HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

BÀI GIẢNG MÔN

TOÁN KINH TẾ

Giảng viên: TS. Trần Ngọc Minh

Điện thoại/E-mail: 0912366032/Minh_tranngoc07@yahoo.com

Bộ môn: Kinh tế - Khoa QTKD1

Học kỳ/Năm biên soạn: I/2009

CHƯƠNG I

GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phương pháp mô hình trong nghiên cứu và phân tích kinh tế

Ý nghĩa và khái niệm về mô hình toán kinh tế

- Nghiên cứu các hiện tượng, các vấn đề kinh tế người ta phải sử dụng PP suy luận gián tiếp.
- Đối tượng mà ta quan tâm được thay thế bởi "hình ảnh" – mô hình – công cụ phân tích và suy luận
-Mô hình hóa đối tượng
- Phân tích mô hình

Khái niệm mô hình kinh tế và mô hình toán kinh tế

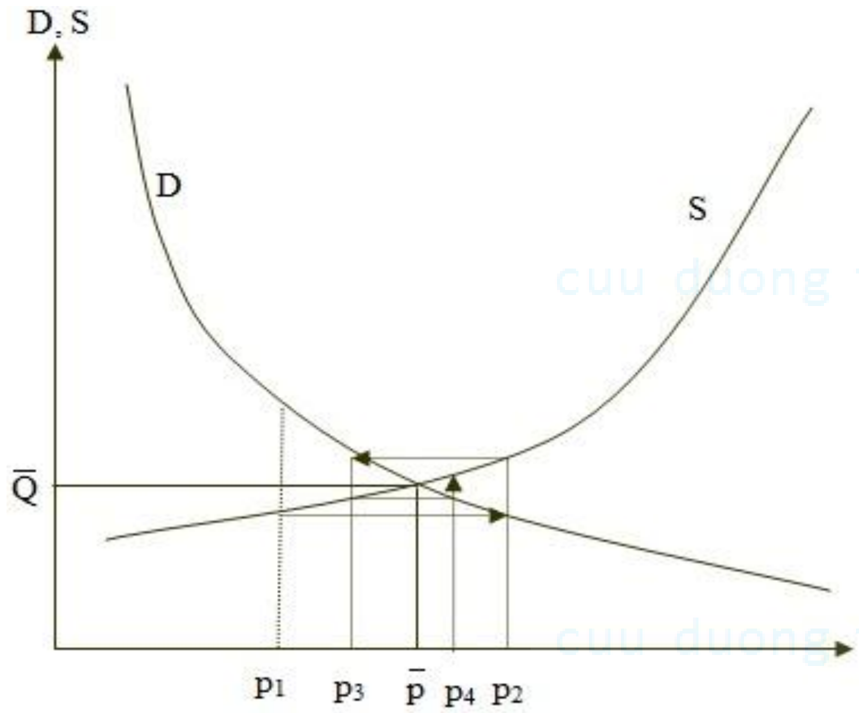
Mô hình kinh tế

Mô hình của một đối tượng là sự phản ánh hiện thực khách quan của đối tượng: sự hình dung, tưởng tượng đối tượng đó bằng ý nghĩ của người nghiên cứu.Nó bao gồm nội dung của mô hình và hình thức thể hiện nội dung đó

Mô hình toán kinh tế

Là mô hình kinh tế được trình bày bằng ngôn ngữ toán. Tạo khả năng áp dụng các PP suy luận và phân tích toán học và kế thừa các thành tựu trong lĩnh vực này cũng như trong các lĩnh vực khoa học có liên quan. Đối với các vấn đề phức tạp có nhiều mối lien hệ đan xen thậm chí tiềm ẩn mà chúng ta cần nghiên cứu, phân tích chẳng những về mặt định tính mà cả về mặt định lượng thì phương pháp suy nghĩ thông thường, phân tích giản đơn không đủ hiệu lực để giải quyết. Chúng ta cần đến phương pháp suy luận toán học. Đây chính là điểm mạnh của các mô hình toán kinh tế

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ



Nếu ở thời điểm bắt đầu xem xét thị trường, giá hàng là p_1 và giả sử $S_1 = S(p_1) > D_1 = D(p_1)$ khi đó dưới tác động của quy luật cung – cầu, giá p sẽ phải hạ xuống mức p_2.

Ở mức giá p_2 do $S_2 = S(p_2) < D_2 = D(p_2)$ nên giá sẽ tăng lên mức p_3.

Ở mức giá p_3 do $S_3 = S(p_3) > D_3 = D(p_3)$ nên giá sẽ giảm xuống mức p_4….

Quá trình cứ tiếp diễn cho đến khi $p = \bar{p}$, tại mức giá này cung cầu cân bằng.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

+/ Mô hình toán kinh tế (Mô hình cân bằng một thị trường).

Mô hình MIA :

$$S = S(p); \qquad S'(p) = dS/Dp > 0.$$
$$D = D(p); \qquad D'(p) = dD/dp < 0.$$
$$S = D$$

Với mô hình diễn đạt bằng lời và bằng hình vẽ ta không thể biết chắc rằng liệu quá trình hình thành giá trên thị trường có kết thúc hay không, tức là liệu có cân bằng thị trường hay không. Đối với mô hình toán kinh tế về cân bằng thị trường, ta sẽ có câu trả lời thông qua việc giải phương trình S = D và phân tích đặc điểm của nghiệm.

Khi muốn đề cập tới tác động của giá hàng hoá thay thế (p_j), thu nhập (M), thuế (T),… tới quá trình hình thành giá, ta có thể mở rộng mô hình bằng cách đưa các yếu tố tham gia vào các mối liên hệ với các yếu tố sẵn có trong mô hình phù hợp với các quy luật trong lý thuyết kinh tế, chẳng hạn:

$$S = S(p, T); \quad D = D(p, p_j, M, T)$$

Khi này mô hình, Ký hiệu là MHIB sẽ có dạng:

$$S = S(p, T);$$
$$D = D(p, p_j, M, T)$$
$$S = D$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Cấu trúc mô hình toán kinh tế.

Biến nội sinh (biến được giải thích): đó là các biến về bản chất chúng phản ánh, thể hiện trực tiếp sự kiện, hiện tượng kinh tế và giá trị của chúng phụ thuộc giá trị của các biến khác có trong mô hình

Biến ngoại sinh (biến giải thích)
Đó là các biến độc lập với các biến khác trong mô hình, giá trị của chúng được xem là tồn tại bên ngoài mô hình.

Tham số (thông số)
Đó là các biến số mà trong phạm vi nghiên cứu đối tượng chúng thể hiện các đặc trưng tương đối ổn định, ít biến động hoặc có thể là giả thiết là như vậy của đối tượng. Các tham số của mô hình phản ánh xu hướng, mức độ ảnh hưởng của các biến tới biến nội sinh.

Lưu ý rằng cùng một biến số, trong các mô hình khác nhau có thể đóng vai trò khác nhau, thậm chí trong cùng một mô hình nó cũng có thể có vai trò khác nhau do mục đích sử dụng mô hình khác nhau.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mối liên hệ giữa các biến số - Các phương trình của mô hình

- Phương trình định nghĩa (đồng nhất thức): Thể hiện quan hệ định nghĩa giữa các biến số hoặc giữa hai biểu thức ở hai vế của phương trình. Π = TR – TC, phương trình này là một đồng nhất thức. Xuất khẩu ròng của một quốc gia (NX) là khoản chênh lệch giữa xuất khẩu (EX) và nhập khẩu (IM) của quốc gia đó trong một thời kỳ nhất định. Thông thường xuất, nhập khẩu phụ thuộc vào thu nhập (Y), mức giá cả (p), tỷ giá hối đoái (ER),…do đó theo định nghĩa của xuất khẩu ròng, ta có thể viết: NX = EX(Y, p, ER) – IM(Y, p, ER). Trong mô hình MHIA, các phương trình $S'(p) = dS/dp$, $D'(p) = dD/dp$ cũng là các phương trình định nghĩa.
- Phương trình hành vi: Mô tả quan hệ giữa các biến do tác động của các quy luật hoặc giả định. Từ phương trình hành vi ta có thể biết sự biến động của biến nội sinh. – "hành vi" của biến này – khi các biến khác thay đổi giá trị. Sự biến động này có thể ám chỉ sự phản ứng trong hành vi của con người (thí dụ: trong hành vi tiêu dùng, nếu thu nhập tăng lên thì người tiêu dùng sẽ chi tiêu nhiều hơn), nhưng cũng có thể chỉ là thể hiện quy luật về mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến số. Trong mô hình MHIA, các phương trình S = S(p), D = d(p) là các phương trình hành vi vì chúng thể hiện sự phản ứng của người sản xuất và người tiêu dùng trước sự thay đổi của giá cả.
- Phương trình điều kiện: mô tả quan hệ giữa các biến số trong các tình huống có điều kiện, ràng buộc cụ thể mà mô hình đề cập. Trong mô hình MHIA, phương trình S = D là phương trình điều kiện cân bằng thị trường.

Bất phương trình thường là mô tả quan hệ giữa các biến số có liên quan với nhau và trong điều kiện cụ thể. Trong mô hình bài toán lập kế hoạch thì điều kiện ràng buộc là các bất phương trình thể hiện việc sử dụng các yếu tố đầu vào của quá trình sản xuất không vượt quá khả năng của doanh nghiệp.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phân loại mô hình toán kinh tế

Phân loại mô hình theo đặc điểm cấu trúc và công cụ toán học sử dụng

-Mô hình tối ưu: Lựa chọn cách thức hoạt động nhằm tối ưu hóa một hoặc một số chỉ tiêu định trước

- Mô hình cân bằng
- Mô hình tất định, mô hình ngẫu nhiên.
- Mô hình toán kinh tế và mô hình kinh tế lượng.
- Mô hình tĩnh, mô hình động

Phân loại mô hình theo quy mô yếu tố, theo thời hạn

+/ Mô hình vĩ mô:
+/ Mô hình vi mô:

Theo thời hạn mà mô hình đề cập

Mô hình ngắn hạn (tác nghiệp), mô hình dài hạn (chiến lược).

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Nội dung của phương pháp mô hình trong nghiên cứu và phân tích kinh tế

Đặt vấn đề

Cần diễn đạt rõ vấn đề, hiện tượng nào trong hoạt động kinh tế mà chúng ta quan tâm, mục đích là gì? Các nguồn lực có thể huy động để tham gia nghiên cứu (nhân lực, tài chính, thông tin, thời gian,…)

Mô hình hoá đối tượng

- Xác định các yếu tố, sự kiện cần xem xét cùng các mối liên hệ trực tiếp giữa căn cứ vào cơ sở lý luận đã lựa chọn.

- Lượng hoá các yếu tố này, coi chúng là các biến của mô hình.

- Xét vai trò của các biến số và thiết lập các hệ thức toán học – chủ yếu là các phương trình và bất phương trình – mô tả quan hệ giữa các biến.

Phân tích mô hình

Sử dụng phương pháp phân tích mô hình (được trình bày chi tiết ở phần sau) để phân tích. Kết quả phân tích có thể dùng để hiệu chỉnh mô hình (thay đổi vai trò của biến, thêm, bớt biến, thay đổi định dạng phương trình hoặc bất phương trình,..) cho phù hợp với thực tiễn.

Giải thích kết quả

Dựa vào kết quả phân tích mô hình ta sẽ đưa ra giải đáp cho vấn đề cần nghiên cứu. Nếu ta thay đổi vấn đề, hoặc mục đích nghiên cứu nhưng đối tượng liên quan không thay đổi thì vẫn có thể sử dụng mô hình sẵn có.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Khi điều chỉnh một sắc thuế đánh vào việc sản xuất và tiêu thụ một loại hàng hoá A (giả sử: tăng thuế suất), nhà nước quan tâm tới phản ứng của thị trường đối với việc điều chỉnh này – thể hiện bởi sự thay đổi giá cả cũng như lượng hàng hoá tiêu thụ- và muốn dự kiến trước được phản ứng này, đặc biệt là về mặt định lượng. Từ đó có căn cứ tính toán mức điều chỉnh thích hợp tránh tình trạng bất ổn của thị trường.

Đặt vấn đề

Để đáp ứng yêu cầu trên, chúng ta cần phân tích tác động trực tiếp (ngắn hạn) của việc tăng thuế suất đối với sản xuất và tiêu thụ loại hàng A trên thị trường.

Mô hình hoá

Đối tượng liên quan đến vấn đề cần phân tích là thị trường hàng hoá A cùng sự hoạt động của nó trong trường hợp có xuất hiện yếu tố thuế, Chúng ta mô hình hoá đối tượng này.

$S = S(p, T); \quad S' \geq 0$

$D = D(p, p_j, M, T); \; D' \leq 0$

$S = D$

Trong đó: S, D, S’, D’, p là các biến nội sinh, T là biến ngoại sinh.

Để định dạng cụ thể cho các hàm trong mô hình ta có thể sử dụng các phương pháp trong kinh tế lượng.

Phân tích

Giải phương trình cân bằng, giả sử được nghiệm là . Rõ ràng sẽ phụ thuộc vào T nên ta có thể viết = (T). Thay các biểu thức: d /dT, d /dT, chúng phản ánh tác động của thuế T tới giá và lượng cân bằng.

Giải thích kết quả: Để phân tích tác động của thuế tới giá cả và lượng hang hoá lưu thông trên thị trường, về mặt định tính ta chỉ cần xét dấu của các biểu thức d /dT, d /dT. Nếu muốn có đánh giá về lượng ta cần có thông tin, dữ liệu cụ thể về các biến để có thể định dạng chi tiết và ước lượng (dạng số) mô hình

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phương pháp phân tích mô hình – Phân tích so sánh tĩnh

a) Đo lường sự thay đổi của biến nội sinh theo biến ngoại sinh.

Phân tích so sánh tĩnh đòi hỏi phải đo lường sự phản ứng, biến động (tức thời) cả về xu hướng, độ lớn của biến nội sinh khi một biến ngoại sinh trong mô hình có sự thay đổi nhỏ, còn các biến khác không đổi hoặc khi các biến ngoại sinh cùng thay đổi. Có thể dùng đạo hàm và vi phân để đo lường sự thay đổi này.

Giả sử nghiệm của mô hình có biến nội sinh Y phụ thuộc vào các biến ngoại sinh $X_1, X_2,\ldots,X_n$ như sau

$Y = F(X_1, X_2,\ldots,X_n)$, trong đó F có thể có các tham số α, β,… Ký hiệu $X = (X_1, X_2,\ldots,X_n)$, khi đó có thể viết

$Y = F(X, \alpha, \beta,\ldots)$.

+/ Đo lường sự thay đổi tuyệt đối:

- Xét hàm $Y = F(X_1, X_2,\ldots,X_n)$, tại điểm $X = X^0$, gọi sự thay đổi của Y là ΔY_i khi chỉ có X_i thay đổi một lượng nhỏ ΔX_i, tức là:

$$\Delta Y_i = F(X_1, X_2,\ldots X_i + \Delta X_i,\ldots,X_n) - F(X_1, X_2,\ldots X_i,\ldots,X_n)$$

ΔY_i gọi là số gia riêng của Y theo X_i tại X^0.

Ta có lượng thay đổi trung bình của Y theo X_i tại X^0:

$$\rho = \frac{\Delta Y_i}{\Delta X_i}$$

Trong trường hợp F khả vi theo X_i ta có tốc độ thay đổi tức thời tại $X = X^0$ đang xét là:

$$\rho(X_i) = \frac{\partial F(X^0)}{\partial X_i}$$

Nếu ΔX_i khá nhỏ thì $\rho(X_i) = \rho$, vì vậy nếu $\Delta X_i = 1$ thì có thể coi:

$$\rho(X_i) = \Delta Y_i$$

Thí dụ 1.2: Chi phí C(Q) phụ thuộc sản lượng Q và được mô hình hoá như sau:

$$C(Q) = Q^3 - 61{,}5Q^2 + 1528{,}5Q + 2000$$

Sự thay đổi của C khi Q tăng (giảm) một đơn vị (chi phí cận biên), ký hiệu là MC, được xác định bằng công thức:

$$C'(Q) = MC(Q) = 3Q^2 + 122{,}5Q + 1528{,}5$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

-Trong trường hợp tất cả các biến ngoại sinh đều thay đổi với các lượng khá nhỏ, ký hiệu là ΔX_1, ΔX_2,…., ΔX_n, thì để tính sự thay đổi của biến nội sinh Y – ký hiệu là ΔY – ta dùng công thức xấp xỉ:

$$\Delta Y = \frac{\partial F}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}\Delta X_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n}\Delta X_n$$

- Nếu ΔX_1, ΔX_2,….., ΔX_n là các vi phân của biến ngoại sinh thì ta có thể sử dụng công thức vi phân toàn phần:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}dX_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n}dX_n$$

- Nếu bản thân X_i lại là biến nội sinh phụ thuộc vào một hoặc nhiều biến khác thì để đo lường sự thay đổi của biến Y theo sự thay đổi của X_i ta sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

- Trong trường hợp quan hệ giữa biến nội sinh và biến ngoại sinh không thể hiện dưới dạng tường minh mà dưới dạng hàm ẩn, thì để tính sự thay đổi tuyệt đối ta áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Nếu biến nội sinh Y có liên hệ với các biến ngoại sinh X_i dưới dạng:

$$F(Y, X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

Khi đó để tính đạo hàm của Y theo X_i ta dùng công thức:

$$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial X_i} = -\frac{\partial F}{\partial X_i} : \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (i = \overline{1,n})}$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ 1.3. Giả sử Y và X_1, X_2 có liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$Y^2 = X_1^2 + X_2^2$$

Rõ ràng giữa Y và X_1, X_2 có mối liên hệ hàm số nhưng dưới dạng hàm ẩn. Ta cần tìm $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$, $i = 1, 2$. Ta có thể viết:

$$Y^2 - (X_1^2 + X_2^2) = 0$$

Áp dụng công thức trên ta có:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = -\frac{X_i}{Y} \quad (i = 1, 2)$$

+/ Đo lường thay đổi tương đối:

Để đo tỷ lệ thay đổi tương đối (tức thời) của biến nội sinh với sạu thay đổi tương đối của một biến ngoại sinh, người ta dùng hệ số co giãn (hệ số co giãn riêng). Hệ số co giãn (độ co giãn) của biến phụ thuộc Y theo biến X_i tại $X = X^0$, ký hiệu - được định nghĩa bởi công thức:

$$\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) = \frac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} \times \frac{X_i^0}{F(X^0)}$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Nếu muốn đo lường sự thay đổi tương đối của Y khi tất cả các biến ngoại sinh đều thay đổi (tương đối) theo cùng một tỷ lệ ta dung hệ số co giãn chung (toàn phần), tính theo công thức:

$$\varepsilon^Y(X^0) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^Y(X^0) \qquad (1.6)$$

Trong đó: $\varepsilon_{X_i}^Y(X^0)$ là hệ số co giãn riêng của Y theo X_i tính tại điểm X^0, $\varepsilon^Y(X^0)$ cho ta biết tại $X = X^0$ tỷ lệ phần trăm thay đổi của Y khi tất cả X_i cùng thay đổi 1%. Xu hướng thay đổi của Y phụ thuộc vào dấu và độ lớn của các hệ số co giãn riêng.

Nói chung hệ số co giãn của Y (riêng hoặc toàn phần) phụ thuộc vào điểm chúng ta tính, tức là phụ thuộc vào các biến ngoại sinh. Tuy nhiên, nếu quan hệ giữa Y và các biến ngoại sinh có dạng:

$Y = \alpha_0 X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots\ldots X_n^{\alpha_n}$ với $\alpha_0, \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ là các tham số, thì có thể chứng minh được rằng:

$$\varepsilon_{X_i}^Y(X) = \alpha_i \quad (i = \overline{1,2}) \qquad (1.7)$$

Và do đó: $\varepsilon^Y(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Với Q là mức sản lượng, K là vốn và L là số lượng lao động được sử dụng, ta có mô hình quen thuộc (mô hình hàm sản xuất)., giả sử có dạng: $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$ với $\alpha, \beta > 0$. Ta có $\varepsilon_K^Q = \alpha, \varepsilon_L^Q = \beta$ và $\varepsilon^Q = \alpha + \beta$.

Nếu Y, $X_i > 0$, thì hệ số co giãn $\varepsilon_{X_i}^Y$ có thể tính theo công thức:

$$\varepsilon_{X_i}^Y = \frac{\partial(LnY)}{\partial(LnX_i)} \qquad (1.9)$$

Trong đó LnY, LnX_i là lôgarit cơ số e của Y và X_i.

Nếu gọi $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ là hàm cận biên – ký hiệu là MF_i và gọi $\frac{Y}{X_i}$ là hàm trung bình – ký hiệu AF_i của Y theo X_i thì ta có:

$$\varepsilon_{X_i}^Y = \frac{MF_i}{AF_i}$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Tính hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng)

Trong trường hợp mô hình có biến ngoại sinh là biến thời gian, thì sự biến động của biến nội sinh theo thời gian được đo bằng hệ số tăng trưởng. Hệ số tăng trưởng của một biến đo tỷ lệ biến động của biến đó theo thời gian.

Giả sử $Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n, t)$ với t là biến thời gian. Hệ số tăng trưởng của Y – ký hiệu là r_Y – được định nghĩa bằng công thức:

$$r_Y = \frac{\frac{\partial Y}{\partial t}}{Y} \qquad (1.11)$$

Thông thường r_Y được tính theo tỷ lệ %.

Thí dụ: Với công thức tính lãi kép liên tục, ta có lượng tiền thu được tại thời điểm t là V_t, tính theo công thức: $V_t = V_0e^{rt}$; trong đó V_0 là vốn gốc, r là lãi suất, t là thời gian. Hệ số tăng trưởng của V_t là:

$$r_Y = \frac{\frac{\partial V_t}{\partial t}}{V_t} = r$$

Nếu thời gian t không quá dài, hoặc lãi suất r tính theo từng chu kỳ thì công thức trên có dạng:

$$V_t = V_0(1+r)^t$$

Do đó hệ số tăng trưởng của V là $Ln(1+r) = r$

Tổng quát, nếu biến nội sinh phụ thuộc thời gian một cách gián tiếp thông qua sự phụ thuộc vào thời gian của các biến khác, tức là hàm số có dạng $Y = F(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ thì hệ số tăng trưởng của Y có thể tính dựa vào hệ số tăng trưởng của các biến X_i theo công thức:

$$r_Y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^{Y} r_{X_i}$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Hệ số thay thế (bổ sung, chuyển đổi).

Giả sử $Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, tại $X = X^0$ giá trị tương ứng của Y là $Y = F(X^0) = Y^0$. nếu ta cho hai biến ngoại sinh thay đổi và cố định các biến còn lại sao cho $Y = Y^0$, thì sự thay đổi của hai biến này phải theo tỷ lệ nào? Tuỳ thuộc vào ý nghĩa thực tiễn của hai biến, tỷ lệ này có thể gọi là tỷ lệ thay thế (thay thế giữa vốn và lao động), tỷ lệ bổ sung (bổ sung giữa hai mặt hàng), tỷ lệ chuyển đổi (chuyển đổi giữa tiêu dùng hiện tại và tiêu dùng tương lai). Ta có thể tính hệ số này như sau:

Theo công thức vi phân toàn phần, ta có:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}dX_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial X_n}dX_n$$

Giả sử cho hai biến X_i và X_j thay đổi, do Y và X_k ($k \neq i, j$) không đổi, nên:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial X_i}dX_i + \frac{\partial F}{\partial X_j}dX_j \Rightarrow \frac{dX_i}{dX_j} = \frac{\frac{\partial F}{\partial X_j}}{\frac{\partial F}{\partial X_i}}$$

Nếu $dX_i/dX_j < 0$ thì ta nói rằng X_i có thể thay thế (chuyển đổi) được cho X_j (tại $X = X^0$) với tỷ lệ $\left|\frac{dX_i}{dX_j}\right|$.

Nếu $dX_i/dX_j > 0$ thì ta nói rằng X_i, X_j bổ sung cho nhau (tại $X = X^0$) với tỷ lệ $\left|\frac{dX_i}{dX_j}\right|$ Nếu $dX_i/dX_j = 0$ thì ta nói rằng X_i, X_j không thể thay thế (hoặc bổ sung) cho nhau (tại $X = X^0$).

Chương I

Mô hình tối ưu

1. Mô hình hành vi sản xuất
2. Mô hình hành vi tiêu dùng
3. Mô hình kinh tế vĩ mô

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Áp dụng phân tích đối với một số mô hình kinh tế phổ biến

Mô hình hành vi sản xuất

Tối ưu về mặt kỹ thuật

Mô hình hàm sản xuất
$Q= F(X_1, X_{2,,,...}, X_n) = F(X)$
Q: Sản lượng đầu ra (nội sinh)
$X=(X_1, X_{2,,,...}, X_n)$: Mức sử dụng các yếu tố đầu vào (ngoại sinh)
Mô hình có chứa các tham số
Hàm SX mô tả quan hệ giữa kết quả SX (đầu ra) có hiệu quả nhất (về mặt kỹ thuật) phụ thuộc vào các yếu tố SX (Đâu vào)
Dạng hàm tuyến tính:
$$Q = \alpha_1 X + \alpha_2 X_2 + ...+ \alpha_n X_n$$
Hệ số thay thế giữa các biến không đổi $C = -\alpha_i / \alpha_j$
Dạng hàm Cobb-Douglass
$$Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$$
Với a, α, β, là các tham số khác 0

Phân tích mô hình

Tác động của các yếu tố đến sản lượng:
-Trong ngắn hạn:
$F(X)/X_i \rightarrow$ |Max khi và chỉ khi
$F(X)/X_i = \delta F / \delta X_i = AP_i = MP_i$
Năng suất trung bình bằng năng suất biên của yếu tố i (các yếu tố khác không đổi).
Độ co giãn của Q theo yếu tố i: $\varepsilon = MP_i/AP_i$
Hệ số thay thế giữa yếu tố i và yếu tố j:
$$dX_i/dX_j = MP_i/MP_j$$
-Trong dài hạn: Các yếu tố thay đổi cùng một tỷ lệ
-Cho hàm SX: $Q = Q= F(X_1, X_{2,,,...} X_n)$ với $\lambda X=(\lambda X_1, \lambda X_{2,,,...}, \lambda X_n)$, ta nói quy mô tăng với hệ số $\lambda > 0$:
$F(\lambda X) > \lambda F(X)$ tăng quy mô tăng hiệu quả
$F(\lambda X) < \lambda F(X)$ tăng quy mô giảm hiệu quả.
$F(\lambda X) = \lambda F(X)$ Tăng quy mô hiệu quả không đổi

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình hàm sản xuất

Thí dụ: Cho hàm sản xuất Cobb – Douglas với hai yếu tố vốn (K) và lao động (L):

$$Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

Đây là hàm sản xuất có hệ số co giãn của sản lượng Q theo các biến không đổi, $\varepsilon_K^Q = \alpha, \varepsilon_L^Q = \beta$ và khi tăng quy mô sản xuất λ lần thì kết quả sản xuất tăng $\lambda^{\alpha+\beta}$ lần. Như vậy, đối với hàm này hiệu quả tăng (giảm, không đổi) theo quy mô khi và chỉ khi $\alpha + \beta$ >(<,=) 1. Ta xét năng suất biên của các yếu tố:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = a\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = a\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

Suy ra tỷ lệ thay thế của lao động cho vốn là:

$$\frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{L}{K}$$

Tối ưu về mặt kinh tế

● *Đặt vấn đề*: Sử dụng các mô hình mô tả công nghệ sản xuất của doanh nghiệp để phân tích ta mới chỉ đạt được tối ưu về mặt kỹ thuật, chưa tính tới các điều kiện bên ngoài, thị trường đầu vào. Đối với doanh nghiệp, các điều kiện liên quan đến thị trường đầu vào được thể hiện thông qua giá của các yếu tố sản xuất. Đây là nguồn thông tin mà doanh nghiệp không thể bỏ qua khi lựa chọn mức sử dụng các yếu tố. Hơn nữa, với nhiều hàm sản xuất (công nghệ) cho phép các doanh nghiệp trong chừng mực nhất định có thể sử dụng linh hoạt các yếu tố. Điều này tạo khả năng cho doanh nghiệp có thể lựa chọn nhiều tổ hợp sử dụng yếu tố theo mục đích của họ. Doanh nghiệp có thể gặp hai tình huống. Một là, với mức sản lượng dự kiến sản xuất doanh nghiệp phải tiêu tốn một khoản chi phí để thực hiện, đương nhiên là doanh nghiệp mong muốn lựa chọn tổ hợp sử dụng các yếu tố sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất – cực tiểu hoá chi phí. Hai là, với số kinh phí đầu tư ấn định trước, doanh nghiệp muốn lựa chọn tổ hợp sử dụng các yếu tố sao cho mức sản lượng là cao nhất – tối đa hoá sản lượng. Các tình huống trên gọi là tình huống tối ưu về kinh tế vì nếu giá bán sản phẩm, dịch vụ của doanh nghiệp không đổi, doanh nghiệp tiêu thụ được hết sản lượng thì cả hai tình huống trên đều đem lại lợi nhuận tối đa cho doanh nghiệp.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Tối ưu về mặt kinh tế

Mô hình hóa

$Q = F(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ và giá của các yếu tố là $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$.

