Chương 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TỐI ƯU HÓA

I. Định nghĩa và ý nghĩa của các thuật ngữ

1. Tối ưu

- Tối ưu là tốt nhất
- Số lượng sự kiện, sự vật, hiện tượng trong tập hợp dùng để so sánh càng lớn thì tính đại diện càng cao.
- Tập hợp các điều kiện ràng buộc tạo nên miền giới hạn phạm vi so sánh lựa chọn ta thường gọi là miền cho phép.

2. Tối ưu hóa

- Tối ưu hóa là làm cho tốt nhất.
- Khái niệm này chỉ rõ để có kết quả tốt nhất cần có sự tác động, điều khiển từ bên ngoài.
- Để làm tốt nhất ta cần xác định:
    - Mục tiêu mong đợi của sự vật, hiện tượng mà ta quan tâm
    - Các yếu tố chi phối đến mục tiêu mong đợi.
    - Phạm vi diễn biến của sự vật hiện, tượng ta khảo sát

3. Bài toán tối ưu

Khi tiến hành lập kế hoạch sản xuất, khi thiết kế sản phẩm, công trình hoặc hệ thống, khi điều khiển các quá trình nếu dựa vào nguyên lý cực trị không chỉ đạt được những mục tiêu về kỹ thuật mà còn đạt hiệu quả kinh tế cao.

Toán học giúp chúng ta giải quyết dung hòa mâu thuẫn giữa yêu cầu kỹ thuật và hiệu quả kinh tế chính là bài toán tối ưu.

Bài toán tối ưu được phát biểu như sau:

$$f(x) \to \max(\min) \qquad (1\text{-}1)$$

Thỏa mãn điều kiện: $g_i(x) = \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, i = 1:m$; (1-2)

$$x \in X \subset R^n \qquad (1\text{-}3)$$

Trong đó:

- f(x) gọi là hàm mục tiêu
- các hàm gi(x), i = 1: n; gọi là hàm ràng buộc mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (1-2) là một ràng buộc

– Tập hợp D = $\{x \in X | g_i(x) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i, i = 1:m\}$ gọi là miền ràng buộc

– Mỗi điểm $x(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ gọi là một phương án (hay một nghiệm)

– Mỗi phương án $x^* \in D$ làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max hoặc min cụ thể là:

  - $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$ đối với bài toán Max
  - $\leq f(x)$ với mọi $x \in D$ đối với bài toán Min

được gọi là phương án tối ưu và $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán

4. Phân loại bài toán tối ưu

Với định nghĩa bài toán tối ưu ta có thể suy ra phương pháp tổng quát để giải bài toán là phương pháp duyệt toàn bộ. Bản chất của phương pháp này tìm giá trị của hàm mục tiêu f(x) trên tất cả các phương án, sau đó so sánh các giá trị tính được để tìm ra giá trị tối ưu và phương án tối ưu của bài toán.

Để phân loại bài toán tối ưu người ta thường dựa vào tính chất các thành phần của bài toán và đối tượng nghiên cứu để phân thành các loại chủ yếu sau:

– Quy hoạch phi tuyến: nếu hàm mục tiêu f(x) hoặc có ít nhất một trong các hàm ràng buộc $g_i(x)$ là phi tuyến hoặc cả f(x) và $g_i(x)$ cùng phi tuyến.

– Quy hoạch tuyến tính: nếu hàm mục tiêu f(x) và hàm ràng buộc $g_i(x)$ là tuyến tính

– Quy hoạch động: nếu đối tượng xét là các quá trình có nhiều giai đoạn nói chung hay các quá trình phát triển theo thời gian nói riêng.

– Quy hoạch tham số: nếu các hệ số trong biểu thức của hàm mục tiêu và hàm ràng buộc phụ thuộc vào tham số.

– Quy hoạch rời rạc: nếu miền ràng buộc D là tập rời rạc. Trong trường hợp riêng khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên thì ta có quy hoạch nguyên. Trường hợp quy hoạch nguyên mà biến chỉ nhận giá trị (0) hay (1) gọi là quy hoạch Boole.

– Quy hoạch đa mục tiêu: nếu cùng trên một miền ràng buộc ta xét đồng thời các hàm mục tiêu khác nhau.

II. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ GIẢI TÍCH LỒI VÀ ĐẠI SỐ

1. Một số khái niệm về giải tích lồi

1.1. Không gian Euclic

1.2. Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng

- Ax + By = C xác định đc 1 đường thẳng

- $Ax + By \le C$ xác định đc 1 nửa mặt phẳng
- $Ax + By + Cz = D$ xác định đc 1 mặt phẳng
- $Ax + By + Cz \le D$ xác định đc 1 nửa không gian 3 chiều
- $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = B$ xác định đc 1 Siêu phẳng
- $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n \le B$ xác định đc 1 nửa không gian nhiều chiều

1.3. Tập lồi

2. Mốt số khái niệm về đại số

2.1. Ma trận

Ma trận là một bảng chữ nhật gồm mxn số sắp thành m hàng và n cột có dạng:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$ và được ký hiệu là $A = (a_{ij})_{mxn}$ là ma trận có kích thước là $m \times n$

– Ma trận có số hàng bằng số cột (m=n) gọi là ma trận vuông và gọi là ma trận có cấp n.

