+B\right]\cos x+\left[-Ax^2+(2C-B)x+D\right]\sin x$$

$$y''=\left[-Ax^2+(4C-B)x+2A+2D\right]\cos x+\left[-Cx^2+(-4A-D)x+2C-2B\right]\sin x$$

Thay vào (1) ta được $\begin{cases}2A+2D=0\\2C-2B=0\\-A=1\\4C=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=-1\\B=0\\C=0\\D=1\end{cases}$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng của (1) là $\overline{y}=x(-x\cos x+\sin x)$

Vậy NTQ của (1) là

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\cos x+x\sin x=(C_1-x^2)\cos x+(C_2+x)\sin x$$

Ví dụ 4.32 Giải phương trình $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$ (1)

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''+y=0$ (2)

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0 \Rightarrow k=\pm i$

$\Rightarrow$ NTQ của (2) là $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

NTQ của (1) có dạng $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, trong đó

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$$

Ta có $\Delta=1;\quad \Delta_1=-\dfrac{\sin x}{\cos x};\quad \Delta_2=1$

$$\Rightarrow \begin{cases}C_1'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}\\ C_2'(x)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1(x)=\ln|\cos x|+C_1\\ C_2(x)=x+C_2\end{cases}$$

Vậy NTQ của (1) là $y=\left(C_1+\ln|\cos x|\right)\cos x+\left(C_2+x\right)\sin x$

Chú ý: Phương trình Euler cấp 2 có dạng $x^2y''+axy'+by=f(x)$ **(*)** được đưa về dạng phương trình tuyến tính hệ số hằng bằng cách đổi biến như sau:

Đặt $x=e^t\ (x>0)$ hoặc $x=-e^t\ (x<0)$

Ta có $y'_t=y'_xe^t \Rightarrow y'_x=y'_te^{-t}$

$$y''_{tt}=\left(y'_xe^t\right)'_x e^t=\left(y''_{xx}e^t+y'_x\right)e^t=y''_{xx}e^{2t}+y'_t \Rightarrow y''_{xx}=\left(y''_{tt}-y'_t\right)e^{-2t}$$

Thay vào (*) ta có $y''+(a-1)y'+by=f\left(e^t\right)$

Ví dụ 4.33. Giải phương trình $x^2y''+xy'+y=x$ (1)

<u>Giải:</u>

Đặt $x=e^t \Rightarrow y'_x=y'_te^{-t};\quad y''_{xx}=\left(y''_{tt}-y'_t\right)e^{-2t}$

Thay vào (1) ta có $y''+y=e^t$ (2)

Phương trình thuần nhất tương ứng $y''+y=0$ (3)

Phương trình đặc trưng $k^2+1=0 \Rightarrow k=\pm i$

$\Rightarrow$ NTQ của (3) là $Y=C_1\cos t+C_2\sin t$

Tìm nghiệm riêng của (2) dạng $\overline{y}=Ae^t$

$\Rightarrow \quad y'=3Ae^t;\quad y''=3Ae^t$

Thay vào (2) ta được $A=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Nghiệm riêng của (2) là $\overline{y}=\dfrac{1}{4}e^t$

Vậy NTQ của (2) là $y=C_1\cos t+C_2\sin t+\dfrac{1}{4}e^t$

$\Rightarrow$ NTQ của (1) là $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\dfrac{1}{4}x$

4.5. Hệ phương trình vi phân

Một số hệ phương trình vi phân cấp 1 có thể được giải bằng các phương pháp khử biến độc lập, nghĩa là đưa về PTVP có một ẩn hàm.

Ví dụ 4.34. Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-z & (1) \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z^2}{y} & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Từ (1) ta có $y' = -z \Rightarrow y'' = -z'$

Thay vào (2) ta có $-y'' = \dfrac{(y')^2}{y} \Leftrightarrow yy'' + (y')^2 = 0$ (PTVP cấp 2 không chứa x)

Đặt $y' = u(y) \Rightarrow y'' = u'_y.y' = u'_y.u$

Ta được $yuu'_y + u^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ yu'_y + u = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y' = 0 \\ u' + \dfrac{1}{y}u = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ u = c_2 e^{-\int \frac{dy}{y}} = \dfrac{c_2}{y} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ y' = \dfrac{c_2}{y} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ \int yy'dx = \int c_2 dx \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ \dfrac{y^2}{2} = c_2 x + c_3 \end{array}\right. \Rightarrow y = \pm\sqrt{c_1 x + c_2} \Rightarrow z = \pm\frac{c_1}{2\sqrt{c_1 x + c_2}}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\begin{cases} y = \pm\sqrt{c_1 x + c_2} \\ z = \pm\dfrac{c_1}{2\sqrt{c_1 x + c_2}} \end{cases}$

Ví dụ 4.35. Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - z = \cos x & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} + y = 1 & (2) \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Từ (2) ta có $y = 1 - z' \Rightarrow y' = -z''$

Thay vào (1) ta có $-z'' - z = \cos x$ (3) (PTVP tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất)

Giải phương trình thuần nhất tương ứng $-z'' - z = 0 \Rightarrow z = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Nghiệm riêng của (3) có dạng $\bar{z} = x(A\cos x + B\sin x)$.