-Tình huống cực tiểu hóa chi phí (MHIC)

$$Z = \sum w_i X_i \rightarrow \text{Min với điều kiện:}$$
$$F(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = Q$$

Trong đó Z, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ biến nội sinh; Q, w_i là biến ngoại sinh.

-Tình huống tối đa hóa sản lượng (MHID)

$$Q = F(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) \rightarrow \text{Max với điều kiện}$$
$$\sum w_i X_i = K$$

Trong đó: Q, $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ là biến nội sinh

K, $W_1, W_2, \ldots\ldots, W_n$ là biến ngoại sinh

Cả hai bài toán đều tìm cực trị có điều kiện

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phân tích mô hình: Ta sẽ thực hiện việc phân tích mô hình MHIC, đối với mô hình MHID cách làm và kết quả tương tự.

+/ Giải mô hình: Lập hàm Lagrange của bài toán:

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i + \lambda(Q - F(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \quad (i = \overline{1,n}) & (*) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & (**) \end{cases}$$

Ký hiệu nghiệm tối ưu là: X_i^* $(i = \overline{1,n})$, khi đó điều kiện cần của tối ưu là X_i^* phải thoả mãn hệ phương trình trên. *Trong thực tế với nhiều dạng hàm F, điều kiện cần cũng là điều kiện đủ.*

Ta có: $\dfrac{\partial L}{\partial X_i} = w_i - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = \overline{1,n})$

Suy ra $\dfrac{w_i}{\dfrac{\partial F}{\partial X_i}} = \dfrac{w_j}{\dfrac{\partial F}{\partial X_j}} = \lambda$ với mọi cặp i,j (i≠ j). Từ đây ta có:

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial X_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial X_j}} \quad \text{với mọi } (i \neq j)$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phân tích so sánh tĩnh: Phân tích tác động của sản lượng, giá tới tổng chi phí.

Từ hàm TC(Q, w_1, w_2,…, w_n) có thể dẫn xuất các hàm chi phí trung bình AC, hàm chi phí biên MC:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Q}$$

Từ các hàm này có thể tính hệ số co giãn của tổng chi phí, chi phí trung bình, chi phí biên theo sản lượng.

Người ta đã chứng minh được rằng với TC(Q, w_1, w_2, …, w_n) được định từ mô hình MHIC thì:

$$MC(Q)=\lambda^*$$

$$\frac{\partial TC}{\partial w_i} = X_i^* \quad (i = \overline{1,n})$$

Ta thấy nếu tất cả giá yếu tố đều biến động theo cùng một tỷ lệ, X_i^* sẽ không đổi.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng: $Q = 25K^{0,5}L^{0,5}$
. Cho giá vốn $p_K = 12$, giá lao động $p_L = 3$.
-Tính mức sử dụng K, L để sản xuất sản lượng $Q = Q_0 = 1250$ với tổng chi phí nhỏ nhất?
- Tính hệ số co giãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q_0?
- Nếu giá vốn và lao động đều tăng 10% và giữ nguyên mức sản lượng rthì mức sử dụng vốn, lao động tối ưu sẽ thay đổi như thế nào?
- Phân tích tác động của giá vốn, giá lao động tới tổng chi phí?

Giải: Theo mô hình MHIC ta có bài toán:

$$Z = 12K + 3L \rightarrow Min$$

Với điều kiện ràng buộc: $25K^{0,5}L^{0,5} = 1250$

- Nghiệm tối ưu: K^*, L^* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{MP_K}{MP_L} = \dfrac{p_K}{p_L} \\ 25K^{0,5}L^{0,5} = 1250 \end{cases}$$

$\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ ta có: $(MP_K/MP_L) = (0,5/0,5)(L/K) = p_K/p_L = 4$, suy ra $L = 4K$
Thay $L = 4K$ vào ràng buộc sản lượng ta có $50K = 1250$. Kết quả là $K^* = 25$, $L^* = 100$.
- Ta tính được mức chi phí thấp nhất $TC(Q_0) = 600$, do đó $AC(Q_0) = 600/1250 = 0,48$.

$$MC(Q_0) = \lambda^* = \frac{p_K}{MP_L(K^*L^*)} = \frac{3}{12,5}(K^*)^{0,5}(L^*)^{0,5} = \frac{6}{12,5}$$

Hệ số co giãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q_0 sẽ là:

$$\varepsilon_Q^{TC} = \frac{MC(Q_0)}{AC(Q_0)} = \frac{6}{12,5 \times 0,48} = 1$$

- Vì giá các yếu tố đều tăng cùng một tỷ lệ nên K^*, L^* không đổi.
- Ta có:

$\dfrac{\partial TC}{\partial p_K} = K^* = 25 > 0$, $\dfrac{\partial TC}{\partial p_L} = L^* = 100 > 0$ khi giá vốn, giá lao động tăng thì chi phí sẽ tăng.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình tối đa hoá lợi nhuận của doanh nghiệp: Mô hình xác định mức cung

- *Đặt vấn đề:* Mục tiêu của doanh nghiệp là lợi nhuận tối đa. Doanh nghiệp phải biết kết hợp giữa tối ưu về mặt kỹ thuật, tối ưu về mặt kinh tế với các điều kiện trong thị trường đầu ra. Các điều kiện này bao gồm:

Vị thế của doanh nghiệp trên thị trường (thị phần của doanh nghiệp).
Sự hình thành giá bán sản phẩm, dịch vụ của doanh nghiệp.
Ta sẽ xét hai loại hình doanh nghiệp: cạnh tranh hoàn hảo và độc quyền.

- *Mô hình hoá:*

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ}$$

$$AR(Q) = \frac{TR}{Q}$$

Gọi TC(Q) là chi phí tương ứng với Q (có tính tối ưu về mặt kinh tế), lợi nhuận sẽ là:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

Để xác định mức sản lượng làm tối đa hoá lợi nhuận (mức cung) của doanh nghiệp ta có mô hình:

$$\Pi(Q) \rightarrow Max$$

Mô hình có biến nội sinh là Q, Π; biến ngoại sinh là các biến ngoại sinh (khác Q) có mặt trong các hàm TR và TC.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

- ***Phân tích mô hình:***

+/ Giải mô hình

Điều kiện cần của tối ưu là: $\frac{dTR}{dQ} = \frac{TC}{dQ}$

Như vậy, điều kiện cần để mức sản lượng làm tối đa hoá lợi nhuận là tại mức này doanh thu biên phải bằng chi phí biên. Điều kiện đủ của tối ưu là nếu sản lượng tiếp tục tăng thì doanh thu biên phải nhỏ hơn chi phí biên (lợi ích cận biên giảm dần).

- *Trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo*: Doanh nghiệp là người chấp nhận giá nên giá bán sản phẩm, dịch vụ (p) là biến ngoại sinh và p không đổi theo mức cung của doanh nghiệp. Doanh nghiệp căn cứ vào hàm sản xuất, hàm chi phí và giá p để xác định mức cung tối đa hoá lợi nhuận. Ta có TR(Q) = pQ nên mô hình chỉ có một biến nội sinh là Q. Do MR = p, vì vậy ta có: P = MC(Q) (*)

Tức là, đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo, họ sẽ chọn sản lượng đem cung ứng ra thị trường ở mức mà chi phí biên bằng giá bán sản phẩm, dịch vụ. Phương trình (*) thể hiện quan hệ giữa mức cung của doanh nghiệp và giá bán trên thị trường nhưng dưới dạng hàm ngược.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

- *Trường hợp doanh nghiệp độc quyền*: $p = p(Q)$; trong trường hợp này mô hình có hai biến nội sinh p và Q.

Thông thường p là là hàm nghịch biến của Q nên tồn tại hàm ngược $Q = Q(p)$. Thực chất, cả hai hàm $p = (Q)$ và $Q = Q(p)$ đều thể hiện cùng một mối quan hệ, đó là quan hệ giữa giá và mức cầu của thị trường. Nếu biểu diễn quan hệ này bằng hàm $Q = Q(p)$ thì hàm này gọi là hàm cầu xuôi, ý nghĩa của nó là: nếu doanh nghiệp độc quyền định giá là p thì mức cầu của thị trường (cũng là mức cung của doanh nghiệp) sẽ là Q(p). Nếu biểu diễn quan hệ này bằng hàm: $p = p(Q)$ thì hàm cầu này gọi là hàm cầu ngược, ý nghĩa của nó: nếu doanh nghiệp độc quyền cung ứng cho thị trường mức Q thì phải định giá là p mới cân bằng mức cầu của thị trường. Khi xét doanh nghiệp độc quyền, hàm cầu của thị trường thường được cho dưới dạng hàm cầu ngược. Với hàm cầu ngược, $TR = p(Q)Q$ nên

$MR = p(Q) + \frac{dp}{dQ}Q$ do đó ta có:

$$p(Q) + \frac{dp}{dQ}Q = MC(Q)$$

Để giải mô hình – xác định mức cung làm tối đa hoá lợi nhuận, ta cần giải phương trình và có thể cần kiểm tra điều kiện đủ của nghiệm.

- Phân tích so sánh tĩnh: Ký hiệu Q^*, Π^* là mức sản lượng tối đa hoá lợi nhuận và mức lợi nhuận tối đa. Rõ rang Q^*, Π^* phụ thuộc các biến ngoại sinh có trong mô hình và được gọi là hàm cung, hàm lợi nhuận của doanh nghiệp. Để phân tích tác động của biến ngoại sinh tới Q^* và Π^* ta có thể sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Người ta đã chứng minh được rằng:

+/ Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^*$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: doanh nghiệp có $TR = 58Q - 0,5Q^2$ và $TC = \frac{1}{3}Q^3 - 8,5Q^2 + 97Q + FC$, trong đó Q là sản lượng cà FC là chi phí cố định.
- Với FC = 4, hãy xác định mức sản lượng tối đa hoá lợi nhuận?
- Hãy phân tích tác động của chi phí cố định FC tới mức sản lượng tối đa hoá lợi nhuận và mức lợi nhuận tối đa?

Giải: - Ta có $MR = 58 - Q$, $MC = Q^2 - 17Q + 97$, $\rightarrow$ $58 - Q = Q^2 - 17Q + 97$ (i)

Giải phương trình bậc 2 đối với Q ta được hai nghiệm là 3 và 13. Thử vào điều kiện đủ của tối ưu ta được $Q^* = 13$.

- Chi phí cố định FC không có mặt trong (i) nên Q^* không phụ thuộc vào FC.

Do $\pi^* = TR(Q^*) - \frac{1}{3}Q^3 - 8,5Q^2 + 97Q + FC$ nên $\frac{d\pi^*}{dFC} = -1 < 0$ do đó FC tác động ngược chiều tới mức lợi nhuận tối đa.

Thí dụ 1.9: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có $MC = 2Q^2 - 12Q + 25$, chi phí cố định FC và giá bán sản phẩm là p.
- Xác định hàm tổng chi phí TC với FC = 20. Với p = 39 hãy xác định mức sản lượng và mức lợi nhuận tối ưu?
- Nếu giá p tăng 10% thì mức sản lượng, lợi nhuận tối ưu sẽ biến động như thế nào?

Giải: - Ta có: $TC = \int MC dQ + FC = \frac{2}{3}Q^3 - 6Q^2 + 25Q + 20$

ta có $p = 2Q^2 - 12Q + 25$ (ii)

Giải phương trình trên với p = 39, loại bỏ nghiệm âm, kiểm tra điều kiện đủ của tối ưu được $Q^* = 7$ và $\pi^* = 143,3$.

- Trước hết cần tính hệ số co giãn của Q^* và π^* theo giá p. Để tính $\frac{dQ^*}{dp}$ ta có thể áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn vì Q^* là nghiệm của (ii). Ta có thể viết:

$P - 2Q^{*2} + 12Q^* - 25 = 0$. Gọi biểu thức vế trái là $F(p,Q^*)$, suy ra:

$$\frac{dQ^*}{dp} = \frac{\partial F/\partial p}{\partial F/\partial Q} = -\frac{1}{-4Q^* + 12} = \frac{1}{4Q^* - 12} \rightarrow \quad \varepsilon_p^{Q^*} = \frac{dQ^*}{dp} \times \frac{p}{Q^*} = \frac{p}{(4Q^* - 12)Q^*}$$

Thay p = 39, $Q^* = 7$ ta tính được $\varepsilon_p^{Q^*} = 0,348$.

Theo (1.26) ta có: $\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^* = 7$

Suy ra $\varepsilon_p^{\pi^*} = \frac{d\pi^*}{dp} \times \frac{p}{\pi^*} = \frac{7 \times 39}{143,3} \approx 1,9$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có $TC = Q^3 - Q^2 + 1$ với $Q \geq 1$.
- Với giá thị trường là p, hãy viết phương trình xác định hàm cung của doanh nghiệp?
- Phân tích tác động của giá p tới mức cung tối đa hoá lợi nhuận và tới mức lợi nhuận tối đa của doanh nghiệp?

Giải: - Ta có phương trình xác định hàm cung:

$$P = 3Q^2 - 2Q$$

- Ta phải tính $\frac{dQ^*}{dp}$ và $\frac{d\pi^*}{dp}$. Áp dụng cách tính đạo hàm hàm ẩn đối với phương trình trong câu trên, ta có: $\frac{dQ^*}{dp} = \frac{1}{6Q^* - 2}$. Với $Q^* \geq 1$, hiển nhiên $\frac{dQ^*}{dp} > 0$.

Mặt khác ta có $\frac{d\pi^*}{dp} = Q^* > 0$. Vậy khi giá p tăng thì mức cung và lợi nhuận của doanh nghiệp đều tăng.

Thí dụ: Một doanh nghiệp độc quyền có hàm cầu ngược: $p = 490 - 2Q$ và hàm tổng chi phí: $TC = 0{,}5Q^2AD^{0,5}$ trong đó Q là sản lượng và AD là chi phí quảng cáo.
- Với AD = 9, hãy xác định mức sản lượng và giá bán tối ưu?
- Phân tích tác động của chi phí quảng cáo AD tới mức sản lượng và giá bán tối ưu?

Giải: - Ta có $MC = Q.AD^{0,5}$, với AD = 9, theo (1.25) suy ra:

$$490 - 2Q + (-2Q) = Q.AD^{0,5} = 3Q \qquad \text{(iii)}$$

Giải phương trình trên và kiểm tra điều kiện đủ của tối ưu ta được $Q^* = 70$, thay vào hàm cầu ta có $p^* = 350$.

- Để phân tích tác động của AD tới Q^* ta cần tính $\frac{dQ^*}{dAD}$.

Áp dụng cách tính đạo hàm của hàm ẩn đối với (iii), kết quả là:

$$\frac{dQ^*}{dAD} = \frac{-0{,}5Q^*AD^{-0,5}}{4 + AD^{0,5}}.$$ Do AD > 0, $Q^* > 0$ nên $\frac{dQ^*}{dAD} < 0$.

Vì $p^* = 490 - 2Q^*$, theo công thức tính đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dp^*}{dAD} = \frac{dp^*}{dQ^*} \times \frac{dQ^*}{dAD}.$$ Do $\frac{dQ^*}{dAD} < 0$ và $\frac{dp^*}{dQ^*} = -2$. (vì $p^* = 490 = 2Q^*$), nên $\frac{dp^*}{dAD} > 0$.

Như vậy nếu chi phí quảng cáo tăng lên thì doanh nghiệp sẽ bán được ít hàng hơn nhưng với giá cao hơn. Với AD = 9, $Q^* = 70$ thay vào các biểu thức $\frac{dQ^*}{dAD}$ và $\frac{dp^*}{dAD}$ ta tính được khi tăng một đơn vị chi phí quảng cáo, Q^* sẽ giảm và p^* sẽ tăng bao nhiêu đơn vị. Khi đã có mức biến động tuyệt đối ta có thể xét đến biến động tương đối.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Ta sẽ kết hợp điều kiện tối ưu về kinh tế và tối đa hoá lợi nhuận của doanh nghiệp. Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất Q = F(K, L) trong đó K là vốn, L là lao động; giá vốn là p_K, giá lao động là p_L; giá bán sản phẩm của doanh nghiệp là p. Hãy xác định mức sử dụng vốn và lao động để doanh nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất?

+/ Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta có bài toán:

$$\pi = pQ - (p_K K + p_L L) = pF(K, L) - (p_K K + p_L L) \to Max$$

$$\pi = p(Q)Q - (p_K K + p_L L) = p(F(K, L))F(K, L) - (p_K K + p_L L) \to Max$$

Giải: Đây là bài toán cực trị hai biến, không ràng buộc. Xác định điều kiện cần của tối ưu (với nhiều hàm sản xuất, điều kiện này cũng là điều kiện đủ):

Trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo:

$$MP_K p = p_K; MP_L = p_L \qquad (*)$$

Trường hợp doanh nghiệp độc quyền:

$$P(F(K, L))MP_K = p_K; \qquad P(F(K, L))MP_L = p_L \qquad (**)$$

Giải hệ phương trình này ta được K*, L*; thay vào hàm sản xuất sẽ tìm được Q^* và do đó tính được π^*.

Phân tích so sánh tĩnh: Người ta chứng minh được rằng:

Đối với cả hai loại doanh nghiệp ta luôn có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p_K} = -K^* \text{ và } \frac{\partial \pi^*}{\partial p_L} = -L^*$$

Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^*$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có hàm sản xuất: $Q = K^{0,5} + L^{0,5}$ với $p_K = 6$, $p_L = 4$ và $p = 2$.

- Xác định mức sử dụng vốn và lao động tối ưu?
- Phân tích tác động của giá vốn, giá lao động tới mức lợi nhuận tối đa?

Giải:

Ta có $MP_K = 0,5K^{-0,5}$; $MP_L = 0,5L^{-0,5}$. Theo (*) suy ra: $K^{-0,5} = 6$; $L^{-0,5} = 4$ do đó $K^* = 1/36$; $L^* = 1/16$.

Theo (1.27): $\dfrac{\partial \pi^*}{\partial p_K} = -K^* = -1/36 < 0$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p_L} = -L^* = -1/16 < 0$$

Nên khi giá vốn và giá lao động tăng lợi nhuận của doanh nghiệp sẽ giảm.

Tổng cộng mức cung của tất cả các doanh nghiệp hoạt động trên thị trường ta được mức cung của thị trường, Ký hiệu là S. Vì mức cung của mỗi doanh nghiệp phụ thuộc vào giá p và các yếu tố khác liên quan tới thị trường yếu tố sản xuất, công nghệ nên S cũng sẽ phụ thuộc vào các nhân tố này, tức là $S = S(p, a, b, c,\ldots)$, trong đó a, b, c,..là các tham số đặc trưng cho các yếu tố khác có thể ảnh hưởng đến S.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình hành vi tiêu dùng

Mô hình hàm thỏa dụng

Hộ gia đình quyết định chọn loại hàng nào, mua với khối lượng bao nhiêu phụ thuộc vào:

Sở thích thị hiếu

Thu nhập khả dụng

Giá cả hàng hóa

Mục đích tiêu dùng

- Mô hình hóa sở thích, thị hiếu

$$U(X) = U(X_1, X_2, \ldots, X_m, a, b, c, \ldots)$$

-Phân tích mô hình: Từ hàm U(X) có thể tính:

Độ thỏa dụng biên loại hàng i: $MU_i = \delta U/\delta X_i > 0$

Hệ số thay thế giữa 2 loại hàng: MU_i/MU_j

Mô hình tối đa hóa thỏa dụng

(Mô hình xác định mức cầu các loại hàng của hộ gia đình)

Mô hình hóa: $Z = U(X) \rightarrow Max$ **với điều kiện**

$$\sum p_i X_i = M \text{ (ngân sách tiêu dùng của hộ GĐ)}$$

p_i **: Giá cả hàng hóa i** $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$**: Gỏi hàng**

Điều kiện trên gọi là điều kiện ràng buộc về ngân sách.

$Z, X_1, X_2, \ldots, X_m$ **là biến nội sinh.**

$M, p_1, p_2, \ldots, p_m$ **là biến ngoại sinh**

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình hành vi tiêu dùng

Phân tích mô hình

Phân tích tương tự như mô hình MHIC, ta có kết quả: Điều kiện cần của tối ưu là nghiệm của mô hình phải thỏa mãn ràng buộc ngân sách và hệ phương trình:

$$p_i/p_j = (\delta U/ \delta X_i)/ (\delta U/ \delta X_j) \text{ với } i \neq j$$

(Tỷ giá = hệ số thay thế giữa các loại hàng) thì Umax

Nếu U cố định, khi đó thành phần X^*_i của nghiệm sẽ xác định mức cầu loại hàng i:

$$X^*_i = X^*_i (p_1, p_2, ..., p_m, M) \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

với M là tổng ngân sách tiêu dùng của tất cả các hộ gia đình.

Các hàm cầu trên(phụ thuộc vào giá và thu nhập) gọi là hàm cầu Marshall, thể hiện mức cầu hàng hóa trên thị trường mà ta có thể quan sát, đo lường được.

Tổng cộng mức cầu hàng hóa của các hộ gia đình ta được mức cầu (hàm cầu) của thị trường, ký hiệu là D

$D = D(p_1, p_2, ..., p_m, M)$ với M là tổng ngân sách tiêu dùng của tất cả các hộ gia đình

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Hàm thoả dụng của hộ gia đình khi tiêu dùng hàng hoá Acó dạng: $U = 40X_A^{0,25}X_B^{0,5}$ trong đó X_A, X_B là mức tiêu dùng hàng A, B. Giá hàng được cho như sau: $p_A = 4$, $p_B = 10$.

- Có ý kiến cho rằng hàng hoá A luôn có thể thay thế hàng hoá B và tỷ lệ thay thế là 1:1. Hãy nhận xét ý kiến này?
- Xác định mức cầu hàng hoá A, B của hộ gia đình nếu thu nhập M = 600.

Giải:

Tính hệ số thay thế giữa hai hàng hoá MU_A/MU_B. Ta có:

$$MU_A = 10X_A^{-0,75}X_B^{0,5} \text{ và } 20X_A^{0,25}X_B^{-0,5}$$

Như vậy, $MU_A/MU_B = X_B/2X_A > 0$ do đó hai hàng hoá này luôn thay thế được cho nhau. Cũng theo kết quả này, để thay thế một đơn vị hàng A cần $X_B/2X_A$ đơn vị hang B, tỷ số $X_B/2X_A$ không nhất thiết bằng 1, do đó ý kiến cho rằng tỷ lệ thay thế là 1:1 là không chính xác.

- Ta có hệ phương trình xác định mức tiêu dung tối ưu:

$$MU_A/MU_B = p_A/p_B$$
$$600 = 40X_A^{0,25}X_B^{0,5}$$

Từ câu trên ta đã biết $MU_A/MU_B = X_B/2X_A$ nên hệ phương trình trở thành:

$$X_B/2X_A = 2/5$$
$$600 = 40X_A^{0,25}X_B^{0,5}$$

Giải hệ trên ta được $X_A^* = 50$; $X_B^* = 400$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình cân bằng thị trường

Mô hình cân bằng một thị trường - Cân bằng riêng

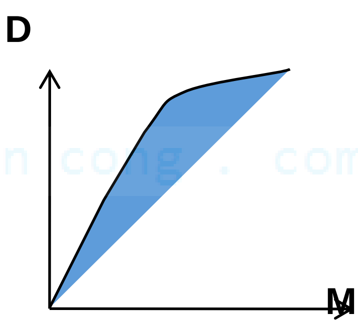
Hàm cung
S = S(p, a, b, c,..)
$\delta S/ \delta p > 0$
Hàm ngược:
$p_S = p(S, a, b, ...)$: giá cung

Hàm cầu
D= D(p, p_i, M, α, β....)
$\delta D/ \delta p < 0$
Hàm ngược:
$p_D = p(D, p_i, M, \alpha, \beta ....)$: Giá cầu

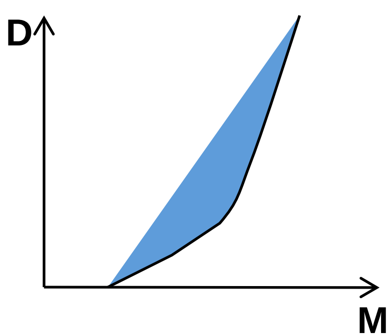
Phân tích so sánh tĩnh

- Quan hệ mức cầu – Thu nhập

Nếu tất cả các giá đều cố định, thì mức cầu chỉ phụ thuộc vào thu nhập (Danh nghĩa = thực tế):
D = D(M). Đường cong Engel
Nếu dD/dM > 0: hàng hóa bình thường (hàng thông thường và hàng cao cấp)
Nếu dD/dM < 0: Hàng cấp thấp
Nếu $d^2D/dM^2 < 0$: Hàng thiết yếu.
Nếu $d^2D/dM^2 > 0$: Hàng xa xỉ



Hàng thiết yếu



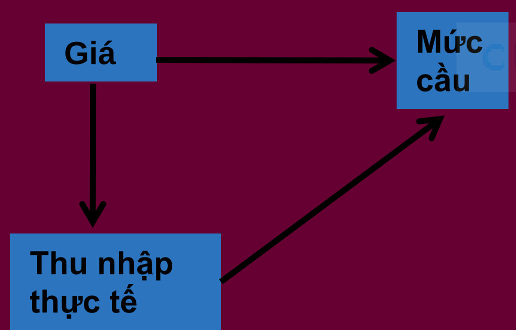
Hàng xa xỉ

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Quan hệ mức cầu – giá cả

Hàm cầu $D = D(p, p_i, M(p, p_i))$

Ảnh hưởng của giá



$$dD/dp = (\delta D/\delta p) + (\delta D/\delta M)(\delta M/\delta p)$$

Giá hàng p tăng ảnh hưởng trực tiếp đến mức cầu và làm cho người tiêu dùng phải tìm hàng hóa thay thế (mức cầu hàng đang xét giảm do $\delta D/\delta p < 0$ và gián tiếp làm giảm thu nhập vì $\delta M/\delta p < 0$. Ảnh hưởng tổng cộng phụ thuộc vào dấu và độ lớn của $\delta D/\delta M$.