– Ma trận mà có các cột của nó là các hàng tương ứng của ma trận ban đầu A gọi là ma trận chuyển vị của A và ký hiệu là A’

  - Ví dụ: $A = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ thì $A' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

– Ma trận chỉ có một cột gọi là véctơ cột.

– Ma trận chỉ có một hàng gọi là véctơ hàng.

– Ma trận vuông có dạng: $A = \begin{vmatrix} \alpha_1, 0, \dots\dots & 0 \\ 0, \alpha_2, \dots\dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0, 0 \dots\dots & \alpha_n \end{vmatrix}$

– Nếu ma trận đường chéo có $\alpha_i = 1$, i =1:n thì gọi là ma trận đơn vị; được ký hiệu bằng I hoặc E

– Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng kích thước và các phần tử tương ứng bằng nhau.

– Muốn nhân ma trận với một hằng số α, ta nhân mỗi phần tử của ma trận đó với số đó: $\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{mxn}$

  - Ví dụ: $2.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.3 & 2.4 \\ 2.7 & 2.(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}$

- Tổng hai ma trận A và B có cùng kích thước là ma trận C mà mỗi phần tử của nó bằng tổng thể các phần tử tương ứng của ma trận A và ma trận B $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
    - Ví dụ: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
- Ma trận A nhân được với ma trận B chỉ trong trường hợp số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B

  $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{jk})_{nxl}$, $C = (c_k)_{mxl}$
    - Ví dụ1: $\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.1 & 3.4 \\ 2.1 & 2.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$
    - Ví dụ 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.1+2.3+3.1 & 1.2+2.2+3.4 \\ 4.1+1.3+2.1 & 4.2+1.2+2.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}$

2.2. Định thức

- Định thức cấp 2 ứng với ma trận vuông cấp 2 ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

- Định thức cấp 3 ứng với ma trận vuông cấp 3, ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

❖ Tính chất của định thức

- Định thức không thay đổi khi ta thay đổi hàng thành cột, cột thành hàng (Δ = Δ')
    - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2; \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$
- Nếu đổi hai hàng (hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu
    - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2; \Delta_d = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 1.4 = 2$
- Thừa số chung của một hàng (một cột) có thể đưa ra ngoài dấu định thức
    - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$
- Nếu các phần của một cột hay hàng tỷ lệ với các phần tử tương ứng của một cột hay hàng khác thì định thức bằng 0

- Nếu mỗi phần tử của một cột có thể tách thành tổng của hai số thì định thức đó cũng tách thành tổng của hai định thức tương ứng.
    - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5+2 \\ 1 & 7+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13$
- Định thức sẽ không thay đổi nếu cộng thêm vào các phần tử của một cột (hàng) nào đó các phần tử của một cột (hàng khác) đã nhân với một hằng số
    - Ví dụ: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+(-2.2) & 5+(-2.1) & 7+(-2.3) \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2.3. Ma trận ngịch đảo

- Ma trận vuông A được gọi là không suy biến nếu nó có định thức Δ≠ 0, ngược lại A gọi là suy biến.
- Đối với mỗi ma trận không suy biến sẽ tồn tại một ma trận (A-1) thỏa mãn điều kiện AA-1= A-1A = E

A^{-1} gọi là ma trận nghịch đảo của A; $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{vmatrix}$

- Ví dụ: cho $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ tính A^{-1}

Tính Δ = 1.5.8 + 2.3.1 + 3.2.0 – 3.5.1 – 1.3.0 – 2.2.8 = -1 ≠ 0 ⇒ có A^{-1}

Tính $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$, $A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 13$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$, $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$, $A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

Ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = -1\begin{vmatrix} 40 & 16 & -9 \\ 13 & 5 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

2.4. Hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

❖ Hệ phương trình đại số tuyến tính được phân biệt:

- Không thuần nhất nếu có ít nhất một hệ số $b_i \neq 0$
- Thuần nhất nếu tất cả các hệ số bi = 0
- Tương thích nếu có ít nhất một nghiệm, tức là tồn tại một bộ giá trị x1, x2, x3,….xn thỏa mãn hệ phương trình.
- Không tương thích nếu hệ không có nghiệm nào thỏa mãn hệ phương trình.
- Xác định nếu hệ chỉ có một nghiệm duy nhất.
- Bất định nếu hệ tồn tại quá một nghiệm.

❖ Trường hợp m = n

- Giả sử ma trận không suy biến tức là tồn tại ma trận nghịch đảo ta có: A-1Ax = A-1b. Bởi vì A-1A = E và nhân bất cứ ma trận nào với E sẽ được đúng ma trận đó nên x = A-1b và ta có công thức Crame tính nghiệm duy nhất: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,\dots n$
- Ví dụ: giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

Ta có $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad b = \begin{vmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{44} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{72}{44} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{152}{44}$$

❖ Trường hợp m ≠ n