Thay vào (3) ta được $\begin{cases} 2A = 0 \\ -2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = -\dfrac{1}{2}x\sin x$

NTQ của (3) là $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{1}{2}x\sin x$

$$\Rightarrow y = 1 - z' = 1 + \frac{3}{2}c_1 \sin x - c_2 \cos x + \frac{1}{2}x\cos x$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\begin{cases} y = 1 + \frac{3}{2}c_1 \sin x - c_2 \cos x + \frac{1}{2}x\cos x \\ z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \sin x \end{cases}$

Chú ý: Đối với hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất hệ số hằng có dạng sau thì có thể sử dụng thêm các phương pháp đại số tuyến tính để giải.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad X' = AX$$

Cách giải:

- Giải phương trình đặc trưng $\det(\lambda I - A) = 0$
- NTQ của hệ có dạng sau

Nghiệm của phương trình đặc trưng	**Hệ nghiệm cơ bản**	**Hệ nghiệm tổng quát**
λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực phân biệt	$e^{\lambda_1 t}X^{(\lambda_1)};\ e^{\lambda_2 t}X^{(\lambda_2)}$ $X^{(\lambda_k)}$: vector riêng ứng với trị riêng λ_k	$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}X^{(\lambda_1)} + c_2 e^{\lambda_2 t}X^{(\lambda_2)}$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$ là cặp nghiệm phức liên hợp	$\operatorname{Re}\left(X^{(\lambda)}\right);\ \operatorname{Im}\left(X^{(\lambda)}\right)$ $X^{(\lambda)}$: vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = \alpha + i\beta$	$X(t) = c_1 \operatorname{Re}\left(X^{(\lambda)}\right) + c_2 I\text{m}\left(X^{(\lambda)}\right)$
λ là nghiệm kép (A không chéo hóa được)	$X(t) = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ a_1, b_1, a_2, b_2: các hằng số được xác định bằng cách thay nghiệm trực tiếp vào hệ	

Ví dụ 4.36. Giải hệ $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -y - 2z \\ z' = 3y + 4z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ta có $\left|\lambda I_2 - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

- Với $\lambda = 1 : (A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Với $\lambda = 2 : (A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Vector riêng $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Suy ra nghiệm tổng quát $X(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \\ -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x} \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\begin{cases} y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \\ z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x} \end{cases}$

Ví dụ 4.37. Giải hệ $\begin{cases} y' + 7y - z = 0 \\ z' + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

Giải:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -7y + z \\ z' = -2y - 5z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Ta có $\left|\lambda I_2 - A\right| = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \pm i$

Với $\lambda = -6 + i : (A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Suy ra vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

Từ đó ta có 2 nghiệm riêng của hệ là $\begin{cases} X_1(x) = \mathrm{Re}\left(e^{(-6+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right) = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} \\ X_2(x) = \mathrm{Im}\left(e^{(-6+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right) = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} \end{cases}$

Nghiệm tổng quát

$$X(x) = c_1 e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + c_2 e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ (c_2 + c_1)\cos x + (c_2 - c_1)\sin x \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\begin{cases} y = e^{-6x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) \\ z = e^{-6x}\left((c_2 + c_1)\cos x + (c_2 - c_1)\sin x\right) \end{cases}$

Ví dụ 4.38. Giải hệ $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = 4y + 6z \end{cases}$

<u>Giải:</u>

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -4 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

Với $\lambda = 4 : (A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ và A không chéo hóa được.

Nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$X(x) = e^{4x} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \end{pmatrix} \Rightarrow X'(x) = \begin{pmatrix} 4a_1 + b_1 + 4b_1 x \\ 4a_2 + b_2 + 4b_2 x \end{pmatrix} e^{4x}$$

Thay vào hệ ta có $\begin{cases} 2a_1 + a_2 + b_1 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 0 \\ -4a_1 - 2a_2 + b_2 = 0 \\ 4b_1 + 2b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = c_1 \\ b_1 = c_2 \\ a_2 = -2c_1 - c_2 \\ b_2 = -2c_2 \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\begin{cases} y = e^{4x}\left(c_1 + c_2 x\right) \\ z = e^{4x}\left(-2c_1 + c_2 - 2c_2 x\right) \end{cases}$