Nếu hàng hóa đang xét là hàng bình thường $\delta D/\delta M > 0$, p tăng sẽ làm giảm mức cầu vì khi này $dD/dp < 0$.

Nếu p tăng mà D tăng thì hàng hóa này là hàng cấp thấp $\delta D/\delta M < 0$.

Để đo lường ảnh hưởng của biến động giá hàng hóa i tới mức cầu hàng hóa đang xét, ta tính: $dD/dp_i = (\delta D/\delta p_i) + (\delta D/\delta M)(\delta M/\delta p_i)$. Nếu $dD/dp_i > 0$ thì 2 mặt hàng thay thế được cho nhau, còn nếu $dD/dp_i < 0$ thì gọi là 2 mạt hàng bổ sung

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình cân bằng thị trường riêng

+/ Mô hình hóa: - Hàm cung: S = S(p, a, b,...); δS/ δp > 0

- Hàm cầu: D = D(p, α, β....); δD/ δp < 0

Điều kiện cân bằng thị trường: S = D với p là giá cả hàng hóa, a, b, α, β....là các biến ngoại sinh

+/ Phân tích mô hình: Giải phương trình S = D ta xác định được giá cân bằng ($\bar{p}$) và sản lượng cân bằng ($\bar{Q}$) chúng phụ thuộc vào các biến ngoại sinh

- Phân tích tác động của các biến ngoại sinh đến giá và lượng cân bằng

Nếu có các biểu thức tường minh thì để nghiên cứu ảnh hưởng của cá biến ngoại sinh, ta lấy đạo hàm riêng theo biến ngoại sinh từ phương trình cân bằng và theo công thức tính đạo hàm hàm ẩn.

Thí dụ: Xét ảnh hưởng của biến ngoại sinh a tới giá cân bằng. Phương trình cân bằng có thể viết dưới dạng: S – D = 0. Đây là PT xác định hàm ẩn $\bar{p}$ theo a, b, α, β..... Ta có:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial a} = \frac{\partial S / \partial a}{\partial D / \partial p - \partial S / \partial p}$$

Các đạo hàm riêng ở vế phải được tính tại p = $\bar{p}$

Trong trường hợp quan hệ cung cầu trên thị trường không cân bằng thì cơ chế giá sẽ hoạt động và đưa quan hệ về trạng thái cân bằng. (*Sơ đồ mạng nhện*)

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Giả sử hàm cung, hàm cầu có dạng:

$S = -a + bp$; $a, b > 0$

$D = \alpha - \beta p$; $\alpha, \beta > 0$

Có thể giải thích ý nghĩa của các hệ số a, b, α, β như sau:

Cho S = 0 (không có cung trên thị trường), suy ra p = a/b. Như vậy có thể coi a/b là mức giá giới hạn tối thiểu mà người sản xuất chấp nhận.

Cho D = 0 (không có cầu), suy ra p = α/β, có thể coi α/β là mức giá giới hạn tối đa người tiêu dùng chấp nhận.

S = D tức là $-a + bp = \alpha - \beta p$, giải phương trình này ta được mức giá cân bằng:

$$\bar{p} = \frac{\alpha + a}{\beta + b} \text{ và lượng cân bằng } \bar{Q} = \frac{\alpha b - \beta a}{\beta + b}.$$

Phân tích tác động của a tới $\bar{p}$, ta có $\frac{\partial \bar{p}}{\partial a} = \frac{1}{\beta + b} > 0$ do giả thiết b, β > 0. Chú ý rằng ta có thể tính $\frac{\partial \bar{p}}{\partial a}$ từ phương trình cân bằng và sẽ được kết quả tương tự.

Thí dụ: Mức cầu loại hàng (D) phụ thuộc vào giá của hàng hoá đó (p) và thu nhập người tiêu dùng (M) có dạng sau;

$$D = 1,5M^{0,3}p^{-0,2}$$

Mức cung loại hàng trên (S) có dạng: $S = 1,4p^{0,3}$.

- Xác định hệ số co giãn của cầu theo giá, theo thu nhập?
- Xem xét tác động của thu nhập tới mức giá cân bằng?

Giải:

Hàm cầu có dạng Cobb – Douglas nên ta có: $\varepsilon_p^D = -0,2$, $\varepsilon_M^D = 0,3$.

S = D, tức là $1,4p^{0,3} = 1,5M^{0,3}p^{-0,2}$. Để phân tích tác động của thu nhập tới giá cân bằng ta cần tính $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M}$. Ta có thể tính biểu thức này từ phương trình cân bằng với việc áp dụng tính đạo hàm hàm ẩn. Ta có:

$$1,4p^{0,3} = 1,5M^{0,3}p^{-0,2} = 0$$

Vì vậy $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M} = \frac{(1,5\times0,3)M^{-0,7}p^{-0,2}}{(1,4\times0,3)p^{-0,7}+(1,5\times0,2)M^{0,3}p^{-1,2}}$ và tính được tại mức giá cân bằng. Do M, $\bar{p}$ > 0 nên $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M} > 0$, tức là khi thu nhập tăng (giảm) sẽ làm giá cân bằng tăng (giảm).

Chú ý: nếu các hàm cung, cầu trong mô hình cân bằng thị trường được cho bằng các hàm ngược, thì mô hình sẽ có dạng:

$p_S = p(S, a, b,\ldots)$

$p_D = p(D, \alpha, \beta,\ldots)$

$p_S = p_D$

Cách thức phân tích mô hình hoàn toàn tương tự như trên.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

+/ Mô hình cân bằng vĩ mô – Mô hình cân bằng thị trường hàng hoá – dịch vụ:

Đặt vấn đề: Phân tích kinh tế vĩ mô là phân tích mối liên hệ giữa các biến số kinh tế tổng hợp (biến gộp) đặc trưng cho hoạt động của toàn bộ nền kinh tế. Trong nền kinh tế thị trường, hoạt động của nền kinh tế diễn biến trong ba thị trường gộp: thị trường hàng hoá – dịch vụ, thị trường tiền tệ và thị trường lao động. Cả ba thị trường này đều có liên hệ với nhau. Đối với nền kinh tế mở, tham gia vào mức tổng cung, tổng cầu còn có các chủ thể bên ngoài quốc gia. Nghiên cứu và phân tích các nhân tố tác động đến tổng cung, tổng cầu do đó đến tình huống cân bằng của cả ba thị trường là việc quan trọng trong phân tích và hoạch định chính sách kinh tế của Chính phủ.

Mô hình hoá: Các chỉ tiêu kinh tế vĩ mô sử dụng trong mô hình là các chỉ tiêu thực (tính theo giá cố định).

Mô tả cung: Vì ta chỉ xét thị trường hàng hoá – dịch vụ nên tổng cung của nền kinh tế (mức sản lượng, kết qủa sản xuất) được coi là ngoại sinh và ký hiệu là Q. Tổng cung có thể được đo bằng GDP hoặc (GNI).

Mô tả cầu: Tổng cầu của nền kinh tế bao gồm các bộ phận cấu thành:

- Tiêu dùng của dân cư được giả thiết là có một bộ phận không phụ thuộc và thu nhập – phần tiêu dùng tự định C_0 và phần phụ thuộc vào thu nhập khả dụng, như vậy ta có:

$$C = C_0 + \beta(Y - T)$$

Trong đó Y: thu nhập quốc dân, T: thuế và giả thiết là $C_0 > 0$, $0 < \beta < 1$. Ta có thể xem β là khuynh hướng tiêu dùng biên (MPC).

- Đầu tư I trong trường hợp đơn giản thường được giả thiết là gồm một phần không phụ thuộc vào lãi suất – I_0 và một phần phụ thuộc tuyến tính theo lãi suất r, ta có:

$$I = I_0 - \alpha r \text{ với } \alpha > 0$$

Nếu nhập khẩu là IM, tổng cầu trong nước sẽ là: C + I + G + EX – IM.

- Thuế T được giả thiết gồm khoản thuế thu nhập (δY) và các loại thuế khác (γ), như vậy $T = \gamma + \delta Y$ với $\gamma > 0$, $0 < \delta < 1$.

Chúng ta có thể coi δ là thuế suất của thuế thu nhập (thuế suất gộp).

Điều kiện cân bằng thị trường hàng hoá – dịch vụ:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

Với điều kiện:

$$C = C_0 + \beta(Y - T) \text{ với } C_0 > 0,\ 0 < \beta < 1.$$
$$I = I_0 - \alpha r \text{ với } \alpha > 0$$
$$T = \gamma + \delta Y \text{ với } \gamma > 0,\ 0 < \delta < 1$$

Các biến nội sinh của mô hình gồm: Y, C, I, T các biến còn lại là biến ngoại sinh.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phân tích mô hình:

Giải mô hình: Giải hệ phương trình trong mô hình với các ẩn số là biến nội sinh, ta được:

$$\overline{Y} = \frac{C_0 - \beta\gamma + I_0 - \alpha r + G + EX - IM}{1 - \beta + \beta\delta}$$

Phân tích so sánh tĩnh; phân tích tác động của chính sách tài khoá:

Để xem xét tác động của chính sách tài khoá (thi – chi ngân sách nhà nước) đối với sản xuất (Y) ta cần tính các biểu thức: $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G}$; $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \gamma}$; $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \delta}$. Từ (1.31) ta dễ dàng tính được:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{1 - \beta + \beta\delta} < 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \delta} = \frac{-\beta\overline{Y}}{1 - \beta + \beta\delta} < 0 \qquad (3)$$

Như vậy khi chính phủ tăng chi tiêu thì theo (1.32) $\overline{Y}$ sẽ tăng, tức có kích cầu, mặt khác vế phải của (1) lớn hơn 1 nên mức tăng của tổng cầu sẽ lớn hơn so với mức tăng chi tiêu của chính phủ. Như vậy việc tăng chi tiêu đã được khuyếch lên, vì lý do này nên $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G}$ được gọi là nhân tử gia tăng chi tiêu chính phủ.

Khi chính phủ tăng thuế thì theo (2) và (3) ta thấy $\overline{Y}$ giảm.

Tuỳ thuộc vào tình huống cụ thể, mô hình cân bằng vĩ mô trên có thể đơn giản hoá, thí dụ, đầu tư I, thuế T có thể coi là ngoại sinh, nhưng ta có thể mở rộng mô hình, thí dụ; xuất khẩu, nhập khẩu có thể coi là biến nội sinh.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Thí dụ: Một số chỉ tiêu vĩ mô của một nền kinh tế có các mối liên hệ sau:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$
$$C = \beta Y_D \quad \text{với } 0 < \beta < 1.$$
$$IM = \rho Y_D \quad \text{với } 0 < \rho < 1$$
$$Y_D = (1 - t)Y \quad \text{với } 0 < t < 1$$

Trong đó Y: thu nhập, C: tiêu dùng của dân cư, Y_D: thu nhập khả dụng, I: đầu tư.
G: Chi tiêu chính phủ, EX: xuất khẩu, IM: nhập khẩu, t: thuế suất thuế thu nhập.

Với G = 400 tỉ đồng, I = 250 tỉ đồng, EX = 250 tỉ đồng, $\beta = 0{,}8$, $\rho = 0{,}2$, $t = 0{,}1$. Hãy xác định thu nhập và tình trạng ngân sách nhà nước?

Với các chỉ tiêu ở câu trên, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng tới thu nhập. Hãy nhận xét ý kiến này?

Giải: - Giải mô hình trên ta được:

$$\overline{Y} = \frac{I + G + EX}{1 - \beta(1 - t) + \rho(1 - t)}$$

Thay số liệu vào ta tính được $\overline{Y}$ = 9000tỷ. Thu ngân sách là t$\overline{Y}$ = 900 tỷ, chi ngân sách G = 400 tỷ nên có thặng dư ngân sách.

Để có được nhận xét về ý kiến nêu ra, ta cần tính độ co giãn của $\overline{Y}$ theo G và EX.

Ta có: $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \dfrac{1}{1 - \beta(1 - t) + \rho(1 - t)}$ và $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial EX} = \dfrac{1}{1 - \beta(1 - t) + \rho(1 - t)}$ tuy chúng bằng nhau nhưng do $\dfrac{G}{\overline{Y}} > \dfrac{EX}{\overline{Y}}$ nên $\varepsilon_G^{\overline{Y}} > \varepsilon_{EX}^{\overline{Y}}$. Khi giảm 10% xuất khẩu, thu nhập giảm $(10\varepsilon_G^{\overline{Y}})$%, tác động cuối cùng là thu nhập sẽ tăng $(10(\varepsilon_G^{\overline{Y}} - \varepsilon_{EX}^{\overline{Y}}))$%. Vậy ý kiến trên là không đúng.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Mô hình kinh tế động.

Các mô hình kinh tế có chứa biến thời gian gọi là mô hình kinh tế động. Để minh hoạ mô hình động và việc phân tích, ta xét hai mô hình đơn giản: mô hình cân bằng giá dạng tuyến tính và mô hình tăng trưởng kinh tế Domar.

- *Mô hình cân bằng giá (trường hợp tuyến tính):*

- Đặt vấn đề: Theo thời gian, giá luôn được điều chỉnh bởi nhiều tác động, đặc biệt là do chênh lệch cung, cầu. Phải chăng quá trình tương tác giữa cung và cầu trên thị trường luôn dẫn đến giá cân bằng? Câu trả lời không hẳn như vậy.

- Thiết lập mô hình: Giả sử trên thị trường tại thời điểm t, giá hàng hoá tác động đến cung, cầu như sau:

Mô hình a: $D_t = a - bp_t$ (a, b > 0)

$S_t = -c + dp_t$ (c, d > 0)

Điều kiện cân bằng: $D_t = S_t$

Mô hình b: $D_t = a - bp_t$ (a, b > 0)

$S_t = -c + dp_{t-1}$ (c, d > 0)

Trong đó D_t, S_t, p_t là mức cầu, mức cung, mức giá ở thời điểm t. p_{t-1} là mức giá ở thời điểm (t -1).

Điều kiện cân bằng: $D_t = S_t$

Giả thiết trong mô hình b có thể chấp nhận dễ dàng hơn trong mô hình a. Tuy vậy chúng ta chỉ cần bàn đến tính chất tồn tại giá cân bằng nên người học có thể tự tìm hiểu tình huống này.

- Phân tích mô hình:

Từ các phương trình cung - cầu và điều kiện cân bằng ta có:

$\bar{p} = \dfrac{a+c}{b+d}$ Nếu tại t = 0 ta đã có $p_0 = \bar{p}$ thì giá cân bằng ở mọi thời điểm.

Nếu tại t = 0 mà $p_0 \neq \bar{p}$ thì theo quy luật thị trường tồn tại chênh lệch cung – cầu (D - S), mức này gọi là mức dư cầu. Giả sử mức dư cầu tại t quyết định sự thay đổi của giá p (sự thay đổi diễn ra theo thời gian) và quan hệ này có dạng:

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S) \quad \text{với } k > 0$$

Thay các hàm cung, cầu vào phương trình này ta có:

$$\frac{dp}{dt} + k(b - d)p = k(a + c)$$

Phương trình trên là phương trình vi phân tuyến tính với hệ số là hằng số nên có thể dễ dàng giải và cho nghiệm:

$$P_t = (p_0 - \bar{p})e^{-k(b+d)t} + \bar{p}$$

Khi t $\rightarrow \infty$ ta hấy p_t dần tới giá cân bằng $\bar{p}$.

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

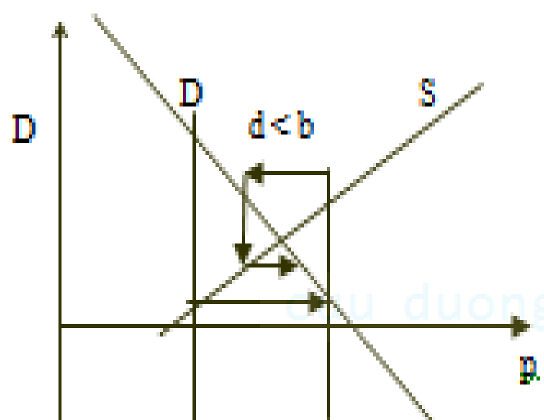
Với mô hình b mọi chuyện không hoàn toàn như ở mô hình a. Từ điều kiện cân bằng ta có:

$$p_t + \frac{d}{b}p_{t-1} = \frac{a+c}{b}$$

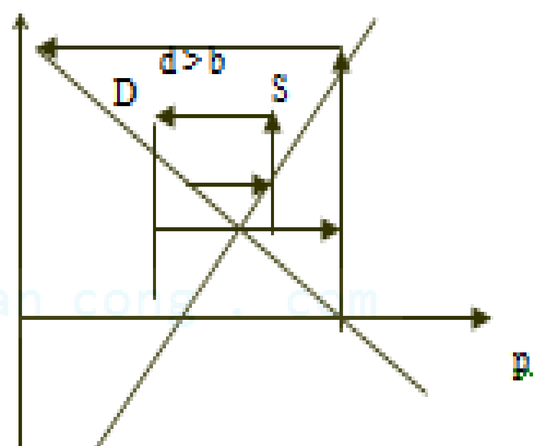
Nghiệm của phương trình này với p_0 cho trước là:

$$p_t = \left(p_0 - \frac{a+c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{a+c}{b+d}$$

Điều kiện p_t có giới hạn khi t tăng vô hạn là d < b. Nếu d > b thì giá sẽ không hội tụ



Tồn tại giá cân bằng



Không tồn tại giá cân bằng

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

- Mô hình tăng trưởng kinh tế Domar.

Đặt vấn đề: Khi nghiên cứu sự tăng trưởng của một nền kinh tế, một trong những vấn đề được quan tâm là xác lập mối liên hệ giữa lượng vốn đầu tư và sự gia tăng sản lượng (đầu ra). Nếu biết được mối liên hệ này ta có thể xác định được nhu cầu đầu tư của nền kinh tế để đảm bảo yêu cầu tăng trưởng đã dự kiến.

Mô hình hoá:

Các giả thiết của mô hình: Năng lực sản xuất của nền kinh tế tại thời điểm t được mô tả bởi hàm sản xuất chỉ phụ thuộc (tuyến tính) vào lượng vốn, không tính tới lao động cũng như tiến bộ kỹ thuật, công nghệ. Ký hiệu Q(t), K(t) là năng lực sản xuất, lượng vốn ở thời điểm t, ta có $Q(t) = \rho K(t)$ với tham số $\rho > 0$ và là hằng số.

Sự gia tăng của lượng vốn trong chu kỳ xem xét là do đầu tư trong kỳ (đầu tư không có độ trễ và cũng không xét tới khấu hao vốn). Hoạt động đầu tư ngoài việc tác động tới năng lực sản xuất (thông qua vốn) còn tác động tức thời, không có trễ tới tổng cầu (thu nhập) theo dạng "nhân tử" tương tự như mô hình cân bằng vĩ mô. Gọi Y(t), I(t) là tổng cầu, đầu tư của kỳ t thì:

$$\frac{dK}{dt} = I(t)$$

$$Y(t) = \frac{1}{s} I(t)$$

Tham số s với $0 < s < 1$ và là hằng số, gọi là khuynh hướng tiết kiệm biên (MPS).

Điều kiện cân bằng: Năng lực sản xuất của nền kinh tế = Tổng cầu, tức là $Q(t) = Y(t)$.

Mô hình tăng trưởng Domar:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = \frac{1}{s} I(t) \quad (2)$$

$$Q(t) = \rho K(t) \quad (3)$$

$$Q(t) = Y(t) \quad (4)$$

Các biến nội sinh: Y, Q, K, I; biến ngoại sinh: t

Đặt $\frac{1}{\rho} = v$, khi này v được gọi là hệ số gia tăng vốn – sản lượng hoặc hệ số ICOR ($\Delta K/\Delta Y$), v cho biết số vốn cần thiết để gia tăng 1 đơn vị sản lượng (đầu ra).

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Phân tích mô hình:

Giải mô hình: Trong trường hợp mô hình động, ta cần biểu diễn các biến nộ sinh theo thời gian, tức là xác định quỹ đạo của của chúng xuất phát từ thời kỳ gốc. Cho $t = 0$ là thời kỳ gốc và ký hiệu $Y_0 = Y(0)$, $Q_0 = Q(0)$, $K_0 = K(0)$, $I_0 = I(0)$.

Lấy đạo hàm theo thời gian t cả hai vế của (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} \qquad (5)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \rho\frac{dK}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dY}{dt} \qquad (7)$$

Từ (5), (6), (7) ta có:

$$\rho I(t) = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$$

Suy ra: $$\frac{dI}{dt} - \rho s I(t) = 0 \qquad (8)$$

Đây là phường trình vi phân đôi với I, nghiệm của phương trình này với điều kiện ban đầu $I_0 = I(0)$ là $I(t) = I_0 e^{\rho st}$. Thay vào các phương trình trong mô hình ta tìm được:

$$Y(t) = Y_0 e^{\rho st},\ K(t) = K_0\, e^{\rho st},\ Q(t) = Q_0 e^{\rho st}$$

CHƯƠNG I
GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

- ***Phân tích kết quả***:

Ta nhận thấy rằng nhịp tăng trưởng của Y, K, I, Q đều bằng nhau và bằng ρs = s/v và là hằng số. Sự tăng trưởng này của nền kinh tế gọi là tăng trưởng cân đối (các chỉ tiêu tăng cùng nhịp độ).

Ta xét trường hợp: Giả sử trong thực tế đầu tư tăng với nhịp độ r và $r \neq \rho s$, khi này sẽ xảy ra tình trạng gì đối với nền kinh tế? Ta có $I(t) = I_0 e^{rt}$ suy ra $\frac{dI}{dt} = rI_0e^{rt}$. Từ (5), (6) suy ra $\frac{dY}{dt} = \frac{r}{s}I_0e^{rt}$, $\frac{dQ}{dt} = \rho I(t) = \rho I_0 e^{rt}$.

Ta xét tỷ số $\frac{dY/dt}{dQ/dt}$, tử số phản ánh tác động của đầu tư tới tổng cầu, còn mẫu số thể hiện tác động tới năng lực sản xuất. Theo kết quả tên ta có $\frac{dY/dt}{dQ/dt} = \frac{r}{\rho s}$. Nếu đầu tư tăng nhanh hơn mức cần thiết ($r > \rho s$) thì $\frac{dY/dt}{dQ/dt} > 1$, do tác động của đầu tư tới năng lực sản xuất yếu hơn tới tổng cầu, nên kinh tế sẽ ở tình trạng năng lực sản xuất không đáp ứng được nhu cầu, tức là thiếu hụt năng lực sản xuất. Ngược lại, đầu tư tăng chậm hơn mức cần thiết ($r < \rho s$) thì nền kinh tế sẽ xảy ra tình trạng thừa năng lực sản xuất. Đây là một nghịch lý gây ra nhiều tranh luận giữa các nhà kinh tế học. Có thể do mô hình Domar còn quá đơn giản nên xuất hiện nghịch lý này.

Mô hình được sử dụng trong thực tế là mô hình rời rạc theo thời gian, khi này mô hình có dạng:

$$K(t) - K(t-1) = I(t)$$
$$Y(t) = \frac{1}{s}I(t)$$
$$Q(t) = \rho K(t)$$
$$Q(t) = Y(t)$$

Nghiệm của mô hình sẽ là:

$$Y(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}Y(t-1)\right);$$
$$K(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}Y(t-1)\right);$$
$$I(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}I(t-1)\right)$$

Nhịp tăng trưởng của các chỉ tiêu đều là $\frac{s}{v-s}$

Thí dụ 1.18: Nếu hệ số ICOR v = 2,8 và tỷ lệ tiết kiệm s = 0,2 thì nhịp tăng trưởng của Y là 0,2/(2,8 – 0,2) ≈ 0,07 hay 7%.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Một số tình huống trong hoạt động kinh tế và mô hình bài toán QHTT

Bài toán lập kế hoạch sản xuât

CTy RM sản xuất 2 loại SP (A và B) Nguyên liệu đầu vào gồm: lạo I và loại II, trữ lượng tương ứng là 6 tấn và 8 tấn. Một đơn vị SP A cần: 2 tấn nguyên liệu loại I và 1 tấn nguyên liệu loại II. Hai số tương ứng của SP B là 1 tấn và 2 tấn. Qua điều tra thị trường biết:

-Nhu cầu SP A ≤ nhu cầu SP B 10 đơn vị

-Nhu cầu cực đại của SP B là 20 đơn vị

- Dự kiến p_A = 2.000USD; p_B = 3.000USD

Cty cần sản xuất số lượng SP mỗi loại bao nhiêu để có tổng doanh thu cực đại trong kỳ.

Mô hình bài toán: Gọi x_1, x_2 là số lượng SP mỗi loại cần SX trong kỳ. Khi đó tổng doanh thu sẽ là:

$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$ (nghìn đồng)được gọi là hàm mục tiêu

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$-x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_2 \leq 20$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

x = (x_1, x_2) là phương án chấp nhận được nếu nó thỏa mãn các ràng buộc (nghiệm chấp nhận được)

Tổng quát, ký hiệu:

a_{ij} là lượng nguyên liệu đầu vào loại i cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j.

b_i là trữ lượng nguyên liệu loại i mà doanh nghiệp có thể sử dụng trong kỳ (i = 1, 2,... m).

c_j là tiền lãi, giá bán hay giá thành một đơn vị sản phẩm loại j (j = 1, 2, ..., n)

x_j là số đơn vị sản phẩm loại j mà doanh nghiệp cần sản xuất trong kỳ.

Mô hình toán học của bài toán (cực đại tổng doanh thu):

Tìm x = (x_1, x_2,......, x_n) sao cho:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \ i = 1, 2, ..., m \qquad (2.1)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n$$

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Một số tình huống trong hoạt động kinh tế và mô hình bài toán QHTT

Bài toán xác định khẩu phần ăn

Cần chế biến một món ăn từ nhiều thành phần (thực phẩm) sao cho đủ chất bổ (đạm, béo, đường,..) sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Giả sử có n thành phần, với giá một đơn vị thành phần là c_j ($j = 1, 2,..., n$). Đồng thời có m chất. Biết một đơn vị thành phần j chứa a_{ij} đơn vị chất i ($i = 1, 2,..., m$) và mức chấp nhận được số đơn vị chất i trong hỗn hợp là nằm giữa $l_i \geq 0$ và $u_i \geq 0$.

Mô hình bài toán: Gọi x_i là số lượng đơn vị khối lượng của thành phần j trong một đơn vị khối lượng của món ăn. Khi đó, ta có:

Tìm x_j ($j = 1, 2, ...n$) sao cho:

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 +...+c_nx_n \rightarrow Min$ được gọi là hàm mục tiêu

ĐK ràng buộc: $l_i \leq \sum a_{ij} x_j \leq u_i$; $i = 1, 2, ..., m$

$\sum x_j = 1$

$x_j \geq 0; j = 1, 2,...., n$

$x = (x_1, x_2)$ là phương án chấp nhận được nếu nó thỏa mãn các ràng buộc (nghiệm chấp nhận được)

Bài toán vận tải

Hàng hóa cần v/c từ m kho đếm n điểm tiêu thụ. Lượng hàng ở kho i là $a_i \geq 0$ ($i = 1, 2, ...,m$) và các điểm tiêu thụ j có nhu cầu là b_j ($j = 1, 2,..., n$). Cước phí v/c một đơn vị hàng từ i đến j là c_{ij} . Giả sử tổng khối lượng hàng ở các kho bằng tổng nhu cầu ở các điểm tiêu thụ. Hãy lập một kế hoạch phân phối hàng sao cho tổng chi phí v/c là nhỏ nhất đảm bảo các kho phát hết hàng và các điểm tiêu thụ thu đủ hàng?

Mô hình bài toán: Gọi x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ i đến j. Khi đó ta có

$f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} +...+c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ...+ c_{2n}x_{2n} + ...+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} +.......+ c_{mn} x_{mn} \rightarrow Min$ được gọi là hàm mục tiêu

ĐK ràng buộc: $c_{i1}x_{i1} + c_{i2}x_{i2} +...+c_{in}x_{in} = a_i$; $i = 1, 2, ..., m$

$c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j} +...+c_{mj}x_{mj} = b_j$; $j = 1, 2, ..., n$

$x_{ij} \geq 0; i = 1,2,..., m; j = 1, 2,...., n$

$x = (x_{ij})_{m.n}$ là phương án chấp nhận được nếu nó thỏa mãn các ràng buộc (nghiệm chấp nhận được)

Bài toán QHTT tổng quát

Tìm các biến số $x_1, x_2,..., x_n$, sao cho hàm mục tiêu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min(Max)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, 2,..., m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \ (i = m_1+1,..., m_1 + m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = m_1 + m_2+1,..., m)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2,..., n_1);\ x_j \le 0 \ (j = n_1 +1,..., n_1+n_2 \le n)$$

trong dó a_{ij}, b_i, c_j là các hằng số cho trước. x là biến cần tìm hay còn gọi là phương án, Có m ràng buộc chính và n ràng buộc dấu.

Điểm $x = (x_1,x_2,...x_n) \in R^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán gọi là một p/án. Tập hợp tất cả các p/án, ký hiệu là D, gọi là miền ràng buộc hay miền chấp nhận được. Một p/án làm cho f(x) đạt cực trị gọi là p/án tối ưu (lời giải của bài toán)

Chú ý

- Các ràng buộc chính được sắp xếp theo thứ tự: ≤, ≥ và =.

- m_1 là số ràng buộc ≤; m_2 là số ràng buộc ≥; m là tổng số ràng buộc; n là số biến, n_1 là số ràng buộc $x_j \ge 0$; n_2 là số ràng buộc $x_j \le 0$ (có thể $n_1 = n_2 = 0$)

- Với bài toán bất kỳ, bao giờ cũng có thể viết các ràng biệt chính ở dạng sao cho $b_i \ge 0$ (i = 1, 2,..., m). Nêu $b_i \le 0$ ta nhân hai vế của ràng buộc với -1, rồi đổi chiều dấu bất đẳng thức và sắp xếp lại thứ tự các ràng buộc chính nếu cần

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Bài toán QHTT dạng chuẩn và dạng chính tắc

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min(Max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots., n)$$

Bài toán QHTT dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min(Max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots., n)$$

Để viết bài toán gọn hơn, ta dùng ký hiệu véc tơ và ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots. a_{mn} \end{vmatrix} \quad \mathbf{A_j} = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{vmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{vmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix}$$

Min{f(x) = <c.x>: Ax ≥ b; x ≥ 0 hoặc Max{f(x) = <c.x>: Ax ≤ b; x ≥ 0

Min{f(x) = <c.x>: Ax = b; x ≥ 0 hoặc Max{f(x) = <c.x>: Ax = b; x ≥ 0

<c.x> tích vô hướng của hai véc tơ c và x

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Chuyển đổi dạng bài toán qui hoạch tuyến tính.

a) Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \text{ và } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$$

b) Mỗi ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \text{ hoặc } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$$

có thể đưa về rạng buộc đẳng thức nhờ đưa thêm vào một biến mới, gọi là biến phụ (hay biến bù), $x_{n+i} \ge 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{ hoặc } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

c) Mỗi ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, có thể viết lại thành $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge -b_i$ hoặc ngược lại.

d) Nếu biến x_j không bị ràng buộc về dấu (biến tùy ý) thì ta có thể thay nó bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với $x_j^+ \ge 0, x_j^- \ge 0$. Còn nếu $x_j < 0$ thì bằng cách đặt biến mới $y_j = -x_j$ ta sẽ có $y_j \ge 0$.

e) Bài toán tìm cực đại: $g \to$ Max có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu: $f = -g \to$ Min với cùng các ràng buộc và ta có hệ thức:

$$\max\{g(x) : x \in D\} = -\min\{f(x) : x \in D\}.$$

Thí dụ 2.1: Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc và chuẩn tắc:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 \quad \min$$

với điều kiện:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

a) Dạng chính tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \ge 0$ và thêm hai biến phụ $x_6, x_7 \ge 0$, ta đi đến bài toán:

$$f(x) = - x_2 + 2x_4 - 2x_5 \quad \min$$

với điều kiện:

$$- 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$
$$- 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - x_7 = 3$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4$$
$$x_j \ge 0, (j = 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

b) Dạng chuẩn tắc: Bằng cách thay $x_1 = x_4 - x_5$ với $x_4, x_5 \ge 0$, đổi dấu hai vế bất đẳng thức đầu và thay đẳng thức cuối bằng hai bất đẳng thức ≥, ta đi đến bài toán:

$$f(x) = - x_2 + 2x_4 - 2x_5 \quad \min$$

với điều kiện:

$$2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge -2$$
$$- 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \ge 3$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \ge 4$$
$$-x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge -4$$
$$x_j \ge 0, (j = 2, 3, 4, 5)$$

Phương pháp hình học giải qui hoạch tuyến tính 2 biến.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính với hai biến số:

$\max\{f(x) = c_1x_1 + c_2x_2: x = (x_1, x_2)\}$ với

$D = \{ x\ R^2: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_i, i = 1, 2, ..., m; x_j \ge 0, j = 1, 2\}\}$

Như ta đã biết, mỗi bất phương trình tuyến tính $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ (hoặc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$) và mỗi ràng buộc về dấu $x_j \ge 0$ xác định trong R^2 một nửa mặt phẳng (nửa không gian đóng) giới hạn bởi đường thẳng $\{x\ R^2: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\}$. Miền ràng buộc D là giao của m + 2 nửa mặt phẳng và là một đa giác lồi trong R^2. Phương trình $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ khi α thay đổi sẽ xác định trên mặt phẳng các đường thẳng song song với nhau mà ta sẽ gọi là các *đường mức* (với giá trị mức α).

Theo ngôn ngữ hình học, bài toán trở thành: Trong số các đường mức cắt D hãy tìm đường mức với giá trị mức α lớn nhất.

Nếu dịch chuyển song song các đường mức theo hướng véc tơ pháp tuyến $c = (c_1, c_2)$ thì giá trị mức sẽ tăng, còn nếu dịch chuyển theo hướng ngược lại thì giá trị mức sẽ giảm. Vì vậy, để giải bài toán đặt ra ta tiến hành như sau:

Bắt đầu từ một đường mức cắt D ta dịch chuyển song song nó theo hướng véc tơ pháp tuyến $c= (c_1, c_2)$ cho đến khi việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không cắt D nữa thì dừng. Điểm của D (có thể nhiều) nằm trên đường mức cuối cùng này sẽ là một lời giải cần tìm của bài toán, còn giá trị mức đó chính là giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu f(x).

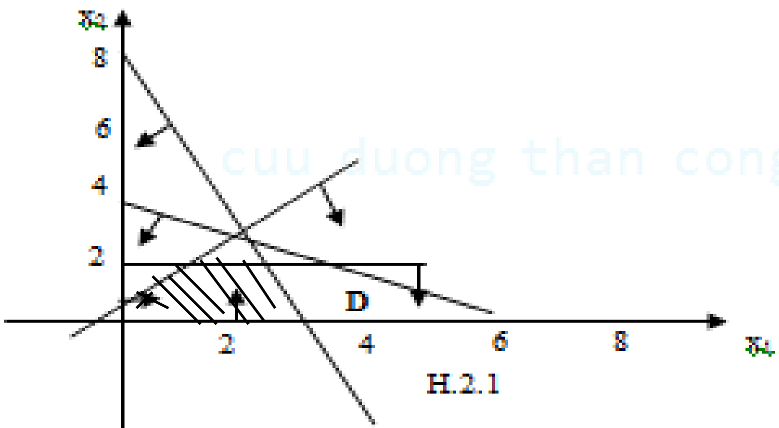
CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Thí dụ:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \quad (2) \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \quad (3) \\ x_2 &\le 2 \quad (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Giải:



H.2.1

Miền chấp nhận được biểu diễn ở H.2.1. Đường mức $3x_1 + 2x_2 = \alpha$. Khi cho α tăng dần ta thấy điểm cuối cùng mà đường mức α còn cắt miền chấp nhận là đỉnh D. D là giao điểm của hai đường (1) và (2):

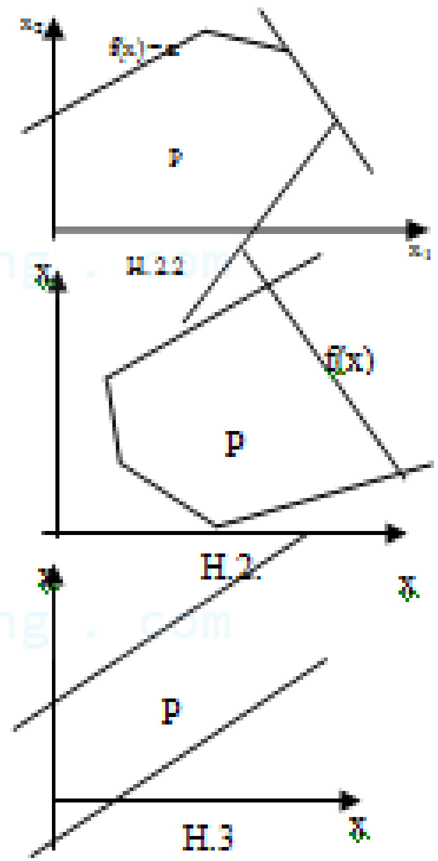
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Giải hệ này ta được $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ chính là nghiệm chấp nhận được tối ưu. Giá trị mục tiêu tối ưu là $f_{max} = \frac{38}{3}$

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

- Miền chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính là tập lồi đa diện. Nếu nó giới nội (tức là đa diện lồi) thì quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu là một đỉnh. Trường hợp nghiệm tối ưu không duy nhất nhưng miền chấp nhận được (thậm chí có thể không giới nội) có đỉnh thì vẫn luôn có nghiệm tối ưu là đỉnh (H.2.2)
- Trường hợp không có nghiệm tối ưu thì hàm mục tiêu không giới nội trên miền chấp nhận được (H.2.3).
- Trường hợp miền chấp nhận được không có đỉnh được minh họa ở H.2.4. Bài toán quy hoạch tuyến tính có thể không có nghiệm tối ưu hoặc có nhưng không có nghiệm tối ưu là đỉnh.

Những nhận xét hình học trên đây đúng cho cả trường hợp nhiều biến (hơn 2) và cho những gợi ý quan trọng để xây dựng phương pháp giải quy hoạch tuyến tính ở dạng các thuật toán, bằng ngôn ngữ đại số để có thể lập trình cho máy tính. Về nguyên tắc, ta có thể giải quy hoạch tuyến tính hai biến với số ràng buộc bất kỳ, bằng hình học.



CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Tính chất của bài toán QHTT

Tính chất chung

-Tập hợp D các p/án của bài toán QHTT (dạng bất kỳ) là một tập hợp lồi. Hơn nữa là một tập lồi đa diên (khúc lồi).

-Nếu một QHTT có ít nhất một p/án và f(x) bị chặn dưới trong D (bài toán min) thì bài toán chắc chắn có p/án tối ưu.

-Nếu x^0 là một p/án tối ưu của bài toán QHTT (dạng bất kỳ) và x^1, x^2 ($x^1 \neq x^2$) là hai p/án thỏa mãn: $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$; $0 \leq \lambda \leq 1$ và $x^1, x^2 \in D$ thì x^1 ,x^2 cũng là p/án tối ưu (Tập p/án tối ưu)

- Bài toán QHTT có p/án tối ưu gọi là bài toán giải được, nếu không có p/án tối ưu gọi là bài toán không giải được và có thể do hai nguyên nhân sau:

  Bài toán không có bất kỳ p/án nào (D = Φ)

  Bài toán có p/án nhưng f(x) không bị chặn trên miền ràng buộc

-Nếu đối với p/án x mà ràng buộc i thỏa mãn với dấu đẳng thức, nghĩa là $\sum a_{ij}x_j = b_i$ hoặc $x_j = 0$ thì ta nói phương án x thỏa chặt ràng buộc i.

- Nếu đối với p/án x mà ràng buộc i thỏa mãn với dấu bất đẳng thức thực sự , nghĩa là $\sum a_{ij}x_j$ <(>) b_i hoặc $x_j \neq 0$ thì ta nói phương án x thỏa lỏng ràng buộc i.

Phương án cực biên

Một p/án $x \in D$, đồng thời là đỉnh của D gọi là p/án cực biên, nghĩa là x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của bất cứ hai p/án bất kỳ nào khác của D. Hay nói cách khác $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$; $0 \leq \lambda \leq 1$ và $x^1, x^2 \in D$ thì phải có $x \equiv x^1 \equiv x^2$.

- Để một p/án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ của bài toán QHTT dạng bất kỳ là p/án cực biên không suy biến thì điều kiện cần và đủ là p/án x phải thỏa chặt đúng n ràng buộc (kể cả ràng buộc dấu) hệ véc tơ tương ứng với các ràng buộc đó là độc lập tuyến tính.

- Để một p/án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ của bài toán QHTT dạng chính tắc là p/án cực biên thì điều kiện cần và đủ là các véc tơ cột A_j của ma trận A ứng với các thành phần $x_j > 0$ là độc lập tuyến tính.

- Một nhóm ràng buộc có hệ véc tơ A_j tương ứng độc lập tuyến tính được gọi là các ràng buộc độc lập tuyến tính.

-Các ràng buộc dấu luôn là độc lập tuyến tính vì véc tơ A_j khi này là véc tơ đơn vị thứ j.

-Số p/án cực biên của bài toán QHTT là hữu hạn

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Phương pháp đơn hình

Đường lối chung

PP dựa trên 2 tính chất sau của bài toán QHTT

-Nếu QHTT ***chính tắc*** có p/án tối ưu thì cũng có p/án cực biên tối ưu, nghĩa là có ít nhất một đỉnh của D là lời giải. Cho phép tìm p/án tối ưu trong số các p/án cực biên (hữu hạn)

- Mỗi điểm cực tiểu địa phương của hàm tuyến tính (hàm lồi) trên một tập hợp lồi là một điểm cực tiểu tuyệt đối. Cho phép kiểm tra tối ưu đối với một p/án cực biên (đỉnh của D) bằng cách so sánh giá trị hàm mục tiêu với các đỉnh liền kề là đủ

$x^0 \to x^1 \to x^2 \to \dots \to x^k$ → Có nghiệm tối ưu / → Bài toán không có lời giải

$f(x^0) \to f(x^1) \to f(x^2) \to \dots \to x^k$ → f_{min} / → $-\infty$

Cơ sở của phương pháp

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$f(x) = \langle c.x \rangle \to Min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

A là ma trận cấp m.n; $b \in R^m$; c và $x \in R^n$. Giả thiết:

- $m << n$
- Ma trận A có hạng bằng m
- Biết trước một p/án cực biên không suy biến $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ với $x_j^0 > 0$ (j = 1, 2, ..., m). Ký hiệu $J_0 = \{j: x_j^0 > 0; j = 1,2,..,m\}$

Các véc tơ $\{A_j: j \in J_0\}$ là độc lập tuyến tính và $|J| = m$. Hệ véc tơ $\{A_j$: $j \in J_0\}$ gọi là cơ sở của p/án x^0, các véc tơ A_j và x_j gọi là các vếc tơ và biến cơ sở của x^0. các véc tơ A_j và x_j với $j \ni J_0$ gọi là các vếc tơ va biến phi cơ sở của x^0.Gọi B là ma trận lập bởi các véc tơ cơ sở đang xét: $B = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ có hạng bằng m và tồn tại B^{-1}. Mỗi véc tơ cột A_k (k = 1,2,..,n) của A được biểu diễn qua các véc tơ A_j: $j \in J_0$:

$A_k = A_k = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} A_j \ (j \in J_0)$. Ký hiệu $Z_k = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{mk})^T$

$x_B^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$; $C_B = (c_1, c_2, \dots, c_m) \to A_k = BZ_k \to Z_k = B^{-1} A_k$

Mặt khác $Ax^0 = Bx_B^0 = b \to x_B^0 = B^{-1}b$

Cơ sở của phương pháp

Giá trị hàm mục tiêu ứng với p/án x^0:

$f_0 = <c.x^0> = C_B\, x^0_B$

Với mỗi k = 1, 2, ..., n ta tính số sau đây, gọi là ước lượng của biến x_k:

$\Delta_k = C_B Z_k - c_k = c_1 z_{1k} + c_1 z_{1k} + \ldots + c_1 z_{1k} - c_k$ (k = 1, 2,...., n)

Định lý 2.8 (Dấu hiệu tối ưu): Nếu p/án cực biên x^0 với cơ sở J_0 của bài toán QHTT dạng chính tắc mà:

$\Delta_k \leq 0\ \forall k = 1, 2,..., n$ thì x^0 là p/án tối ưu của bài toán

Lưu ý: - Nếu A_k là véc tơ cơ sở ($k \in J_0$) thì trong các hệ số khai triển của A_k theo các véc tơ cơ sở chỉ có duy nhất một hệ số $z_{kk} = 1$ các hệ số khác bằng 0, nghĩa là $z_k = e^k$ (véc tơ đơn vị thứ k trong R^m). do đó $\Delta_k = C_B Z_k - c_k = 0$. Vì vậy chỉ cần kiểm tra điều kiện với các Δ_k với $k \ni J_0$.

-Nếu bài toán không suy biến thì $\Delta_k \leq 0$ k = 1, 2,..., n cũng là điều kiện cần của tối ưu.

-Định lý 2.9 (Dấu hiệu bài toán không có lời giải): Nếu p/án x^0 tồn tại $k \ni J_0$ sao cho $\Delta_k \geq 0$ và $z_{ik} \leq 0\ \forall j \ni J_0$ thì bài toán không có p/án tối ưu và ham f(x) giảm vô hạn trong miền ràng buộc.

-Định lý 2.10: (Cải tiến p/án hiện có) Nếu tồn tại chỉ số $s \ni J_0$ sao cho $\Delta_s \geq 0$ và $z_{is} > 0$ với ít nhất một $j \ni J_0$ thì ta sẽ tìm được một p/án cực biên mới x^1 tốt hơn p/án x^0. Nghĩa là $f(x^1) < f(x^0)$.

Nhận xét: Mỗi lần cải tiến p/án ta tìm một véc tơ phi cơ sở để đư vào cơ sở mới (ký hiệu x_s) và lấy ra từ cơ sở cũ một véc tơ (ký hiệu x_r). Biến x_s là biến phi cơ sở đối với p/án x^0 trở thành biến cơ sở trong p/án x^1 và biến x_r (biến cơ sở trong x^0) trở thành biến phi cơ sở trong x^1.

Thông thường một biến bị loại ra khỏi cơ sở cũ thì không bao giờ quay trở lại trong bất kỳ một cơ sở mới nào

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

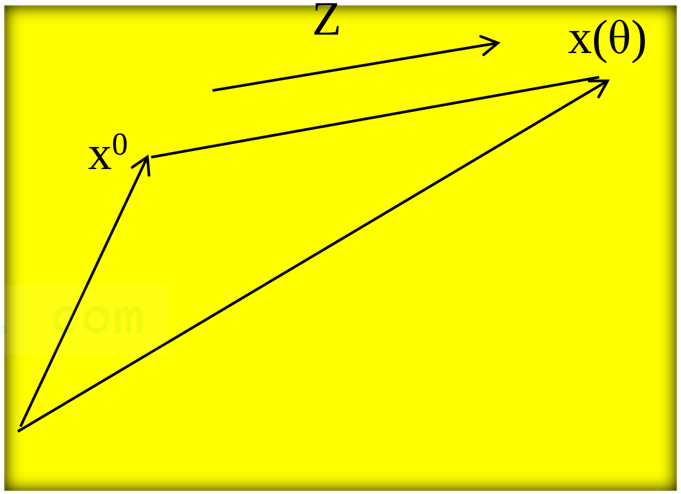
Cơ sở của phương pháp

Bổ đề: Nếu x^0 là p/án cực biên của bài toán QHTT dạng chính tắc với cơ sở J_0 và $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một p/án bất kỳ thì ta có: $x_j^0 - \sum_{k \notin J_0} x_k z_{jk},\ j \in J_0$ (*)

Đồng thời hàm mục tiêu f(x) ứng với các p/án x^0 và x có mối liên hệ:

$$f(x) = f(x^0) - \sum_{k \notin J_0} \Delta_k x_k \qquad (**)$$

Ngược lại, nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện (*) thì x sẽ là phương án của bài toán và khi này đối với x^0 và x ta vẫn có biểu thức (**). Từ nhận xét này ta có thể chọn tìm phương án x đáp ứng những yêu cầu đặt trước (thí dụ: phương án x có trị số f(x) lớn hơn hoặc nhỏ hơn so với $f(x^0)$, x cũng là phương án cực biên,...). Cách lựa chọn này gọi là sự di chuyển từ phương án cực biên x^0 tới phương án x. Xét về mặt trực quan sự di chuyển này chính là việc ta xuất phát từ x^0 di chuyển theo phương $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ với bước di chuyển θ thích hợp. Ta có hình vẽ minh họa sự di chuyển:



Cơ sở của phương pháp

Phương Z được xác định như sau:

$$Z_j^k = \begin{cases} -Z_j^{0k} & (j \in J_0) \\ 0 & (j \notin J_0;\ j \notin k) \\ 1 & (j = k;\ Z_k^k = 1) \end{cases}$$

Nếu xuất phát từ x^0 di chuyển theo phương Z^k với bước di chuyển θ, tức là xét điểm có dạng:

$$x(\theta) = x^0 + \theta Z^k,\ \theta \geq 0.$$

Khi đó để cho $x(\theta)$ là phương án chỉ cần $x(\theta) \geq 0$

Với $j \in J_0,\ x_j(\theta) = x_j^0 - \theta z_{jk} \geq 0;$ còn $j \notin J_0, j \neq k$ thì $x_j(\theta) = 0$, riêng $x_k(\theta) \geq 0$. Như vậy, để $x(\theta)$ là p/án thì chỉ cần: $x_j^0 - \theta z_{jk} \geq 0; (j \in J_0)$

+/ Nếu $z_{jk} \leq 0$ ($\forall j \in J_0$) thì bất đẳng thức trên thỏa mãn với mọi trị số $\theta \geq 0$, nghĩa là $x(\theta)$ là p/án $\forall \theta \geq 0$ Ta gọi Z là phương vô hạn.

+/ Nếu tồn tại $z_{jk} > 0$ thì từ các bđt $x_j^0 - \theta z_{jk} \geq 0$, suy ra $\theta \leq x_j^0/z_{jk}$, do vậy $\theta \leq \min(x_j^0/z_{jk})$, lấy theo những $z_{jk} \geq 0$, đặt min của các tỷ số này là θ_0. Như vậy $x(\theta)$ là p/án với điều kiện: $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Trường hợp này Z^k là phương hữu hạn, θ_0 là bước di chuyển lớn nhất theo phương này và $x(\theta)$ là PACB.

Đồng thời có: $f(x(\theta)) = f(x^0) - \theta\Delta_k$. Nếu $\Delta_k \geq 0$, suy ra $f(x(\theta)) < f(x^0)$: Z gọi là phương giảm. Nếu $\Delta_k < 0$, Z^k gọi là phương tăng. Nếu $\Delta_k = 0$, Z^k là phương không đổi.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Thuật toán đơn hình

Bước 1: Tìm PACB ban đầu x^0 với cơ sở J_0 và $\{A_j : j \in J_0\}$. Với mỗi k tính các z_{ik}, xác định Δ_k (k = 1,2,..n)

Bước 2: (Kiểm tra tối ưu**)** Nếu mọi $\Delta_k \le 0 (k = 1,2,..n)$ thì x^0 là p/án tối ưu. Dừng. Ngược lai chuyển bước 3

Bước 3: (Kiểm tra bài toán có lời giải) Nếu có $1 \le k \le n$ mà có $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \le 0$ (i = 1,2,..,m). Bài toán không có p/án tối ưu hay f(x) không bị chặn trên D. Dừng. Ngược lại chuyển sang bước 4.

Bước 3: (Cải tiến p/án) Với mỗi k $(1 \le k \le n)$ có $\Delta_k > 0$ đều tồn tại ít nhất một $z_{ik} > 0$, Chọn véc tơ đưa vào cơ sở mới (s) theo điều kiện $\Delta_s = Max\{\Delta_k > 0\}$. Tìm véc tơ đưa ra khỏi cơ sở cũ (r) theo điều kiện: $\theta_0 = Min\left\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} : z_{is} > 0\right\}$ Cột s gọi là cột xoay, dòng r gọi là dòng xoay, giao của dòng xoay với cột xoay gọi là phần tử xoay.

Bước 4: (Xây dựng PACB mới x^1) Các phần tử z_{ik} trong PACB mới được xác định:

$$z_j^1 = \begin{cases} z_j^0 - \theta_0 z_i ; j \in J_0 \\ 0 ; j \notin J_0 ; j \ne s \\ \theta_0 ; j = s \end{cases} \qquad z'_{ik} = \begin{cases} z_{ik} - z_{rk}/z_{is} ; i \ne r \\ z_{rk}/z_{rs} ; i = r \end{cases}$$

Với cơ sở mới là $J_1 = \{(J_0 \backslash x_r) \cup x_s\}$. Tính ước lượng Δ_k của bảng đơn hình mới, sau đó quay lại bước 2. Thuật toán tiếp tục cho tới khi nhận được p/án tối ưu hoặc phát hiện bài toán không có lời giải.
Để tránh tính toán lại các phần tử khia triển z_{ik} khi đổi từ cơ sở cũ sang cơ sở mới, có thể sử dụng công thức thứ hai bên cạnh.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Cách lập bảng đơn hình ban đầu và các bảng tiếp theo

Cách lập bảng đơn hình

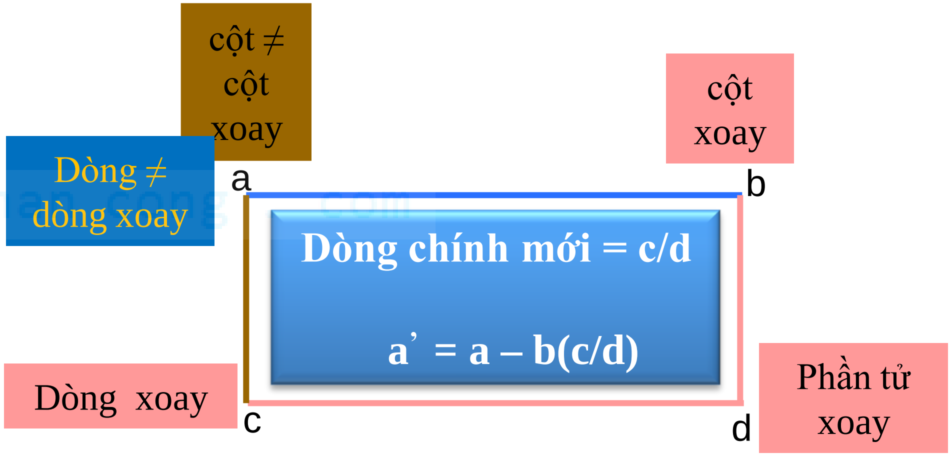
n+ 3 cột: Cột 1 ghi C_B, Cột 2 ghi m biến cơ sở, Cột 3 ghi giá trị ứng với các biến cơ sở. n cột tiếp theo ứng với n biến.

m + 3 dòng: Dòng đầu ghi tên biến (bắt đầu từ cột 1), dòng 2 ghi hệ số hàm mục tiêu ứng với các biến, dòng cuối ghi ước lượng Δ_k (k = 1,2,..,n). Do ma trận cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị nên trong m hàng và n cột còn lại ta ghi ma trận A.

Các bảng đơn hình tiếp theo được thực hiện như sau:

-Tìm cột xoay: Chọn cột x_s với $\Delta_s = \text{Max}\{\Delta_k > 0\}$

- Tìm dòng xoay: Nếu trên cột xoay không có phần tử nào dương thì dấu hiệu bài toán không có lời giải. Trái lại, chia các phần tử trong cột ph/án cho các phần tử tương ứng cùng dòng trên cột xoay(chỉ chia cho $z_{is} > 0$). Chọn dòng ứng với tỷ số nhỏ nhất là dòng xoay (dòng r). Ô (r,s) gọi là phần tử xoay. Biến đổi bảng đơn hình.



CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Thí dụ: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau:

$$f(x) = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \text{Min}$$

với điều kiện :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 7 \\ 4x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12 \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 &= 10 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{aligned}$$

Giải: Bài toán có ngay phương án cực biên xuất phát $x^0 = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$

Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			0	1	-3	0	2	0
0	x_1	7	1	1	-1	0	1	0
0	x_4	12	0	-4	4	1	0	0
0	x_6	10	0	-5	3	0	1	1
Bảng 1		0	0	-1	3	0	-2	0
Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			0	1	-3	0	2	0
0	x_1	10	1	1	0	1/4	1	0
-3	x_3	3	0	-1	1	1/4	0	0
0	x_6	1	0	-2	0	-3/4	1	1
Bảng 2		-9	0	2	0	-3/4	-2	0

Ở bảng 1 có $\Delta_3 = 3 > 0$ (cột A_3 là cột xoay) nên đưa biến x_3 vào cơ sở mới và loại x_4 khỏi cơ sở (dòng x_4 là dòng xoay). Trong bảng 2 có $\Delta_2 = 2 > 0$ (Δ_2 là cột xoay), nhưng mọi phần tử $z_{i2} \leq 0$ ($i = 1, 2, 3$) nên bài toán không có phương án tối ưu, vì hàm mục tiêu của bài toán giảm vô hạn trong miền ràng buộc của nó.

Thí dụ: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$g(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \text{Max}$$

với điều kiện

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10$$
$$4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6})$$

Giải: Ta thay bằng $f(x) = -g(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow$ Min với cùng các điều kiện như trê

Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			0	1	-3	1	0	0
0	x_4	7	-1	3	1	0	1	0
0	x_5	10	3	-4	8	0	0	0
0	x_6	12	4	-2	0	0	0	1
Bảng 1		0	3	-1	-2	0	-2	0
Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			0	1	-3	0	2	0
0	x_4	10	0	5/2	1	1	0	1/4
0	x_5	1	0	-5/2	8	0	1	-3/4
-3	x_1	3	1	-1/2	0	0	0	1/4
Bảng 2		-9	0	1/2	-2	0	0	-3/4
Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			1	-1	0	-2	2	-3
1	x_2	4	0	1	2/5	2/5	0	1/10
0	x_5	11	0	0	9	1	1	-1/2
-3	x_1	5	1	0	1/5	1/5	0	3/10
Bảng 3		-11	0	0	-11/5	-1/5	0	-4/5

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Thuật toán đơn hình

Trường hợp bài toán suy biến:

Nếu bài toán suy biến trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình có thể sảy ra hiện tượng: Tỷ số nhỏ nhất θ_0 đạt tại nhiều chỉ số, do đó có nhiều biến đạt tiêu chuẩn loại khỏi cơ sở cũ. Nếu gặp hiện tượng này thì ở bước lặp sau đó cỏa thể sảy ra $\theta_0 = 0$. Khi đó, phương án cực biên và trị hàm mục tiêu không đổi, chỉ có cơ sở của nó thay đổi (Chú ý là trị hàm mục tiêu giảm một lượng bằng tích $\theta_0 \times \Delta_s = 0$). Vì thế, sau một số phép biến đổi đơn hình ta có thể gặp lại cơ sở cũ , tình huống đó gọi là hiện tượng xoay vòng. Nếu không có biện pháp khắc phục thì thuật toán đơn hình không thể kết thúc.

Sau đây là quy tắc đơn giản để tránh xoay vòng do R.G.Bland đề xuất năm 1977.

1) Chọn cột Δ_s có chỉ số s nhỏ nhất mà $\Delta_s > 0$ làm cột xoay (Đưabiến x_s vào cơ sở).

2) Nếu có nhiều biến đạt tiêu chuẩn loại khỏi cơ sở cũ thì ta chọn biến có chỉ số nhỏ nhất. dòng chứa biến cơ sở này được chọn làm dòng xoay.

Tuy nhiên hiện tượng xoay vòng rất hiếm gặp trong thực tiễn nên khi có nhiều khả năng chọn cột (dòng xoay ta có thể chọn tùy tùy ý một trong các cột (dòng đó).

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Tìm phương án cực biên và cơ sở ban đầu.

a) Bài toán dạng chuẩn với ràng buộc ≤ và vế phải không âm.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min \quad (2.15)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i,\ i = 1, 2, \dots, m \quad (2.16)$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n}) \quad (2.17)$$

với giả thiết mọi $b_i \ge 0$.

Ta thêm vào vế trái mỗi ràng buộc (2.16) một biến phụ $x_{n+i} \ge 0$, i = 1, 2, ..., m, để biến hệ bất phương trình thành hệ phương trình. Trong hàm mục tiêu, hệ số ứng với biến phụ bằng 0. Bài toán (2.15)- (2.17)tương đương với bài toán sau:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n+m})$$

Bài toán này có ngay phương án cực biên ban đầu là $x = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ trong đó $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_m$.. Cơ sở của phương án này gồm m véc tơ cột đơn vị ứng với các biến cơ sở x_{n+i}.

b) Bài toán ở dạng chính tắc, vế phải không âm.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min \quad (2.18)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m \quad (2.19)$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n}) \quad (2.20)$$

Với giả thiết ma trận A không chứa bất kỳ một véc tơ cột đơn vị nào.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Phương pháp hai pha

Pha 1: Đưa vào các biến giả $t_1, t_2,..., t_m$ không âm và giả QHTT phụ:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{m} t_i \rightarrow Min$$

với điều kiện: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + t_i = b_i$ $(i=1,2,..,m)$; $x_j \geq 0 (j = 1, 2, .., n)$; $t_i \geq 0 (i = 1, 2, .., m)$.
PACB của bài toán phụ: $(x, t) = (0.0,...,0, b_1,b_2,..., b_m)$.
Do hàm g(t) bị chặn dưới bởi 0 nên chắc chắn có p/án tối ưu, chẳng hạn đó là (x^*,t^*). Có hai khả năng xảy ra:
-$g(t^*) > 0$ Khi đó bài toán gốc không có p/án
- $g(t^*) = 0 \leftrightarrow t^* = 0$. Nếu cơ sở của p/án là (x^*,t^*) không chứa véc tơ ứng với biến giả t_i thì x^* là PACB của bài toán ban đầu và cơ sở của x^* gồm các véc tơ A_j $(j \leq n)$.
Trái lại, thì cần thực hiện thêm một vài phép lặp đơn hình để đẩy biến giả ra khỏi cơ sở: Chọn dòng ứng với biến giả làm dòng xoay. Trên dòng này chọn cột xoay là cột biến phi cơ sở thực có phần tử khác không (có thể âm hoặc dương).

Pha 2: Lấy bảng đơn hình cuối cùng của pha 1 làm bảng đơn hình xuất phát của pha 2. Nhưng có một số thay đổi:
- Xóa khỏi bảng cuối pha 1 các cột ứng với biến giả.
-Viết lại hệ số hàm mục tiêu trong cột C_B. Tính lại các ước lượng Δ_k
- Xuất phát từ bảng đơn hình vừa nhận được giải bài toán gốc.

Lưu ý: Bài toán góc là max thì g(t) vẫn là min.
Nếu ma trận ban đầu có k véc tơ đơn vị thì số biến giả đưa vào bài toán phụ sẽ là m – k.
 Có thể giải cả hai pha trên cùng một bảng nhưng lưu ý hệ số $c_B = 0$ đối với biến thực khi biến giả chưa bị loại ra khỏi cơ sở tối ưu của bài toán phụ.
Nếu ở một bước lặp nào đó mà các biến giả đã bị loại ra khỏi cơ sở thì cột C_B phải lấy giá trị thực và bỏ cột ứng với biến giả.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Tìm phương án cực biên

Phương pháp hai pha giải bài toán QHTT tính sau:

$$f(x) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ \min$$

với điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1,2,..,n) \end{cases}$$

Giải: Pha 1: Đưa vào 3 biến giả $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ và giải bài toán phụ:

$$g(t) = t_1 + t_2 + t_3 \ \min$$

với điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + t_1 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + t_2 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + t_3 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1,2,..n),\ t_i \geq 0 \ (i = 1, 2,..,m). \end{cases}$$

Pha 2: Sử dụng p/án tối ưu của pha 1 làm PACB xuất phát của pha 2.

Phương pháp hệ số phạt- Bài toán M

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với mọi $b_i \geq 0$.. Để giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình ta đưa thêm vào các biến mới $t_i \geq 0$, gọi là các biến giả và xét bài toán mở rộng sau, thường gọi là bài toán (M):

$F(x, t) = f(x) + Mg(t) =$

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + M(t_1 + t_2 + \dots + t_m) \ \text{Min}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + t_i = b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n;\ t_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, m$$

trong đó M là một hằng số dương lớn tùy ý. Bài toán (M) có m ràng buộc chính, n + m biến và ma trận A của nó có hạng bằng m (do chứa m véc tơ cột đơn vị). Mặt khác, bài toán (M) lại có ngay phương án cực biên ban đầu là $(x, t) = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$ với cơ sở là m véc tơ đơn vị ứng với m biến giả t_i. Vì thế, ta có đầy đủ điều kiện để áp dụng thuật toán đơn hình đối với bài toán (M). Phương pháp như thế goi là phương pháp hệ số phạt hay phương pháp bài toán (M).

Định lý 2.11: Nếu bài toán chính có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu (x, t) của bài toán (M) phải có t = 0.

Nếu bài toán chính (2.18) - (2.20) có phương án tối ưu x thì bài toán (M) có phương án tối ưu (x, 0) và ngược lại.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

+/ Phương pháp biến đổi Gausse:

Để tìm phương án cực biên xuất phát ta có thể dùng phương pháp biến đổi Gausse, tức là nhân một hàng với một số và cộng (trừ) với một hàng nào đó để xuất hiện đúng m véc tơ cột đơn vị trong ma trận A. Lưu ý khi biến đổi đến bước cuối cùng thì hệ số vế phải (b_i) không được âm. Sau đó áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán.

Thí dụ: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \text{Min}$$

với điều kiện

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_6 = 10 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 18 \quad (2)$$

$$x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 \le 4 \quad (3)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,6})$$

a) Chứng tỏ $x^0 = (10, 0, 0, 8, 0, 0)$ là phương án cực biên?

b) Xuất phát từ x^0 giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Giải: a) Thay x^0 vào các ràng buộc ta thấy nó thỏa mãn, vậy x^0 là phương án của bài toán.

x^0 thỏa chặt ràng buộc (1), (2) và 4 ràng buộc dấu.

Hệ véc tơ tương ứng với các ràng buộc này là độc lập tuyến tính.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy x^0 là phương án cực biên của bài toán đã cho.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

b) Đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f(x) = -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \text{Min}$$

với điều kiện

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_6 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 18 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 - x_6 + x_7 = 4 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,7}) \end{cases}$$

Theo mối quan hệ giữa bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc ta có $x^0 = (10, 0, 0, 8, 0, 0, 4)$ là phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc trên và là phương án cực biên via các véc tơ $\{A_1, A_4, A_7\}$ độc lập tuyến tính và nó chính là cơ sở của phương án cực biên x^0. Để áp dụng thuật toán đơn hình, cần biết hệ số phân tích của các véc tơ điều kiện A_k và véc tơ b qua cơ sở $J_0 = \{1, 4, 7\}$. Muốn vậy ta viết ma trận hệ số mở rộng của bài toán, thực hiện các phép biến đổi ma trận trên dong sao cho A_1, A_4, A_7 trở thành một cơ sở đơn vị của không gian 3 chiều khi đó véc tơ cột tương ứng với mỗi véc tơ chính là hệ số phân tích của chúng theo cơ sở J_0. Quá trình tính toán như sau:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 10 \\ 18 \\ 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 10 \\ 8 \\ 4 \end{array}$$

Lập bảng đơn hình với phương án cực biên xuất phát x^0 và sau 2 bảng đơn hình ta có lời giải của bài toán: $x^* = (14, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$ với $f(x^*)$

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Phương pháp đơn hình giải qui hoạch tuyến tính dạng bất kỳ.

Để giải một bài toán quy hoach jtuyến tính dạng bất kỳ ta thực hiện các bước sau:

- Đổi bài toán tìm cực đại: f) $\to$ Max thành bài toán tìm cực tiểu: g = -f) $\to$ Min.
- Đưa bài toán cần giải về dạng chính tắc.
- Thêm biến giả hoặc biến đổi Gausse để giải bài toán bằng thuật toán đơn hình.

Thí dụ 2.12: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \to Min$$

với điều kiện:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 8 \quad (1)\\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &\le 2 \quad (2)\\ 4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + x_4 &\ge 20 \quad (3)\\ x_j \ge 0 \ (j &= 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

và véc tơ $x^0 = (8, 0, 0, 0)$.

a) Chứng tỏ x^0 là phương án cực biên, lợi dụng x^0 giải bài toán bằng phươnh pháp đơn hình?

b) Giải bài toán nếu thêm điều kiện $f(x) \ge -50$?

Giải:

a) Dễ thấy rằng x^0 thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán, thỏa chặt ràng buộc (1) và 3 ràng buộc dấu, chúng độc lập tuyến tính, vậy x^0 là phương án cực biên không suy biến. Để giải bài toán bằng phương pháp đơn hình, trước hết phải đưa bài toán về dạng chính tắc:

Ta có: $f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \to Min$

với điều kiện:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \quad\quad &= 8 \quad (1')\\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 \quad &= 2 \quad (2')\\ 4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + x_4 \quad - x_6 &= 20 \quad (3')\\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)& \end{aligned}$$

Từ x^0 suy ra phương án cực biên không suy biến của bài toán dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi Gausse nhươ sau:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8\\ -2 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 2\\ 4 & 7 & -8 & 2 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8\\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 18\\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$\overline{x}^0 = (8, 0, 0, 0, 18, 12)$ với cơ sở là $J_0 = \{A_1, A_4, A_6\}$

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Hệ số C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
			-2	-6	8	-5	0	0
-2	x_1	8	1	2	-3	1	0	0
0	x_5	18	0	5	-5	-3	1	0
0	x_6	12	0	1	-4	2	0	1
Bảng 1		-16	0	2	-2	3	0	0
-2	x_1	2	1	3/2	-1	0	0	-1/2
0	x_5	36	0	13/2	-11	0	1	3/2
-5	x_4	6	0	1/2	-2	1	0	1/2
Bảng 2		-34	0	1/2	4	3	0	-3/2

Từ bảng cuối ta có $\Delta_3 = 4$, đồng thời $z_{j3} < 0$ ($\forall j \in J_0$), bài toán không có lời giải vì hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc.

b) Để giải bài toán khi có thêm điều kiện $f(x) \geq -50$ ta cần tìm một phương án x' của bài toán ban đầu sao cho $f(x') = -50$.

Gọi phương án tương ứng với bảng đơn hình2 là x^*, từ x^* theo phương Z^3 ta tìm được các phương án có dạng: $x(\theta) = x^* + \theta Z^3$, $\theta \geq 0$. Ta có: $f(x(\theta)) = f(x^*) - \theta\Delta_3$. Suy ra:

$$-50 = -34 - 4\theta\text{, như vậy } \theta = 4$$

Do $x^* = (2, 0, 0, 6, 36, 0)$; $Z^3 = (1, 0, 1, 2, 11, 0)$, phương án cần tìm $x' = (6, 0, 4, 14, 80, 0)$

Quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu

- *Cách thành lập bài toán đối ngẫu.*

a) Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Xét bài toán dạng chính tắc (I):

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Min(Max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,(i=\overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0\ (j=\overline{1,n})$$

bài toán đối ngẫu của bài toán (I) có dạng sau:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow Max(Min)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^T y_i \leq (\geq) c_j\ (j=\overline{1,n})$$

Ký hiệu bài toán này là (Ĩ). Cặp bài toán (I, Ĩ) gọi là cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Cặp ràng buộc đối ngẫu: Ta gọi 2 ràng buộc bất đẳng thức (kể cả ràng buộc dấu) trong hai bài toán cùng tương ứng với một chỉ số là một cặp ràng buộc đối ngẫu. Trong bài toán (I) và bài toán (Ĩ) có n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_j \geq 0 \ \rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq (\geq) c_j\ (j=\overline{1,n})$$

Dùng các ký hiệu của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu ta có thể viết dưới dạng:

$$g(y) = (b.y) \rightarrow Max\ (Min)$$

$$(A^T y) \leq (\geq)\ c \ \ (j=\overline{1,n})$$

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Thí dụ

$$f(x) = 0,2x_1 + 0,8x_4 + 0,6x_5 \rightarrow Min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 400 \\ 2x_2 + x_5 = 400 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1300 \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu có dạng:

$$g(y) = 400y_1 + 400y_2 + 1300y_3 \rightarrow Max$$
$$\begin{cases} 2y_1 \leq 0,2 \\ 2y_3 + y_3 \leq 0 \\ y_1 + 2y_3 \leq 0 \\ 3y_3 \leq 0,8 \\ y_1 + y_2 \leq 0,6 \\ y_i \text{ Tùy ý} \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng:

Xét bài toán (II):

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Min(Max)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq (\leq) b_i \, (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \; (j=\overline{1,n})$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc, ký hiệu là (II'):

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{Min(Max)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j -(+)\, x_{n+i} = b_i (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \; (j=\overline{1,n+m})$$

Bài toán đối ngẫu của (II') và cũng là đối ngẫu của (II) có dạng:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \text{Max(Min)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^T y_i \leq (\geq) c_j (j=\overline{1,n})$$

$$y_i \geq 0 \; (j=\overline{1,m})$$

Ký hiệu bài toán này là ($\tilde{\text{II}}$). Do đặc điểm cấu trúc của hai bài toán, ta gọi (II) và ($\tilde{\text{II}}$) là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng. Hai bài toán này có n + m cặp ràng vbuộc đối ngẫu;

$$x_j \geq 0 \;\to\; \sum_{i=1}^{m} a_i^T y_i \leq (\geq) c_j \; (j=\overline{1,n})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq (\leq) b_i \leftrightarrow y_i \geq 0 \; (i=\overline{1,m})$$

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Cặp bài toán đối ngẫu tổng quát

Đối với bài toán bất kỳ, xây dựng bài toán đối ngẫu như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i \in I_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i \in I_3$$

$$x_j \ge 0 (j \in J_1), x_j \text{ tuỳ ý } (j \in J_2), x_j \le 0 (j \in J_3)$$

Trong đó $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{\overline{1,m}\}, I_i \cap I_k = \emptyset, i, k = 1, 2, 3 \ (i \ne k)$

$J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{\overline{1,n}\}, J_i \cap J_k = \emptyset, j, k = 1, 2, 3 \ (j \ne k)$

Ta gọi đối ngẫu của bài toán trên là bài toán:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to Max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^T y_i \le c_j, j \in J_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^T u_i = c_j, j \in J_2$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^T y_i \le c_j, j \in J_3$$

$$y_i \ge 0 (i \in I_1), y_i \text{ tuỳ ý } (i \in I_2), y_i \le 0 (i \in I_3)$$

Sơ đồ đối ngẫu tổng quát được tóm tắt trong bảng sau:

Gốc	min	max	Đối ngẫu
Ràng buộc chính	$= b_i$ $\le b_i$ $\ge b_i$	tùy ý ≤ 0 ≥ 0	Biến
Biến	≥ 0 ≤ 0 tùy ý	$\le c_j$ $\ge c_j$ $= c_j$	Ràng buộc chính

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Các thí dụ

Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau và chỉ ra các cặp rang buộc đối ngẫu:

$$f(x) = -4x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad + 5x_5 \to \text{Min}$$

với điều kiện:

$$3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq -15 \quad (1)$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 \leq 8 \quad (2)$$
$$-6x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + x_5 \geq 24 \quad (3)$$
$$x_1 \geq 0 \ (4), \quad x_3 \leq 0 \ (5), \quad x_5 \geq 0 \ (6)$$

Giải: Bài toán đối ngẫu:

$$g(y) = -15y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 25y_4 \to \text{Max}$$
$$3y_1 - 2y_2 \qquad + 3y_4 \leq -4 \qquad (7)$$
$$-6y_1 + 3y_2 - 6y_3 + 2y_4 = 1$$
$$-y_1 + 4y_2 + 3y_3 \qquad \geq 5 \qquad (8)$$
$$2y_{1-} - 5y_2 + 8y_3 + - 3y_4 = 0$$
$$4y_1 + y_2 - 4y_3 + y_4 \leq 3 \qquad (9)$$
$$y_1 \geq 0 \qquad (10)$$
$$y_2 \leq 0 \qquad (11)$$
$$y_4 \geq 0 \qquad (12)$$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu là: (1)-(10); (2)-(11); (3)-(12); (4)-(7); (5)-(8); (6)-(9).

Các định lý đối ngẫu

Định lý đối ngẫu yếu: Nếu x là một phương án bất kỳ của bài toán gốc và y là một phương án bất kỳ của bài toán đối ngẫu thì:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

Hệ quả 1: a) Giá trị mục tiêu của một phương án đối ngẫu bất kỳ là một cận dưới cho giá trị mục tiêu đối với mọi phương án của bài toán gốc.

b) Nếu hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới trong miền rang buộc của nó thì bài toán đối ngẫu không có bất kỳ một phương án nào.

c) Nếu hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu không bị chặn trên trong miền rang buộc của nó thì bài toán gốc không có bất kỳ một phương án nào.

d) Nếu x^* là một phương án của bài toán gốc, y^* là một phương án của bài toán đối ngẫu và $f(x^*) = g(y^*)$ thì x^{*-} là phương án tối ưu của bài toán gốc và y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Định lý đối ngẫu mạnh: Nếu một quy hoạch có phương án tối ưu thì quy hoạch đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng bằng nhau.

Định lý định lý tồn tại

Đối với mỗi cặp quy hoạch đối ngẫu nhau chỉ có thể sảy ra một trong ba khả năng loại trừ nhau sau đây:

- Cả hai quy hoạch đều không có phương án
- Cả hai quy hoạch đều có phương án, khi bđó cả hai quy hoạch đều có phương án tối ưu và giá trị của các hàm mục tiêu là bằng nhau.
- Một quy hoạch có phương án và quy hoạch kia không có phương án. Khi đó, quy hoạch có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn trong miền ràng buộc.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Các định lý đối ngẫu

Định lý tìm nghiệm tối ưu: Điều kiện cần và đủ để hai phương án x và y của cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (thoả lỏng) thì ràng buộc kia phải thoả mãn với dấu bằng (thoả chặt).

Hệ quả 1: Nếu một ràng buộc là lỏng đối với phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu của nó phải là chặt đối với mọi phương án tối ưu của bài toán kia.

Hệ quả 2: Xét cặp bài toán đối ngẫu (II, $\tilde{\text{II}}$) trong đó bài toán II có ràng buộc $x \geq 0$. Nếu cặp bài toán giải được và y^* là duy nhất thì khi véc tơ b thay đổi một lượng Δb sao cho x^* vẫn là phương án của bài toán (sau khi thay đổi véc tơ b), ta luôn có $\Delta f^* = (y^*, \Delta b)$ với Δf^* là sự thay đổi tương ứng của trị số tối ưu của bài toán gốc.

Suy ra, nếu chỉ có b_i thay đổi, ta sẽ có $\Delta f^*/\Delta b_i = y^*_i$

Định lý định lý độ lệch bù yếu:. Một cặp phương án x, y của cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu là cặp phương án tối ưu khi và chỉ khi chúng nghiệm đúng các hệ thức:

$$y_i\left(\sum a_{ij}x_j - b_i\right) = 0,\ \forall i = \overline{1,m}$$

y_i

$$x_j\left(c_j - \sum a^T_{ij} y_i\right) = 0\ \forall j = \overline{1,n}$$

Định lý định lý độ lệch bù mạnh: Nếu cặp bài toán đối ngẫu có phương án thì tồn tại một cặp phương án tối ưu x^*, y^* nghiệm đúng:

$$Y^* + (Ax^* - b) > 0 \text{ và } x^* + (c - A^Ty^*) > 0$$

Các ứng dụng của cặp bài toán đối ngẫu

Sử dụng các tính chất và định lý đối ngẫu chúng ta có thể xử lý các tình huống dưới đây mà không nhất thiết phải giải lại bài toán.

a) Khảo sát sự tồn tại phương án, phương án tối ưu.

Thí dụ: Cho bài toán QHTT:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \text{ Min}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\quad &= 15 \\ x_3 - x_4 &= 8 \\ x_j \geq 0 \; (\;) \end{aligned}$$

Hãy viết bài toán đối ngẫu và chứng tỏ nó có phương án cực biên tối ưu?

Giải: Bài toán đối ngẫu:

$$g(y) = 15y_1 + 8y_2 \text{ Max}$$

$$\begin{aligned} y_1 \quad &\leq 2 \\ -y_1 \quad &\leq -1 \\ y_2 &\leq 3 \\ -y_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng x = (15, 8) và y = (1, 2) là các phương án của cặp bài toán đối ngẫu. Suy ra cặp bài toán có phương án tối ưu. Mặt khác, do hạng của hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu bằng 2 do đó nó có phương án cực biên tối ưu.

Các thí dụ

Cho bài toán QHTT:

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \text{Min}$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 8$$
$$x_j \geq 0 \ (\ )$$

có phương án tối ưu $x^* = (0, 1, 0\ 2, 3)$ với $f_{min} = f(x^*) = 6$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải: Bài toán đối ngẫu có dạng:

$$g(y) = y_1 + 3y_2 + 8y_3 \ \text{Max}$$

với các điều kiện: $3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 1$

$$y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 1$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$
$$y_2 \leq 1$$
$$y_3 \leq 1$$

Gọi y^* là phương án tối ưu của bài toán này. Do nên theo
định lý (1.15) y^* nghiệm đúng hệ phương trình:

$$y_1 + y_2 + 5y_3 = 1$$
$$y_2 = 1$$
$$y_3 = 1$$

Giải hệ này được $y^* = (-5, 1, 1)$ với $g_{max} = 6 = f_{min}$

Cho bài toán QHTT:

$$f(x) = 7x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 \rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8$$
$$3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq -1$$
$$2x_1 - 3x_3 + x_4 = 10$$
$$x_j \geq 0 \ (\ )$$

và véc tơ $x^0 = (0, 6, 0, 10)$. Viết bài toán đối ngẫu. Phân tích tính chất của x^0 đối với bài toán đã cho. Xác định tập phương án tối ưu của hai bài toán. Chỉ ra một phương án tối ưu không cực biên của bài toán gốc.

Giải: Bài toán đối ngẫu:

$$g(y) = 8y_1 - y_2 + 10y_3 \rightarrow \text{Min}$$
$$2y_1 + 2y_3 \geq 7$$
$$-2y_1 + 3y_2 \geq 6$$
$$-3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \geq -12$$
$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1$$
$$y_2 \geq 0$$

Theo định lý đối ngẫu ta có:

$$-2y_1 + 3y_2 = 6$$
$$2y_1 - 2y_2 + y_3 = 1$$
$$y_2 = 0$$

x^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán, x^0 là phương án; phương án x^0 thoả chặt các ràng buộc 1, 3 và 2 ràng buộc dấu, những ràng buộc này độc lập tuyến tính nên x^0 là phương án cực biên (không suy biến).

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Phương pháp đơn hình đối ngẫu

Đây là phương pháp đơn hình áp vào bài toán đối ngẫu, nhưng để tìm lời giải của bài toán gốc.

Phương pháp ĐHĐN xuất phát từ một "Giả p/án" (nghiệm đúng Ax = b) và thỏa mãn mọi $\Delta_k \leq 0$, nhưng chưa thỏa mãn điều kiện $x_j \geq 0$, nghĩa là trong cột p/án có phần tử âm. Các bảng đơn hình được biến đổi sao cho luôn đản bảo tiêu chuẩn tối ưu và quá trình tiếp diễn cho đến khi các phần tử trong cột p/án không còn phần tử âm thì ta nhận được p/án tối ưu của bài toán gốc .

Min{f(x) = <c.x>: Ax = b; $x \geq 0$} (b tùy ý)

Bài toán đối ngẫu:

Max{g(y) = <b,y>: $A^Ty \leq c$; $y \geq 0$.

Rõ ràng $y^0 = 0$ là PACB của g(y), vì $A^Ty = 0 \leq c$.

Thuật toán đơn hình:

Bước 1: lập bảng đơn hình đối ngẫu ban đầu.

Bước 2: Kiểm tra tối ưu. Nếu mọi phần tử trong cột giả p/án không âm thì p/án hiện có là tối ưu, Trái lại sang B_3.

Bước 3: Chọn dòng xoay: Chứa phần tử âm nhỏ nhất trong cột giả p/án

Chọn cột xoay: Lấy các phần tử trên dòng ước lượng (tính từ cột j= 1) chia cho các phần tử tương ứng trên dòng xoay, nhưng chỉ chia cho các phần tử âm. Cột xoay ứng với tỷ số nhỏ nhất. Giao của dòng xoay và cột xoay là phần tử xoay.

Bước 4: Biến đổi bảng đơn hình như phương pháp đơn hình thường. Sau đó trở lại thực hiện bước 2 nếu trong p/án mới vẫn còn phần tử âm trong cột giả p/án

Chú ý: Khi tìm cột xoay, nếu mọi phần tử trên dòng xoay đều không âm thì bài toán ban đầu không có p/án tối ưu.

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Thí dụ

Giải bài toán QHTT sau:

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_2 \rightarrow Min$$

Đ/K ràng buộc: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 160$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 140$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3)$

Đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_2 \rightarrow Min$$

Đ/K ràng buộc: $-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -160$

$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -140$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5)$

với giả p/án là: $x^0 = (0, 0, 0, -160, -140)$

C_B	Cơ sở J	Phương án	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
			15	12	10	0	0
0	A_4	-160	-3	-4	-2	1	0
0	A_5	-140	-1	-2	-3	0	1
BẢNG 1		**0**	**-15**	**-12**	**-10**	**0**	**0**
12	A_2	40	3/4	1	1/2	-1/4	0
0	A_5	-60	1/2	0	-2	-1/2	1
BẢNG 2		**480**	**-6**	**0**	**-4**	**-3**	**0**
0	A_2	25	7/8	1	0	-3/8	1/4
0	A_3	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2
BẢNG 3		**0**	**-7**	**0**	**0**	**-2**	**-2**

Ở bảng 3, mọi phần tử trong cột giả phương án đều dương, nên ta nhận được phương án tối ưu: $x^* = (0, 25, 30)$, $f(x^*) = 600$.

Quy tắc tìm nghiệm đối ngẫu:

Nếu cơ sở ban đầu là ma trận đơn vị thì để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, ta chọn ra từ bảng đơn hình đối ngẫu cuối cùng các Δ_j của các cột biến x_j mà chúng là biến cơ sở của bước lặp đầu tiên (Bảng 1), rồi cộng them hệ số c_j tương ứng. Sau đó, đổi dấu tổng tìm được nếu biến cơ sở tương ứng ban đầu nhận giá trị âm.

Với thí dụ này, ta thấy biến cơ sở ở bước lặp đầu tiên (Bảng 1) là x_4, x_5. Lúc đầu các biến này nhận giá trị âm, nên phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $y^* = (y^*_1, y^*_2)$ được xác định như sau:

Vậy $y^* = (2, 2)$ và $g(y^*) = 600 = f_{min}$

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

Ứng dụng lý thuyết đối ngẫu

Để phân tích ý nghĩa kinh tế trong mối quan hệ giữa 2 bài toán đối ngẫu ta sử dụng cặp bài toán đối ngẫu:

(P) $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n})$$

(Q) $$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to b$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^T y_i \ge c_j \; (j = \overline{1,n})$$

$$y_i \ge 0 \; (i = \overline{1,m})$$

Nội dung bài toán (P): Sử dụng m loại tài nguyên khác nhau để SX n loại sản phẩm. Số lượng tài nguyên bị hạn chế bởi b_i. Định mức chi phí tài nguyên i cho một đơn vị SP j là a_{ij}. Biết ước lượng giá trị một đơn vị SP j là c_j.Xác định x_j SX trong kỳ sao cho tổng giá trị SP đạt cực đại đảm bảo chi phí tài nguyên không vượt quá số lượng đã cho. Như vậy m loại tài nguyên tham gia vào quá trình SX, nhưng phải đánh giá loại tài nguyên nào là có ích, loại nào không cần thiết

Để giả quyết vấn đề này người ta dùng bài toán đối ngẫu (Q). Trong y_i là giá trị ước lượng của một đơn vị tài nguyên, g(y) là tổng giá trị của nguồn tài nguyên sử dụng cho việc sản xuất các loại sản phẩm, ràng buộc i là giá trị chung của các tài nguyên tiêu phí cho một đơn vị sản phẩm j không dưới giá trị một đơn vị sản phẩm j. Hãy tìm phương án đánh giá trị giá ước lượng tài nguyên sao cho tổng giá trị nguồn tài nguyên sử dụng nhỏ nhất với điều kiện chi phí các tài nguyên dùng cho một sản phẩm không dưới giá trị của nó.

Dựa vào định lý đối ngẫu đối với cặp bài toán này, chúng ta phân tích ý nghĩa kinh tế trong mối quan hệ của chúng. Giả sử x là phương án số lượng sản phẩm tối ưu của bài toán (P), y là phương án đánh giá trị giá ước lượng tài nguyên tối ưu của bài toán (Q).

Nếu $x_j > 0$ thì $\sum_{i=1} a^{T}_{ij} y_i = c_j$

Về nội dung kinh tế được giải thích như sau:

$x_j > 0$ nghĩa là trong phương án sản xuất tối ưu sản phẩm j được đưa vào sản xuất thì ước lượng giá trị các tài nguyên sử dụng để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j đúng bằng giá trị sản phẩm đó. Điều này chứng tỏ việc chuyển dịch giá trị các tài nguyên vào sản phẩm được sử dụng hết, không lãng phí và việc sản xuất này là xác đáng.

Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ thì $y_i = 0$

Về nội dung kinh tế thì $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ có nghĩa là: trong phương án sản xuất tối ưu chi phí chung về tài nguyên loại I nhỏ theo khối lượng tài nguyên hiện có, khi đó giá trị ước lượng loại tài nguyên này bằng 0 ($y_i = 0$). Điều này là hợp lý vì trong phương án sản xuất tối ưu tài nguyên i không được sử dụng hết thì không nên mua thêm loại tài nguyên đó để dự trữ, vì nếu có mua thêm nó cũng không ảnh hưởng tới phương án tối ưu và tổng giá trị các sản phẩm, nhưng sẽ làm tăng chi phí quản lý dự trữ và tồn đọng vộn. Do vậy trong phương án đánh giá tài nguyên i được xem là không có giá trị.

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOACH TUYẾN TÍNH.

2. Nếu $y_i > 0$ thì $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$

Về nội dung kinh tế thì $y_i > 0$ chứng tỏ loại tài nguyên i có giá trị và như vậy nó đã được sử dụng hết vào sản xuất sản phẩm , trong phương án tối ưu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. Do đó cần mua thêm và dự trữ loại tài nguyên này cho quá trình sản xuất tiếp theo.

Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$ thì $x_j = 0$

Về mặt kinh tế thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$ chứng tỏ giá trị tài nguyên sử dụng để sản xuất loại sản phẩm j không được chuyển dịch hết vào giá trị sản phẩm. Như vậy quá trình sản xuất đã gây lãng phí và do đó sản phẩm loại j không nên đưa vào phương án sản xuất tối ưu, vì sẽ làm giảm tổng giá trị sản phẩm và sẽ làm giảm tổng số tiền lãi của doanh nghiệp.

Quan hệ giữa giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán (P) và (Q) cũng chứa đựng một nội dung kinh tế rõ rệt. Trong quá trình sản xuất suy cho cùng không thể tạo ra những sản phẩm có giá trị cao hơn, mà cùng lắm là bằng tổng giá trị các nguồn tài nguyên được sử dụng . Vì vậy chỉ có những phương án đánh giá y và phương án sản xuất x sao cho tổng giá trị sản phẩm sản xuất được bằng tổng giá trị các nguồn tài nguyên sử dụng mới là xác phương án tối ưu được chấp nhận.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Nội dung kinh tế và mô hình toán học

Tìm x = {x_{ij} } (i = 1,m; j=1,n) sao cho:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n})$$

m là điểm phát hàng; n là điểm thu hàng

a_i lượng hàng có (cung) tại điểm phát i (i=1,2,..,m)

b_j lượng hàng yêu cầu ở điểm thu j (j = 1,2,...,n)

c_{ij} Chi phí v/c một đơn vị hàng từ i đến j

x_{ij} lượng hàng v/c cần tìm từ điểm phát i đến điểm thu j.

Điều kiện cần và đủ để bài toán giả được là phải cân bằng thu phát

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bảng 3.1: Bảng vận tải

Thu / Phát	b_1	....	b_j
a_1	c_{11} x_{11}	....	c_{1j} x_{1j}
:	:	....	:
a_i	c_{i1} x_{i1}	....	c_{ij} x_{ij}
:	:	....	:
a_m	c_{1m} x_{1m}	....	c_{mj} x_{mj}

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Định lý 3.1: a) Bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu. Vì:

- Trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới: $c_{ij} \geq 0$ ($\forall$ i, j), nên với mọi phương án $x = \{x_{ij}\}$ ta có: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq 0$

- Bài toán luôn có phương án: ký hiệu $d = \sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, xác định tập hợp $\{x_{ij}\}$ như sau:

$x_{ij} = a_i b_j / d$ ($i=\overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$).

Rõ ràng $x_{ij} > 0$ ($\forall$ (i, j)), ngoài ra:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{d} = a_i \ (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{d} = b_j \ (j = \overline{1,n})$$

Như vậy $\{x_{ij} = a_i b_j / d\}$ với $i=\overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ là một phương án của bài toán.

b) Hạng của hệ phương trình (3.2) – (3.5) của bài toán bằng m + n – 1.

c) Nếu lượng cung, cầu a_i, b_j là nguyên thì lời giải của bài toán là số nguyên.

Định nghĩa. Ta gọi dây chuyền là tập hợp các ô có dạng:

$$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), \ldots, (i_s, j_s), (i_s, j_{s+1})$$

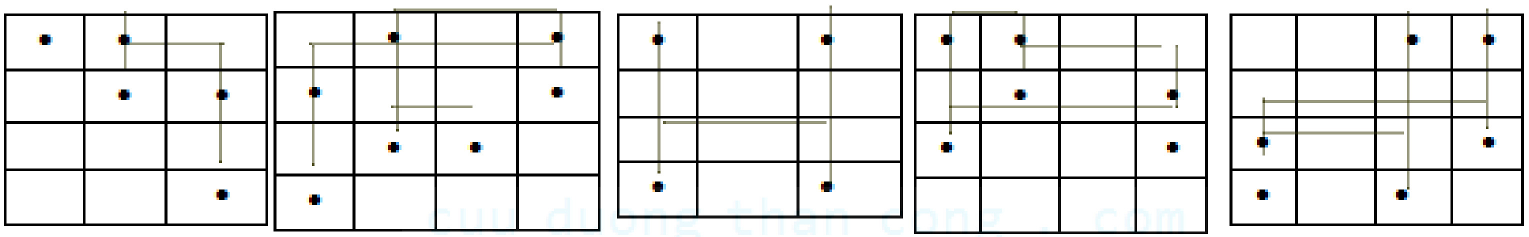
hoặc $$(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), \ldots, (i_s, j_s), (i_s + 1, j_s).$$

Một dây chuyền khép kín ($j_{s+1} \equiv j_1$ hoặc $i_{s+1} \equiv i_1$) gọi là một chu trình. Như vậy, mỗi cặp ô liền nhau trong dây chuyền ở trên cùng một hàng hay một cột và số ô trên mỗi dây chuyền có thể chẵn hay lẻ. Một chu trình bao giờ cũng gồm một số chẵn các ô.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Thí dụ: Dãy ô đánh dấu "•" trong hình (3.1) a) và b) lập thành các dây chuyền, còn các ô với dấu "•" trong hình (3.1) c) – e) lập thành các chu trình:

Hình 3.1: Dây chuyền: a), b). Chu trình: c), d), e).



Cho G là một tập hợp ô bất kỳ của bảng vận tải. Mỗi ô thuộc G gọi là ô treo nếu nó là ô duy nhất của G trên hàng hay trên cột của ô đó. Với tập ô cho ở hình 3.1 a) thì ô (1, 1) và ô (4, 3) là các ô treo. Nếu loại khỏi G ô treo (1, 1) thì ô (1, 2) sẽ trở thành ô treo của tập hợp ô còn lại.

Ta có mối lien hệ quan trọng sau đây:

Định lý 3.2. Hệ véc tơ $\{A_{ij}: (i, j) \in G\}$ của bài toán vận tải là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tập hợp các ô thuộc G không tạo thành chu trình.

Hệ quả 3.1. Véc tơ $x = \{x_{ij}\}$ là một phương án cực biên của bài toán khi và chỉ khi tập hợp các ô (i, j) mà $x_{ij} > 0$ không lập thành chu trình.

Hệ quả 3.2. Giả sử T là một tập hợp gồm m + n – 1 ô của bang vận tải, không tạo thành chu trình. Khi đó, mỗi ô (p, q) $\notin$ T sẽ tạo với các ô $\in$ T một chu trình duy nhất.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Tìm phương án cực biên ban đầu

Để giải bài toán vận tải (3.1) – (3.4) với điều kiện (3. 5) theo phương pháp thế vị, trước hết cần biết một phương án cực biên của bài toán.

a) Phương pháp min cước

Trong bảng vận tải 3.1, ta chọn ô (p, q) sao cho $c_{pq} = \min\{c_{ij}, (i, j)\}$. Nếu cực tiểu đạt tại nhiều ô thì chọn một ô bất kỳ trong số các ô đó. Sau đó phân phối hàng tối đa có thể theo tuyến p q, nghĩa là đạt;

$$X_{pq} = \mathrm{Min}\{a_p; b_q\}$$

Trừ lượng hàng vừa phân phối vào khả năng thu, phát của hàng p và cột q. Tiếp đó, ta “xoá” hàng p nếu điểm phát p đã phát hết hàng, hoặc cột q nếu điểm thu q đã nhận đủ hàng. Khi cả hàng, cột đều phát hết, thu đủ thì “xoá” cả hàng và cột đó. Trong phần bảng còn lại ta chọn ô có cước phí nhỏ nhất và phân phối tối đa lượng hàng còn lại vào ô này. Như vậy mỗi lần phân phối cho một ô, quy mô của bài toán giảm dần. Tiếp tục quá trình cho tới khi yêu cầu của mọi trạm thu và phát đều thoả mãn. Nếu kết quả quá trình phân phối cho tổng số ô được phân phối là m + n – 1 thì phương án cực biên không suy biến, tập ô được phân phối hàng gọi là tập ô cơ sở, nếu ít hơn m + n – 1 thì đó là phương án suy biến, trong trường hợp này cần bổ sung ô chọn 0, có vai trò như ô cơ sở để đảm bảo có đúng m + n – 1 ô. Việc bổ sung ô chọn 0 không được tạo với các ô cơ sở đã có bất kỳ một chu trình nào.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Thí dụ:Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải cho ở bảng 3.2 theo tiêu chuẩn min cước.

Bảng 3.2

Thu / Phát	**130**	**160**	**120**	**140**
170	20	18 / 160	22 / 10	25
200	15 / 130	25	30	15 / 70
180	45	30	40 / 110	35 / 70

Ta thấy bài toán đã ở dạng cân bằng thu – phát.
Giá trị hàm mục tiêu tương ứng bằng 12950.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Phương pháp góc Tây – Bắc.

Luôn ưu tiên phân phối cho ô nằm ở góc tây – bắc của bảng.

Thí dụ: Tìm phương án cực biên với số liệu cho ở thí dụ 3.1.

Bảng 3.2.1

Phát \ Thu	**130**	**160**	**120**	**140**
170	20 130	18 40	22	25
200	15	25 120	30 80	15
180	45	30	40 40	35 140

Phương pháp Fôghen.

Đối với mỗi hàng, mỗi cột của C ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đó. Hiệu số này biểu thị lượng phạt tối thiểu phải chịu nếu ta phân sai lượng hàng vào ô có cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đó.

Chọn hàng hay cột có hiệu số này lớn nhất. Nếu có nhiều hàng (cột) như thế thì chọn hàng (cột) tuỳ ý trong số đó.

Phân lượng hàng tối đa có thể vào ô cước phí nhỏ nhất trên hàng, cột đã chọn. Giả sử ô đó là ô (r,s). Giảm lượng cung ở hàng r và lượng cầu ở cột s một số bằng lượng hàng đã phân phối. Sự phân phối này sẽ làm thoả mãn một ràng buộc cung hay một ràng buộc cầu hoặc có thể cả hai. Loại bỏ (không cần xét ở bước tiếp theo) ràng buộc đã thoả mãn bằng cách đánh dấu chéo vào hàng hay cột tương ứng của ma trận cước phí. Nếu cả hai ràng buộc cung và cầu cùng đồng thời thoả mãn thì chỉ loại bỏ một hàng (cột) mà thôi. Trong trường hợp này cả lượng cung và cầu còn lại của hàng (cột) đó đều trở thành bằng 0.

Thí dụ. Xét lại thí dụ trên. Tính hiệu số của các hàng và cột của ma trận cước phí và khoanh tròn hiệu số lớn nhất.

Bảng 3.3: Phương án cực biên xây dựng theo phương pháp Fôghen

Thu / Phát	130	160	120	140	
170	20 70	18	22 100	25	2
200	15 60	25	30	15 140	0; 10
180	45	30 160	40 20	35	5; ; 10
	5;5	7;7	8;8	10	

Kết quả ta nhận được phương án cực biên ở bảng 3.3. Giá trị hàm mục tiêu tương ứng bằng 12200.

Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

a) Bài toán đối ngẫu và tiêu chuẩn tối ưu:

Xét bài toán vận tải:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \text{Min} \qquad (1)$$

Với các điều kiện rang buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

$$x_{ij} > 0 \text{ với } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

Ký hiệu u_i, v_j là những biến đối ngẫu ứng với hệ ràng buộc (2), (3); $u = \{u_i\}$, $v = \{v_j\}$; $g(u,v)$ là hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu, đồng thời để tiện cho việc giải thích ý nghĩa kinh tế , ta đổi dấu hệ ràng buộc (2). Khi đó bài toán đối ngẫu có dạng:

$$g(u,v) = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \text{Max}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \quad \forall (i,j)$$

Trong cặp bài toán đối ngẫu này có m x n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_{ij} \ge 0 \text{ và } v_j - u_i \le c_{ij} \quad \forall (i,j)$$

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Định lý:

Điều kiện cần và đủ để phương án x = {x_{ij}} của bài toán vận tải tối ưu là tồn tại hệ thống số {u_i, v_j} thoả mãn:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \quad (i, j) \qquad (*)$$

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ nếu } x_{ij} > 0 \qquad (**)$$

Điều kiện (*): Giá trị một đơn vị hàng tại điểm tiêu thụ so với giá trị tại nơi sản xuất phải nhỏ hơn hoặc bằng cước phí vận chuyển.

Điều kiện (**): Nếu có v/c hàng từ i đến j thì chênh lệch giá trị giữa nới SX và nơi tiêu thụ phải đúng băng cước phí vận chuyển. Đây là điều kiện giúp ta có thể xác định được thế vị của các hàng các cột khi biết thế vị của một hàng hay một cột nào đó.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Thuật toán thế vị.

Bước1: Xây dựng phương án cực biên xuất phát.

Sử dụng một trong ba phương pháp đã được giới thiệu để tìm phương án cực biên ban đầu, giả sử ta tìm được phương án cực biên x^0 không suy biến, ký hiệu tập ô cơ sở là S_0.

Bước 2: Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$

Lấy một hàng i bất kỳ, cho nó một thế vị u_i tuỳ ý (thường là cho bằng 0 để dễ tính). Các thế vị hàng và cột còn lại được xác định theo công thức:

$$v_j = u_i + c_{ij}, \text{ nếu } u_i \text{ đã biết và ô } (i, j) \in S_0 \qquad (5)$$

$$u_i = v_j - c_{ij} \text{ nếu } v_j \text{ đã biết và ô } (i, j) \in S_0 \qquad (6)$$

Vì S_0 gồm m + n − 1 không tạo thành chu trình nên nhờ hai công thức trên ta sẽ tính được m + n − 1 thế vị khác nhau, cùng với thế vị u_i cho trước ta tính được toàn bộ thế vị hàng và cột. Sau đó chuyển sang bước 3.

Bước 3: Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Theo cách xây dựng, hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$ thoả mãn điều kiện:

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ với các ô } (i, j) \in S_0$$

do đó chỉ cần kiểm tra điều kiện: $v_j - u_i \le c_{ij}$ với các ô $(i, j) \notin S_0$.

Nếu: $v_j - u_i \le c_{ij}$ với các ô $(i, j) \notin S_0$ thì phương án hiện có là tối ưu.

Nếu có một ô phi cơ sở mà $v_j - u_i > c_{ij}$ với các ô $(i, j) \notin S_0$, nghĩa là không thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì hiển nhiên phương án x^0 chưa tối ưu. Ta gọi những ô này là ô vị phạm. tính đại lượng $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ (gọi là giá trị vi phạm) đối với các ô vi phạm, rõ ràng $\Delta_{ij} >$ 0. Chuyển sang bước 4.

Bước 4: Điều chỉnh phương án

Giả sử $\max\limits_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{rk}$. Ô (r, k) được lấy làm ô điều chỉnh, tất nhiên ô $(r, k) \notin S_0$

Vì S_0 là số ô tối đa không tạo thành chu trình nên ô (r, k) sẽ tạo với các ô cơ sở đúng một chu trình duy nhất. Tìm chu trình này và ký hiệu là V, trên chu trình đánh dấu lẻ (-) chẵn (+) xen kẽ bắt đầu từ ô (r, k) là ô lẻ. Ký hiệu V_L, V_c − tập hợp ô lẻ, chẵn trên V.

Sau đó xác định lượng điều chỉnh ($q_{d/c}$) bằng công thức:

$$q_{d/c} = \min_{(i,j) \in V_c} x_{ij}^0 = x_{ec}^0 \text{ rõ ràng } q_{d/c} > 0$$

Thực hiện biến đổi biến số trên chu trình V theo công thức:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0 & (i, j) \notin V \\ x_{ij}^0 + q_{d/c} & (i, j) \notin V_L \\ x_{ij}^0 - q_{d/c} & (i, j) \notin V_C \end{cases} \qquad (7)$$

Thí dụ:, Giải bài toán trong thí dụ trên.
Giải: Phương án cực biên không suy biến.

Bảng 3.4

Thu \ Phát	130	160	120	140	
170	20	18 160	22 10	25	$u_1 = 0$
200	15 130	25	30	15 70	$u_2 = 2$
180	45	30	40 110	35 70	$u_3 = -18$
	$v_1 = 17$	$v_2 = 18$	$v_3 = 22$	$v_4 = 17$	

Xây dựng phương ám mới: phương án này không suy biến

Bảng 3.5

Thu \ Phát	**130**	**160**	**120**	**140**	
170	20	18 50	22 120	25	$u_1 = 0$
200	15 130	25	30	15 70	$u_2 = 2$
180	45	30 110	40	35 70	$u_3 = -18$
	$v_1 = 17$	$v_2 = 12$	$v_3 = 22$	$v_4 = 17$	

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 120 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 110 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

$$f_{min} = 12140$$

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Thí dụ : Bằng phương pháp thế vị, giải bài toán vận tải theo tiêu chuẩn min cước với số liệu cho dưới đây:

Giải: Bài toán cân bằng thu phát. Bằng phương pháp min cước ta tìm được phương án cực biên không suy biến như bảng 3.6.

Bảng 3.6

Thu / Phát	76	62	88	45	40	
79	10 64	19	9	6 15	8	$u_1 = 0$
102	13	11 14	8 88	7	4	$u_2 = 7$
70	12	17	10	5 30	3 40	$u_3 = 1$
60	12 12	18 48	18	7	9	$u_4 = -2$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 18$	$v_3 = 15$	$v_4 = 6$	$v_5 = 4$	

Điều chỉnh ta được phương án mới:

Bảng 3.7

Thu / Phát	76	62	88	45	40	
79	10 16	19	9 48	6 15	8	$u_1 = 0$
102	13	11 62	8 40	7	4	$u_2 = 1$
70	12	17	10	5 30	3 40	$u_3 = 1$
60	12 60	18	18	7	9	$u_4 = -2$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 12$	$v_3 = 9$	$v_4 = 6$	$v_5 = 4$	

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Bảng 3.8

Phát \ Thu	76	62	88	45	40	
79	10 / 31	19	9 / 48	6	8	$u_1 = 0$
102	13	11 / 62	8 / 40	7	4	$u_2 = 1$
70	12	17	10	5 / 30	3 / 40	$u_3 = 1$
60	12 / 45	18	18	7 / 15	9	$u_4 = -1$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 12$	$v_3 = 9$	$v_4 = 6$	$v_5 = 4$	

Phương án ở bảng 3.8 là phương án tối ưu (duy nhất). Trị tối ưu của hàm mục tiêu là:

$f(x^*) = 10.31 + 9.48 + 11.62 + 8.40 + 5.30 + 3.40 + 12.45 + 7.15 = 2659$

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

Một số dạng đặc biệt của bài toán vận tải:

a) Trường hợp chỉ có hai trạm phát hoặc hai trạm thu:

Bài toán vận tải (3.1) – (3.5) với m = 2 hoặc n = 2 có thể giải rất dễ dàng. Chẳng hạn, khi số trạm phát bằng hai (m = 2), ta có bảng vận tải:

Bảng 3.9

b_j / a_i	b_1	b_2	b_3	....	....	b_{n-1}	b_n
a_1	C_{11}	c_{12}	c_{13}	....	....	$c_{1,n-1}$	c_{11}
a_2	C_{21}	c_{22}	c_{23}	....	....	c_{2n-1}	c_{2n}

Tính các hiệu số $\alpha_i = c_{2i} - c_{1i}$.

Sắp xếp các trạm thu theo thứ tự α_i giảm dần: $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

Lần lượt phân hàng từ trạm phát 1 cho các trạm thu theo thứ tự trên cho đến khi hết hàng. Sau đó phân hàng từ trạm phát 2 cho các tạm thu còn lại.

Trường hợp bài toán vận tải chỉ có hai trạm thu (n = 2) ta làm tương tự.

Thí dụ: Giải bài toán vận tải với các dữ liệu cho trong bảng sau. Trong mỗi ô, ghi góc trên bên trái là cước phí vận chuyển, số (in đậm) góc dưới bên phải là lượng hàng vận chuyển tối ưu. Cước phí vận chuyển nhỏ nhất bằng $f_{min} = 518$.

Bảng 3.10

b_j / a_i	10	12	15	18	20	25	30
60	3 **10**	5 **12**	4 **15**	6 **18**	1 **5**	3	6
70	8	9	7	8	2 **15**	3 **25**	5 **30**
α_j	5	4	3	2	1	0	-1

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

b) Trường hợp bài toán không cân bằng thu phát

- Cung > cầu: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, ta thêm cột thu giả n + 1 với:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Và $c_{i,n+1} = 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$.

- Cung < cầu: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, ta thêm điểm phát giả m + 1 với:

$$a_{m+1,j} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Và $c_{m+1,j} = 0, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n$. Giải bài toán với m +1 điểm phát và n điểm thu. Nếu trong phương án tối ưu có $x_{m+1} > 0$ thì có nghĩa là trạm thu j bị thiếu lượng hàng $x_{m+1,j}$.

Thí dụ: Cho bài toán vận tải với dữ iệu trong bảng 3.11 a). Tổng cung bằng 200, tổng cầu 170. Cung vượt cầu 30. Ta thêm cột thu 4 (cột thu giả) với lượng cầu 30 và lập bảng vận tải 3.11 b). Dùng phương pháp Fôghen tìm phương án cực biên ban đầu và giải bằng thuật toán thế vị ta nhận được phương án tối ưu $x_{opt} = (0, 0, 50, 0, 0, 40, 0, 30, 60, 0, 20, 0)$ với $f_{min} = 330$. Do $x_{24} = 30$ nên điểm phát 2 để lại lượng hàng 30.

Bảng 3.11 a)

a_i \ b_j	60	40	70
50	2	5	1
70	3	4	8
80	1	5	3

Bảng 3.11 b)

a_i \ b_j	60	40	70	30
50	2	5	1	0
70	3	4	8	0
80	1	5	3	0

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH BÀI TOÁN VẬN TẢI

c) Bài toán tìm cực đại

Trong một số tình huống thực tiễn cần giải bài toán tìm cực đại:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \text{Max}$$

Với các điều kiện ràng buộc (3.2) – (3.5) của bài toán vận tải đã xét ở trên. Bài toán này có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu của hàm –f(x) với cùng các ràng buộc (3.2)-(3.4). Tuy nhiên ta cũng có thể dùng phương pháp thế vị để giải mà không cần đưa về bài toán min. Chỉ cần thực hiện một số sửa đổi như sau:

Khi xây dựng phương án cực biên ban đầu, ta ưu tiên phân "hàng" vào các ô có cước phí c_{ij} lớn nhất.

Điều kiện tối ưu của bài toán: $v_j - u_i \geq c_{ij}$.

Khi cần tìm ô điều chỉnh thì chọn ô có $\Delta_{rs} = \min\{\Delta_{ij}\}$, lượng điều chỉnh trên chu trình

$$q_{đ/c} = \text{Max}\{x_{ij}\} \text{thuộc } v^+.$$

Thí dụ: Tìm cực đại của bài toán vận tải với dữ liệu cho trong bảng 3.12.

Bảng 3.12

a_i \ b_j	40	60	30	70
50	2	5	1	0
70	3	4	8	0
80	1	5	3	0

Lời giải là x_{opt} = (40, 0, 10, 0, 0, 60, 10, 0, 0, 0, 10, 70) với f_{max} = 2660

d) Bài toán phân việc

Có n người (i = 1, 2, …, n) và n công việc (j = 1, 2, …, n). Để giao cho người i là công việc j cần một chi phí (năng suất) là c_{ij}. Vấn đề là cần phân bổ cho người nào làm việc gì (mỗi người chỉ làm một việc và mỗi việc chỉ một người làm) sao cho tổng chi phí (tổng sản lượng) là nhỏ nhất (lớn nhất)?

Mô hình toán học của bài toán này như sau:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \text{Min} \qquad (3.9)$$

Với các điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,m} \qquad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \qquad (3.11)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ hay } 1,\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.12)$$

Vì có các điều kiện (3.10) – (3.11) nên điều kiện (3.12) có thể thay bằng x_{ij} nguyên ≥ 0, i = 1,2,…., n; j = 1, 2, ….., n.

Trong mô hình trên ta giả thiết số người bằng số công việc và bằng n. Tuy nhiên, cũng có thể xét trường hợp khi số người khác số công việc. Chẳng hạn, nếu số người nhiều hơn số công việc, ta thêm vào các công việc giả, với chi phí (hoặc năng suất) bằng 0.

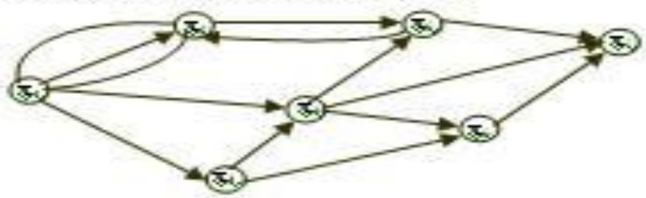
CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

4.1 Một số khái niệm cơ bản

4.1.1 Định nghĩa về đồ thị hữu hạn

a) Ký hiệu là $G = \{X, A\}$, trong đó $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là tập hữu hạn các điểm (đỉnh, nút). $A = \{(i, j)\}$ là tập hợp các nhánh (cung) nối tất cả hoặc một phần các điểm $x_i \in X$ lại với nhau, cách nối điểm i với điểm j, ký hiệu là (i, j).

Thí dụ 4.1 $G = \{X, A\}$, trong đó $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ và $A = \{(1,2), (1,4), (1,3), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (5,7), (4,6), (6,7)\}$



Hình 4.1

Đồ thị vô hướng: Ký hiệu $\{\bar{G} = X, \bar{A}\}$ trong đó X là tập các đỉnh (nút, điểm) và $\bar{A}$ là tập các nhánh. Nhánh là một cặp không kể đến thứ tự hai đỉnh khác nhau x_i và x_j nào đó với $x_i \in X$, $x_j \in X$, ký hiệu là (i, j). Vậy $(x_i, x_j) = (x_j, x_i)$ trong đồ thị vô hướng.

Cấp của một đỉnh là số cung nối tới nó. Cấp của đồ thị là cấp cực đại trong các cấp của các đỉnh của nó.

Một đường đi từ đỉnh x_i đến đỉnh x_j là bộ t nút khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_t$ sao cho $(x_k, x_{k+1}) \in \bar{A}$ với k = 1, 2, ..., t-1.

Chu trình (mạch vòng) là bộ t đỉnh: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ sao cho $x_1, \ldots, x_{t-1}$ là một đường đi, $x_t \equiv x_1$ và có ít nhất ba đỉnh khác nhau (tức là $t - 1 \geq 3$).

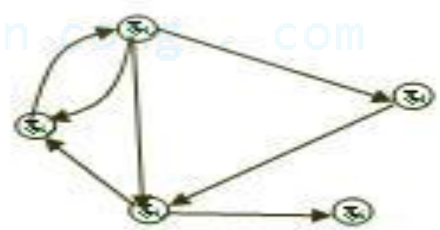
Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu ứng với mỗi cặp $x_i, x_j \in X$ đều có một đường đi từ x_i đến x_j.

Số các đỉnh của đồ thị thường ký hiệu là n còn số nhánh là m.

Đồ thị có hướng: Ký hiệu là $G = \{X, A\}$ nhưng mỗi nhánh là là một cặp có thứ tự. Vì vậy $(x_i, x_j) \neq (x_j, x_i)$. Nhưng đồ thị không được chứa cung tự nối dạng (x_i, x_i).

Thí dụ 4.2

Hình 4.2 là một đồ thị có hướng $G = \{X, A\}$ với $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ và $A = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_3, x_2), (x_4, x_3), (x_3, x_5)\}$. Ta sẽ nói là cung (x_i, x_j) ký hiệu (i, j) là đi từ đỉnh i đến đỉnh j. Đồ thị vô hướng tương ứng với một đồ thị có hướng là đồ thị nhận được khi không tính đến hướng trên các cung nữa. Đồ thị có hướng là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông



Hình 4.2

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Các yếu tố khác của đồ thị

a. Ánh xạ và ánh xạ ngược:

- Một ánh xạ của đỉnh x trong đồ thị G = {X,A} ký hiệu là $\Gamma(x)$ là tập hợp các đỉnh cuối của tất cả các cung có đỉnh đầu là x. Thí dụ trong hình 4.2: $\Gamma(x) = \{x, x, x\}$.
- Ánh xạ ngược của một đỉnh x trong đồ thị G = {X,A} ký hiệu $\Gamma^{-1}(x)$ là tập hợp các đỉnh đầu của tất cả các cung có đỉnh cuối là x. Chẳng hạn trong hình 4.3: $\Gamma^{-1}(x) = \{x, x\}$.

b. Cây

Đồ thị vô hướng được gọi là cây nếu nó liên thông và không chứa chu trình. Mỗi đỉnh cấp 1 của cây gọi là một lá.

Định lý 4.1:

- Mỗi cây có hơn một đỉnh sẽ có lá.
- Đồ thị vô hướng là một cây khi và chỉ khi nó liên thông và có n-1 cung.
- Với bất kỳ hai đỉnh $x \neq x$ trên cây đều có tồn tại duy nhất một đường đi từ x tới x.
- Nếu thêm một cung mới vào một cây thì đồ thị mới nhận được có đúng một chu trình.

Cây bao trùm (cây tối đại) của đồ thị liên thông, vô hướng $\bar{G} = \{X, \bar{A}\}$ là một cây trong $\bar{G}$ mà chứa tất cả các đỉnh của $\bar{G}$. Vậy cây bao trùm là cây T có dạng T = {X,A} trong đó $A \in \bar{A}$.

Định lý 4.2 Giả sử $\{\bar{G} = X\bar{A}\}$ là một đồ thị vô hướng liên thông và $A \in \bar{A}$. Nếu các cung của A không tạo thành một chu trình nào thì có thể bổ sung thêm các cung của đồ thị vào A để được tập mới A sao cho {X, A} là một cây bao trùm.

Trong hệ thống kỹ thuật, người ta thường sử dụng các loại cây sau đây.

- Cây người chào hàng.
- Cây có chiều dài ngắn nhất.
- Cây Steiner. Nếu cho phép đưa thêm vào tập hợp đỉnh của đồ thị những đỉnh phụ thì độ dài của cây ngắn nhất có thể giảm xuống. Đỉnh phụ đưa thêm vào đồ thị có 3 nhánh cách nhau 120^0 được gọi là đỉnh Steiner.

c. Lát cắt: là tập hợp các nhánh sao cho nếu loại chúng ra khỏi đồ thị thì đồ thị trở nên không liên thông.

d. Đồ thị phẳng và đồ thị không phẳng:

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

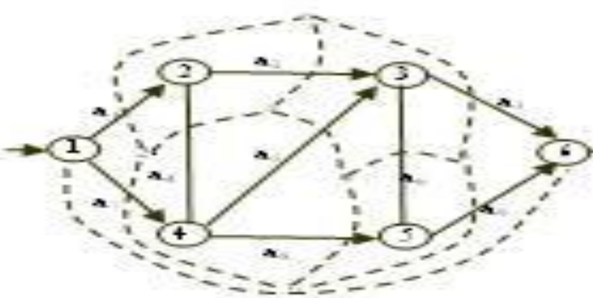
e. Đồ thị đối ngẫu

Đối với một đồ thị G = (X, A), giữa một cặp đỉnh nào đó ta gọi là đỉnh vào (đỉnh đầu) và đỉnh ra (đỉnh cuối) ta có thể xây dựng được một đồ thị đối ngẫu G = {X,A} theo trình tự sau đây:

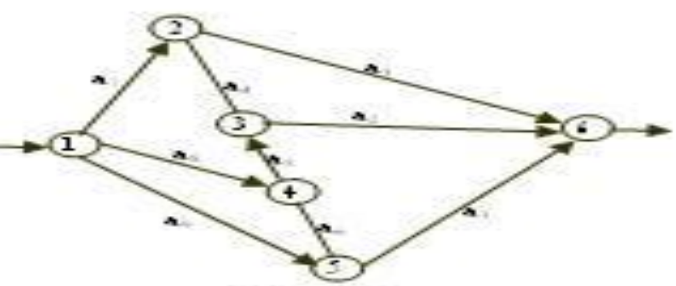
- Vẽ thêm một cung nối liền hai đỉnh "vào" và "ra" của đồ thị G = {X,A}.
- Trong mỗi "diện" của G = {X,A}("diện" là một phần của đồ thị được giới hạn bởi các cung mà bên trong nó không chứa các cung khác của đồ thị), kể cả diện ngoài (diện ngoài là phần mặt phẳng không giới hạn bởi các cung của đồ thị) ta đặt một đỉnh x trong tập X của đồ thị đối ngẫu sẽ được xây dựng.
- Nối các đỉnh trong tập X lại với nhau bởi các cung, cắt các cung tương ứng của đồ thị phẳng ban đầu, số cung của đồ thị đối ngẫu đúng bằng số cung của đồ thị phẳng ban đầu.

Hướng của cung trong đồ thị đối ngẫu được xác định như sau: Nếu cung của đồ thị đối ngẫu đi từ một đỉnh nằm bên trong một diện của đồ thị phẳng ban đầu cắt cung của G = {X,A} có hướng thuận với chiều kim đồng hồ theo mạch vòng của đa diện, thì hướng của cung đang xét trong đồ thị đối ngẫu sẽ đi từ bên trong diện ra bên ngoài diện và ngược lại. Nếu cung của đồ thị phẳng ban đầu không có hướng thì cung tương ứng của G = {X,A} cũng không có hướng.

Hình 4.3a và 4.3b cho một thí dụ về cách xây dựng đồ thị đối ngẫu.



Hình 4.3.a



Hình 4.3.b

– Tính đối ngẫu của đường và lát cắt trong đồ thị phẳng

Đối với một đồ thị phẳng G = {X,A}, tương ứng với một cặp đỉnh "vào", "ra", ta có thể dựng một đồ thị đối ngẫu G = {X,A}.

Đường đi trong G = {X,A} sẽ tương ứng với lát cắt trong G = {X,A} và ngược lại. Ta có cặp đối ngẫu sau:

Trong G = {X,A}		Trong G = {X,A}
Đường đi	⟷	Lát cắt
Lát cắt	⟷	Đường đi

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

- *Ý nghĩa mạng của đối ngẫu*:

Giả sử ta phải chuyển lượng hàng bi > 0 từ mỗi đỉnh i = 1, 2, ..., n-1 tới đỉnh n theo một mạng riêng của mình. Khi đó nghiệm tối ưu của bài toán dòng trên mạng cho ta cách vận chuyển tốt nhất.

Lại giả sử có một công ty vận tải mở dịch vụ vận chuyển từ mọi đỉnh i đến đỉnh n (theo mạng của họ) với giá vận chuyển một đơn vị hàng là pi. Nếu (i, j) là một cung trong mạng riêng của ta và phí tổn vận chuyển một đơn vị hàng trên cung này là cij, thì ta có thể tự chuyển hàng từ i đến j rồi giao cho công ty vận tải chuyển nốt đến đỉnh n, với giá đơn vị là cij + pi. Công ty vận tải biết các véc tơ b và c và tìm cách bao hết việc vận chuyển hàng của ta, kể cả trên cung (i, j). Khi đó họ phải ra giá để cạnh tranh là pi ≤ cij + pj và pn = 0. Với giá đủ hấp dẫn này, coi như ràng buộc, mục đích của họ tất nhiên là làm cực đại doanh thu . Vậy bài toán của công ty chính là bài toán đối ngẫu với bài toán tự vận chuyển của ta. Định lý đối ngẫu mạnh của quy hoạch tuyến tính nói rằng doanh thu tối ưu của công ty đúng bằng phí tổn tối ưu khi ta tự vận chuyển bằng mạng rieng. Nói cách khác, nếu hai phía đều tìm cách vận chuyển tối ưu và giá của công ty đặt ra đúng thì cước phí là như nhau.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

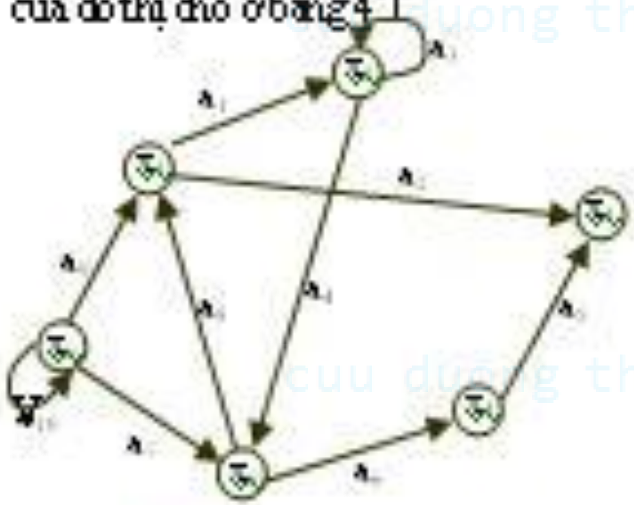
Biểu diễn đồ thị dưới dạng ma trận

a. Ma trận liên hệ trực tiếp

Giả sử cho đồ thị G = {X, A}, ma trận liên hệ trực tiếp của nó được ký hiệu là A = {a_{ij}}, được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu trong } G = \{X,A\} \text{ có cung } (i,j) \text{ (kể cả cung tự nối)} \\ 0 & \text{, nếu trong } G = \{X,A\} \text{ không có cung } (i,j) \end{cases}$$

Thí dụ 4.3 Cho đồ thị G = {X,A} như hình 4.4. Khi đó ma trận liên hệ trực tiếp của đồ thị cho ở bảng 4.1



Hình 4.4

Bảng 4.1

0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

b. Ma trận liên hệ cung nút

Cho đồ thị $G = \{X, A\}$ có n đỉnh và m cung. Ma trận liên hệ cung nút của đồ thị, ký hiệu là $B = \{b_{ij}\}$, có kích thước m×n với các phần tử được xác định như sau:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu x là đỉnh đầu của cung a} \\ -1 & \text{, nếu x là đỉnh cuối của cung a} \\ 0 & \text{, nếu x không phải là đỉnh đầu hoặc đỉnh cuối của cung a hoặc nếu cung a là cung tự nối} \end{cases}$$

Thí dụ 4.4 Đối với đồ thị cho ở hình 4.4 thì ma trận cung nút có dạng như ở bảng 4.2

Bảng 4.2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Vậy mỗi cột của B có đúng hai phần tử khác không là 1 và -1; chỉ đỉnh đầu và đỉnh cuối của cung tương ứng của cột này. Khi xét các hàng ta thấy hàng i ứng với đỉnh i và ràng buộc sẽ là:

$$a_i^T x = \sum x_{ij} - \sum x_{ji} = b_i$$

trong đó $a_i^T x$ là hàng i của ma trận B. Như vậy, các phần tử khác 0 (là 1 hoặc -1) trên hàng i của B ở cột nào thì có nghĩa là cung tương ứng cột đó có nối tới đỉnh i (1 ứng với cung đi ra từ đỉnh i, -1 ứng với cung đi vào đỉnh i). Ma trận B gọi là ma trận nối cung - nút hoặc gọi tắt là ma trận nối.

Nhận xét rằng tổng tất cả các hàng của B là véc tơ 0. Vì vậy n hàng của B là phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, có thể bỏ đi một hàng (nếu bài toán là chấp nhận được), thường là hàng ứng với đỉnh ra của đồ thị.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

- Bài toán đường đi ngắn nhất

Ý nghĩa và nội dung bài toán

Bài toán đường đi ngắn nhất là một bài toán quan trọng nảy sinh từ nhiều bài toán thực tế về vận tải, mạng thông tin, điều khiển tối ưu,...Có thể phát biểu một dạng toán học chung cho các bài toán như vậy thành bài toán dòng trên mạng như sau. Cho một đồ thị có hướng G = {X,A}. Mỗi cung (i, j) có cước phí $c_{ij} \geq 0$ chính là độ dài của cung. Để tìm đường ngắn nhất từ một đỉnh s đến một đỉnh r ta sẽ thấy cần tính nhiều hoặc thậm chí đường ngắn nhất từ mọi đỉnh khác đỉnh r tới đỉnh r. Vì vậy người ta gọi bài toán đường ngắn nhất là bài toán tìm đường đi ngắn nhất từ mọi đỉnh trong X tới một đỉnh r thuộc X cho trước, gọi là đỉnh gốc. Để đưa về bài toán dòng trên mạng, đặt $b_i = 1$ cho mỗi đỉnh $i \neq r$ và

$$b_r = -\sum b_i$$

Ta có thể giải bài toán đường ngắn nhất bằng thuật toán đơn hình mạng. Đường ngắn nhất từ đỉnh i tới đỉnh r chính là các cung thuộc cây bao trùm tối ưu T nối từ đỉnh i đến đỉnh r (đây là đường đi có hướng, trong đường đi không có cung lùi). Có nhiều cách để giải bài toán tìm đường đi ngắn nhất, nhưng trong khuôn khổ bài giảng này ta nghiên cứu một thuật toán tỏ ra có hiệu quả nhất, đó là thuật toán gán nhãn do Dijkstra công bố năm 1959. Ý tưởng của thuật toán là lần lượt tìm đường đi ngắn nhất từ mỗi đỉnh đến đỉnh gốc ký hiệu là r, bắt đầu từ đỉnh có đường đi này ngắn hơn cả, rồi theo thứ tự đỉnh có đường ngắn hơn làm trước. Cụ thể là lần lượt gán cho các đỉnh của đồ thị một số gọi là nhãn của đỉnh. Cho đỉnh vào của đồ thị là x_i có nhãn bằng 0, sau đó các cung đi từ x_i đến các đỉnh x_j, $j \in \Gamma(x_i)$, ta chọn cung có độ dài nhỏ nhất và gán nhãn cố định cho nó. Tiếp theo trong các cung đi từ một đỉnh đã có nhãn cố định đến một đỉnh có nhãn tạm thời ta lại chọn cung sao cho độ dài của nó cộng với nhãn của đỉnh đã được gán nhãn là nhỏ nhất, giá trị này được gán cho đỉnh cuối của đường đi này. Quá trình tiếp tục cho đến khi đỉnh cuối (đỉnh gốc) được gán nhãn cố định.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Thuật toán Dijkstra

Cho đồ thị G = {X.A}, tìm đường đi ngắn nhất từ xs đến xt, ký hiệu L(xi) là nhãn của đỉnh xi (i =). Thuật toán như sau:

Bước 1: Đặt L(x1) = L(xs) = +0 và coi đây là nhãn cố định.

Đặt L(xi) = +∞ với i ≠ 1 và xem các đỉnh này có nhãn tạm thời.

Gán xp ≡ xs

Bước 2: Với tất cả các đỉnh xiΓ(xp) có nhãn tạm thời sẽ được thay đổi nhãn tạm thời mới theo điều kiện sau:

L(xi) = Min{L(xi); L(xp) + cpi} (4.1)

Bước 3: Trong số các đỉnh đang có nhãn tạm thời (cũ và mới thay đổi) ta tìm một đỉnh j có nhãn tạm thời thỏa mãn điều kiện:

L*(xj) = Min{L(xi)│L(xi) có nhãn tạm thời mới} (4.2)

Coi nhãn của đỉnh xj ứng với điều kiện (4.2) là nhãn cố định và đặt xp ≡ xj chuyển sang bước sau.

Bước 4:

a. Nếu chỉ cần tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh xs đến đỉnh xt thì có hai trường hợp xảy ra:

- Khi xp≡xt thì L(xp) là chiều dài đường đi ngắn nhất cần tìm. Thuật toán dừng.

- Khi xp ≠ xt quay lại bước 2.

b. Nếu cần tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh xs đến các đỉnh còn lại của đồ thị, thì có hai trường hợp xảy ra:

- Khi nhãn của tất cả các đỉnh là nhãn cố định thì trị số nhãn của đỉnh xj (j ≠ s) là chiều dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh xs đến đỉnh xj trong đồ thị G = {X.A}.

- Nếu đồ thị vẫn còn đỉnh có nhãn tạm thời thì quay lại bước 2.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

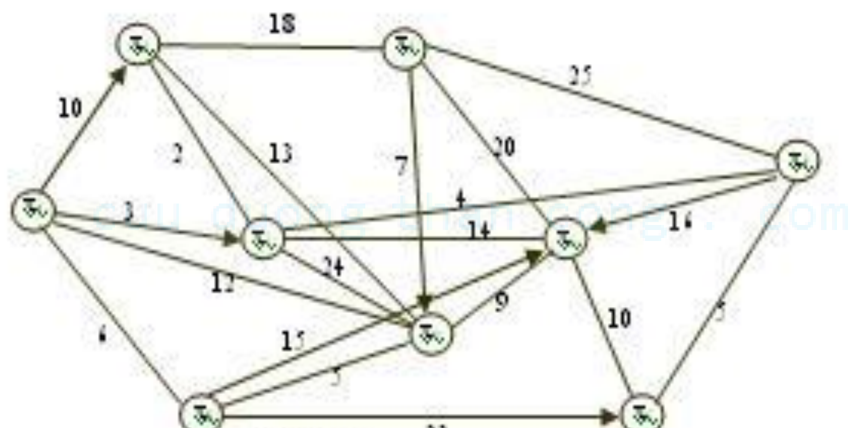
Thí dụ: Cho đồ thị G = {X,A} thể hiện bởi ma trận liên hệ trực tiếp cho ở bảng 4.3. Các trị số trong các ô biểu thị độ dài đường đi từ i đến j.

Hãy vẽ đồ thị G và tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_1 đến tất cả các đỉnh còn lại.

Bảng 4.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1		10					3	6	12
x_2	10		18				2		13
x_3		18		25		20			7
x_4			25		5	16	4		
x_5				5		10			
x_6			20		10		14	15	9
x_7		2		4		14			24
x_8	6				23				5
x_9	12	13				9	24	5	

Giải bài toán bằng thuật toán Dijkstra:



Hình 4.5

Vòng lặp 1:

Bước 1: Đặt $L(x_1) = +0$; $L(x_i) = +\infty$ $i \neq 1$. Đặt $x_p \equiv x_1 \rightarrow B_2$

Bước 2: $\Gamma(x_p) = \Gamma(x_1) = \{x_2, x_7, x_8, x_9\}$, các đỉnh x_2, x_7, x_8, x_9 được thay nhãn tạm thời như sau:

$L(x_2) = Min\{L(x_2); L(x_p)+c_{p2}\} = Min\{+\infty; 0 + 10\} = 10$

$L(x_7) = Min\{L(x_7); L(x_p)+c_{p7}\} = Min\{+\infty; 0 + 3\} = 3$

$L(x_8) = Min\{L(x_8); L(x_p)+c_{p8}\} = Min\{+\infty; 0 + 6\} = 6$

$L(x_9) = Min\{L(x_9); L(x_p)+c_{p9}\} = Min\{+\infty; 0 + 12\} = 12$

Bước 3: Gán nhãn có định

$L^*(x_i) = Min\{L(x_2), L(x_7), L(x_8), L(x_9), L(x_3), L(x_4), L(x_5), L(x_6)$

$= Min\{10, 3, 6, 12, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty\} = 3$- ứng với đỉnh x_7. Gán $x_p \equiv x_7 \rightarrow B_4$

Bước 4: Đồ thị còn có nhãn tạm thời $\rightarrow B_2$

....

Vòng lặp 6:

Bước 2: $\Gamma(x_p) = \Gamma(x_5) = \{x_6\}$, các đỉnh x6 được thay nhãn tạm thời như sau:

$L(x_6) = Min\{L(x_6); L(x_p)+c_{p6}\} = Min\{17; 12 + 10\} = 17$

Bước 3: Gán nhãn có định

$L^*(x_i) = Min\{L(x_6), L(x_3)\}$

$= Min\{ 17, 23\} = 17$- ứng với đỉnh x6. Gán $x_p \equiv x_6 \rightarrow B_4$

Bước 4: Đồ thị còn có nhãn tạm thời $\rightarrow B_2$

Vòng lặp 7:

Bước 2: $\Gamma(x_p) = \Gamma(x_6) = \{x_3\}$, đỉnh x_3 được thay nhãn tạm thời như sau:

$L(x_3) = Min\{L(x_3); L(x_p)+c_{p3}\} = Min\{23; 17 + 20\} = 23$

Bước 3: Gán nhãn có định

$L^*(x_i) = Min\{L(x_3)\}$

$= Min\{ 23\} = 23$- ứng với đỉnh x_3. Gán $x_p \equiv x_6 \rightarrow B_4$

Bước 4: Đồ thị không còn nhãn tạm thời. Stop.

Chú ý: - Để tìm lộ trình đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến các đỉnh còn lại ta bắt đầu từ đỉnh gốc lần ngược lại liên tiếp theo quan hệ sau:

$$L^*(x_j) - c_{ij} = L^*(x_i) \qquad (4.3)$$

trong đó x_j là đỉnh nằm liền kề trước đỉnh x_i trên đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến đỉnh x_j.

- Nếu đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến đỉnh x_t là duy nhất thì các cạnh hoặc cung (i, j) của đường đi ngắn nhất này tạo nên một cây có gốc là x_s và ngọn là x_t.Nếu đường đi này không duy nhất thì có nhiều cây tương ứng.
- Thuật toán Dijkstra chỉ áp dụng được khi $c_{ij} \geq 0$. Trong trường hợp tổng quát, c_{ij} có thể âm, khi đó có thuật toán giải riêng.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Mạng liên thông

Nội dung và ý nghĩa của bài toán

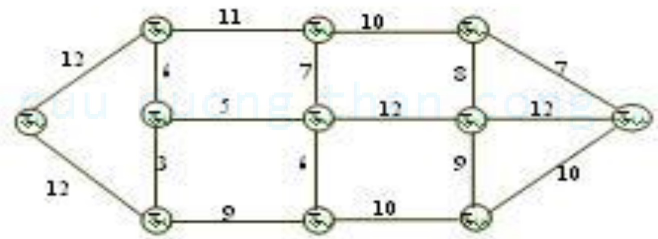
a. Nội dung bài toán: Cho đồ thị vô hướng đối xứng G = XA, với tập $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, mỗi cạnh của đồ thị gán một số không âm, gọi là độ dài của cạnh. Hãy tìm một cây bao trùm có tổng độ dài các cạnh là nhỏ nhất?

Theo định nghĩa cây là một đồ thị liên thông và không chứa chu trình. Cây của một đồ thị liên thông n đỉnh gồm n-1 cạnh không chứa chu trình.

b. Ý nghĩa của bài toán:

4.3.2 Thuật toán Prim

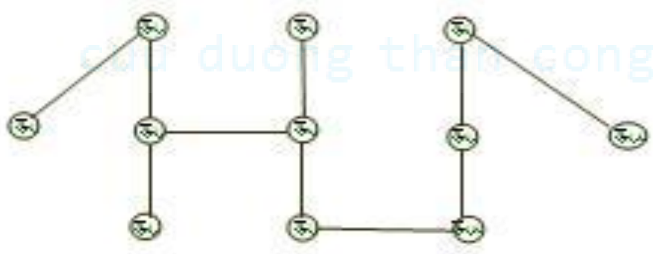
Thí dụ 4.6 Cho đồ thị vô hướng G = XA, mỗi cạnh gán một giá trị $c_{ij} > 0$ gọi là độ dài cạnh, như hình 4.5



Hình 4.5

Giải bằng thuật toán Prim:

Đầu tiên ta chọn cạnh ngắn nhất (3,4) làm gốc cây, tiếp đó chọn cạnh (3,6) nối vào cây, rồi lần lượt chọn cạnh (3,2), (6,7), (5,6), (5,8), (8,11), (8,9), (9,10) và cuối cùng là chọn cạnh (1,2) hoặc (1,4). Đến đây ta có đủ n - 1 = 10 cạnh và ta được một cây bao trùm có tổng độ dài các cạnh là ngắn nhất, hình 4.6



Hình 4.6

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Bài toán luồng lớn nhất

Nội dung bài toán:

Phát biểu toán học của bài toán là:

$$\text{Max } b_s$$
$$Ax = b,$$
$$b_t = -b_s$$
$$b_i = 0, \forall i \neq s, t,$$
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A$$

Giá trị của b_s sẽ gọi là giá trị của dòng chấp nhận được tương ứng. Bài toán luồng lớn nhất có thể đưa về bài toán dòng trên mạng bằng cách sau. Trước hết, ta phải đưa vào các c_{ij}. Ta đặt $c_{ij} = 0 \; \forall (i,j) \in A$. Ta vẽ thêm cung mới (t, s) với $u_{ts} = +\infty$ và $c_{ts} = -1$. Tìm cực tiểu hàm mục tiêu $\sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} = -x_{ts}$ ở bài toán dòng trên mạng mới được đặt, do đó, chính là dòng chấp nhận được sao cho x_{ts} là lớn nhất. Nhưng vì bài toán mới đặt không có nguồn và điểm hút nên toàn bộ dòng này phải đi qua mạng để từ s quay lại t. Vậy x_{ts} chính là giá trị nghiệm của bài toán luồng lớn nhất.

Ngược lại, việc tìm dòng chấp nhận được của bài toán dòng trên mạng có tải năng hạn chế có thể đưa về giải bài toán luồng lớn nhất như sau. Trước hết ta bỏ các hệ số c_{ij} đi và đưa thêm vào nút nguồn s và điểm hút t. Ta vẽ thêm cung (s, j) tới mỗi đỉnh j có $b_j > 0$ và đặt tải năng của nó là $u_{sj} = b_j$ và cung (i, t) từ mỗi nút i có $b_i < 0$ và đặt $u_{it} = -b_i$. Vì $\sum b_i = 0$ ta có $\sum u_{sj} = \sum u_{it} := w$. Bây giờ ta đưa vào khái niệm cắt, dùng để nhiều cho bài toán luồng lớn nhất.

Một tập con S của tập các đỉnh X được gọi là một cắt hoặc cụ thể hơn, s,t cắt của bài toán luồng (dòng) lớn nhất nếu $s \in S$ và $t \notin S$. Dung lượng $C(S)$ của cắt S là tổng tải năng của các cung đi từ S ra ngoài phần bù của S, tức là các cung có đuôi thuộc S, đầu không thuộc S. Vậy

$$C(S) = \sum_{(i,j) \in A:\, i \in S,\, j \notin S} u_{ij}$$

Mỗi dòng đi từ s đến t có thể tách thành hai phần là tổng các dòng trên các cung ra khỏi S trừ đi tổng các dòng trên các cung quay ngược lại S. Tức là mỗi véc tơ dòng x có giá trị v (chính là dòng từ s đến t):

$$v = \sum_{i \in S,\, j \notin S} x_{ij} - \sum_{j \notin S,\, i \in S} x_{ji} \qquad (4.4)$$

Nói riêng, nếu lấy $S = \{s\}$ thì $v = \sum_{j \neq s} x_{sj}$ hoặc $S = X \setminus \{t\}$ thì $v = \sum_{j \neq t} x_{jt}$, vì ta luôn giả thiết là trong mạng không có cung dạng (t,j), tức là cung ra khỏi điểm hút. Từ (4.4) ta thấy ngay là giá trị của mọi dòng chấp nhận được (từ s đến t) phải thỏa mãn:

$$v \leq C(S) \qquad (4.5)$$

với mọi cắt S. Vậy dung lượng của bất kỳ cắt nào cũng là một "cổ chai" mà dòng cực đại không thể vượt quá được.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

Bây giờ quay lại bài toán luồng lớn nhất ta vừa lập từ bài toán dòng trên mạng. Rõ ràng giá trị w = ∑u = ∑u là dung lượng của cắt gồm chỉ có đỉnh s (và cũng là dung lượng của cắt gồm mọi đỉnh, chỉ trừ đỉnh t). Do đó theo (4.5) mọi dòng chấp nhận được của bài toán luồng lớn nhất đang xét đều có giá trị không vượt quá w. Cụ thể hơn là đối với dòng x chấp nhận được của bài toán luồng lớn nhất này thì 3 khẳng định sau là tương đương:

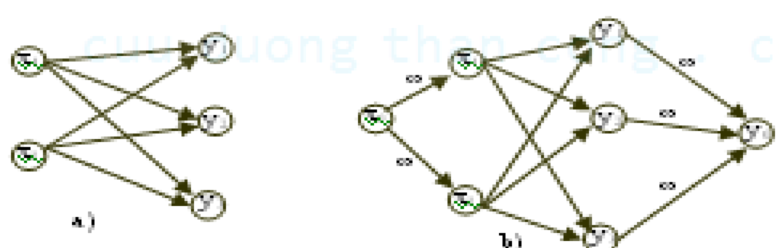
- Giá trị của x là w.
- x = u với mọi cung (s,j).
- x = u với mọi cung (i,t).

Dễ thấy dòng chấp nhận được của bài toán luồng lớn nhất (mà có giá trị w) luôn là dòng chấp nhận được của bài toán dòng chấp nhận được ban đầu (vì ở các điểm nguồn và điểm hút luật bảo toàn dòng được thỏa mãn, còn ở các đỉnh khác thì sự bảo toàn dòng ở hai bài toán là như nhau). Ngược lại, mỗi dòng chấp nhận được của bài toán dòng trên mạng phải thỏa x = u theo sự bảo toàn dòng ở các điểm nguồn (vì u = b), nên phải là dòng chấp nhận được với giá trị w của bài toán luồng lớn nhất tương ứng.

Định lý 4.3 Đối với bài toán luồng lớn nhất đúng một trong hai trường hợp sau sẽ xảy ra:

- Có dòng chấp nhận được với giá trị lớn tùy ý và mọi cắt đều có dung lượng vô hạn.
- Tồn tại luồng lớn nhất và giá trị của nó là cực tiểu của dung lượng của tất cả các cắt.

Bài toán tìm luồng lớn nhất trên một mạng có nhiều điểm nguồn và nhiều điểm hút có thể dễ dàng quy về bài toán luồng lớn nhất trên mạng chỉ có một điểm nguồn và một điểm hút bằng cách thêm vào các đỉnh giả và cung giả thích hợp như hình 4.7a,b



Hình 4.7

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Thuật toán Ford - Fulkerson

a. Ý tưởng của thuật toán.

Xuất phát từ luồng không (xij = 0 (i,j)). Tiếp đó, tìm một đường đi từ đỉnh nguồn xs đến đỉnh đích xt sao cho trên cạnh có vận chuyển theo chiều thuận (từ điểm nguồn tới điểm hút) thì lượng hàng vận chuyển chưa đạt tới khả năng thông qua của cung có dung lượng nhỏ nhất.. Nếu không có đường đi nào như thế thì luồng hiện có là luồng lớn nhất, còn nếu phát hiện có đường đi như thế thì điều chỉnh luồng hiện có như sau: thêm một lượng hàng h vào mỗi cung chưa vận chuyển hoặc có vận chuyển hàng theo chiều thuận, giảm lượng hàng vận chuyển h trên các cung có vận chuyển hàng theo chiều ngược (từ điển hút về điểm nguồn), với h là giá trị lớn nhất có thể được sao cho luồng sau khi điều chỉnh vẫn còn phù hợp với khả năng thông qua của mạng, nghĩa là 0 ≤ xij ≤ uij. Mỗi lần điều chỉnh như vậy ta sẽ vận chuyển thêm được h đơn vị hàng từ điểm nguồn tới điểm hút. Sau khi điều chỉnh ta kiểm tra xem có đường đi nào từ điểm nguồn đến điểm đích có tính chất trên không, nếu không thì thuật toán dừng. Nếu có thì điều chỉnh luồng như trên. Quá trình tiếp tục sau một số hữu hạn bước ta sẽ thu được luồng lớn nhất.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

b. Lược đồ thuật toán:

Bước 0: Xuất phát từ luồng 0 (chưa vận chuyển), ta lần lượt gán cho các đỉnh của đồ thị một cặp số, gọi là nhãn, như sau: gán cho đỉnh nguồn (đỉnh x_1) nhãn $(\infty, 0)$.

Bước 1: Gọi N_1 là tập các đỉnh i $(i \neq 1)$ của mạng nối trực tiếp với đỉnh nguồn với một cung mà lượng hàng vận chuyển từ đỉnh nguồn trên đó chưa vượt quá khả năng thông qua. tiếp sau đó ta gán cho đỉnh i thuộc N_1 một cặp số (e_i, p_i) gọi là nhãn, như sau:

$e_i = u_{1i} - x_{1i}$ = khả năng thông qua còn lại trên cung (1,i)

$p_i = 1$ = Số hiệu của đỉnh nguồn đến đỉnh i.

Nếu N_1 chứa điểm hút n thì chuyển sang thực hiện bước 5 để tăng giá trị của luồng. Trái lại chuyển sang bước 2.

Bước 2: Ký hiệu N_2 là tập hợp tất cả các đỉnh j chưa được gán nhãn của đồ thị sao cho đỉnh này được nối với một đỉnh đã được gán nhãn thuộc tập N_1, chẳng hạn đỉnh i, bởi cung (i,j) với $x_{ij} < u_{ij}$ hoặc $x_{ji} > 0$. tiếp theo, ta gán cho mỗi đỉnh j một cặp số (e_j, p_j) gọi là nhãn, theo công thức sau:

$$e_j = \begin{cases} \min(e_i;\ u_{ij} - x_{ij}) & \text{nếu } x_{ij} < u_{ij} \\ \min(e_i,\ x_{ji}) & \text{nếu } x_{ji} > 0 \end{cases}$$

$p_j = i$. Chuyển sang bước 3

Bước 3: Lặp lại bước 2 với N_i thay cho N_{i-1}. Sau một số hữu hạn bước ta gặp một trong hai tình huống sau:

3a. Đỉnh hút chưa được gán nhãn, nhưng không thể gán nhãn tiếp cho bất kỳ một đỉnh nào khác nữa. Thuật toán dừng. Luồng hiện có là lớn nhất.

3b. Đỉnh hút đã được gán nhãn. Chuyển sang bước 4.

Bước 4: Tăng luồng hiện có như sau: Giả sử điểm hút đã được gán nhãn (e_n, p_n), số thứ nhất e_n chỉ rõ lượng hàng sẽ vận chuyển thêm từ nguồn đến điểm hút. số thứ hai p_n cho biết đỉnh đã được dùng để gán nhãn cho điểm hút.

Dựa vào số thứ hai trong nhãn của điểm hút (p_n) ta tìm được đỉnh trước đó ... cứ thế ta lần ngược lại đỉnh nguồn. Kết quả là xác định được đường đi từ đỉnh nguồn tới điểm hút làm tăng giá trị của luồng.

Cách điều chỉnh luồng hàng như sau:

Đặt $x'_{st} = x_{st} + e_n$ nếu trên cạnh (s,t) chưa vận chuyển hàng hoặc có vận chuyển hàng theo chiều thuận.

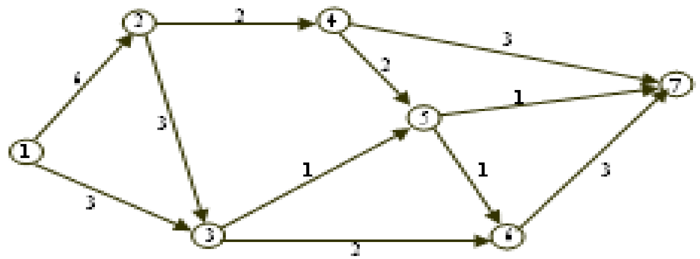
Đặt $x'_{st} = x_{st} - u_{st}$ nếu trên cung (s,t) có vận chuyển hàng theo chiều ngược.

Chuyển sang bước 5.

Bước 5: Xoá nhãn của mọi đỉnh, trừ đỉnh nguồn rồi quay lại bước 1. Thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước, nghĩa là sau một số hữu hạn lần áp dụng các bước từ 1 đến 5 ta sẽ gặp trường hợp 3a.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Thí dụ :



Hình 4.8

Giải: Xuất phát từ luồng 0. Đỉnh nguồn được gán nhãn (∞, 0). Ở bước lặp đầu tiên ta gán cho đỉnh 2 nhãn: $e_2 = u_{12} = 6$; $p_2 = 1$. Gán cho đỉnh 3 nhãn: $e_3 = u_{13} = 3$; $p_3 = 1$

Tiếp đó dựa vào các đỉnh đã được gán nhãn 1 và 3, ta gán cho đỉnh 4 nhãn: $e_4 = \min(e_2, u_{24}) = \min(6, 2) = 2$; $p_4 = 2$. Gán cho đỉnh 5 nhãn: $e_5 = \min(e_3, u_{35}) = \min(3, 1) = 1$; $p_5 = 3$. Gán cho đỉnh 6 nhãn: $e_6 = \min(e_3, u_{36}) = \min(3, 2) = 2$; $p_6 = 3$. Gán cho đỉnh 7 nhãn: $e_7 = \min(e_4, u_{47}) = \min(2, 3) = 2$; $p_7 = 4$. Đỉnh 7 là điểm hút được gán nhãn. Ta vận chuyển $e_7 = 2$ đơn vị hàng theo đường 1-2-4-7 ($x_{12} = x_{24} = x_{47} = 2$, các đỉnh khác $x_{ij} = 0$), giá trị luồng tương ứng là 2.

Ở vòng lặp tiếp theo, ta gán cho đỉnh 2 nhãn: $e_2 = u_{12} - x_{12} = 6 - 2 = 4$, $p_2 = 1$. Gán cho đỉnh 3 nhãn $e_3 = u_{13} = 3$, $p_3 = 1$. Tiếp đó gán cho đỉnh 5 nhãn: $e_5 = \min(e_3, u_{35}) = \min(3, 1) = 1$, $p_5 = 3$. Gán cho đỉnh 6 nhãn $e_6 = \min(e_3, u_{36}) = \min(3, 2) = 2$, $p_6 = 3$ > Lúc này đỉnh 4 không được gán nhãn vì cung (2,4) đã vận chuyển hết khả năng thông qua. Cuối cùng dựa vào các đỉnh đã được gán nhãn 5 và 6 ta gán cho đỉnh 7 nhãn $e_7 = \min(e_5, u_{57}) = \min(1,1) = 1$, $p_7 = 5$.

Đỉnh 7 là đỉnh hút đã được gán nhãn. Ta vận chuyển $e_7 = 1$ đơn vị hàng theo đường 1-3-5-7 ($x_{13} = x_{35} = x_{57} = 1$, các x_{ij} khác không đổi). Giá trị luồng bây giờ là 2 + 1 = 3.

Ở vòng lặp thứ ba, ta gán cho đỉnh 2 nhãn: $e_2 = u_{12} - x_{12} = 6 - 2 = 4$, $p_2 = 1$. Gán cho đỉnh 3 nhãn: $e_3 = u_{13} - x_{13} = 3 - 1 = 2$, $p_3 = 1$. Tiếp theo gán cho đỉnh 6 nhãn: $e_6 = \min(e_3, u_{36}) = \min(2,2) = 2$, $p_6 = 3$. Lúc này đỉnh 4, 5 không được gán nhãn. từ đỉnh 6 ta gán cho đỉnh 7 nhãn: $e_7 = \min(e_6, u_{67}) = \min(2, 3) = 2$, $p_7 = 6$.

Kết quả ta vận chuyển thêm được $e_7 = 2$ đơn vị hàng theo đường 1-3-6-7($x_{13} = x_{36} = x_{67} = 2$, các x_{ij} khác không đổi). Giá trị của luồng bây giờ là 3 + 2 = 5.

Để kiểm tra luồng hiện có đã lớn nhất hay chưa, ta tiếp tục quá trình gán nhãn: ta gán cho đỉnh 2 nhãn: $e_2 = u_{12} - x_{12} = 4$, $p_2 = 1$. Gán cho đỉnh 3 nhãn: $e_3 = \min(e_2, u_{23}) = \min(4, 3) = 3$, $p_3 = 2$.

Đến đây đỉnh 7 chưa được gán nhãn nhưng ta không thể gán nhãn cho đỉnh nào nữa (tình huống 3a). Vậy luồng hiện có là lớn nhất. Đó là:

$x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{24} = 2\ x_{35} = 1; x_{36} = 2, x_{47} = 2, x_{57} = 1\ x_{67} = 2.$

Lượng hàng vận chuyển lớn nhất từ điểm nguồn đến điểm hút là 5 đơn vị. Các lát cắt C(S) là (2,4), (3,5) và (3,6). tổng cộng khả năng thông qua trên các cung này đúng bằng 5 đơn vị.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Bài toán luồng nhỏ nhất

Bài toán:

Cho một đồ thị đối xứng có n đỉnh, mỗi cạnh có khả năng thông qua nhất định và có một cước phí vận chuyển xác định (như nhau theo cả hai chiều). Cho trước một lượng bưu kiện S cần phải vận chuyển từ đỉnh nguồn (đỉnh số 1) tới điểm hút (số n). Hãy tìm một phương án vận chuyển sao cho phù hợp với khả năng thông qua của mạng và vận chuyển được lượng hàng S từ nguồn đến điểm hút với tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Đây là bài toán vận tải hạn chế khả năng thông qua. Tuy bài toán có một đỉnh nguồn và một điểm hút, nhưng bất kỳ bài toán vận tải trên mạng có nhiều nguồn và nhiều điểm hút có thể quy về bài toán dạng trên bằng cách thêm vào các đỉnh giả và cung giả thích hợp như đã trình bày trong bài toán luồng lớn nhất.

Về mặt toán học, bài toán luồng chi phí nhỏ nhất có thể phát biểu như sau:

Cực tiểu hàm chi phí $\sum_{i,j \in A} c_{ij} x_{ij}$ với các điều kiện của bài toán:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} S, & \text{nếu } i = 1 \\ 0, & \text{nếu } i \neq 1, i \neq n \\ -S, & \text{nếu } i = n \end{cases}$$

Ở đây đỉnh nguồn được đánh số 1, điểm hút đánh số n, c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng trên cạnh (i, j), u_{ij} là khả năng thông qua của cạnh (i, j), x_{ij} là khối lượng hàng vận chuyển trên cạnh (i, j) và là biến cần xác định.

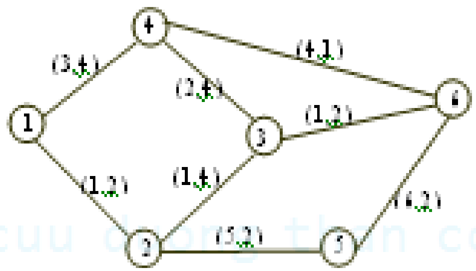
Phương pháp giải:

Luồng chi phí nhỏ nhất có thể giải bằng thuật toán đơn giản như sau: Xuất phát từ phương án vận chuyển không ($x_{ij} = 0$ trên mọi cạnh của đồ thị). Ở mỗi bước lặp, ta tìm đường đi có chi phí nhỏ nhất từ nguồn đến điểm hút. Đường đi này bao gồm một dãy các cạnh kề tiếp nhau sao cho trên các cạnh có vận chuyển hàng theo chiều thuận thì lượng hàng vận chuyển chưa vượt quá khả năng thông qua của cạnh đó. Trên đường đi này, cạnh chưa vận chuyển hàng hoặc có vận chuyển hàng theo chiều thuận thì chi phí vận chuyển là số dương, còn trên cạnh vận chuyển hàng theo chiều ngược thì chi phí vận chuyển là âm. Tiếp đó, ta xác định khả năng thông qua của đường đi vừa tìm được, đó là số nhỏ nhất trong số các khả năng thông qua còn lại trên các cạnh có chi phí vận chuyển âm. Thêm khả năng thông qua này vào các cạnh chưa vận chuyển hàng hoặc vận chuyển hàng theo chiều thuận và bớt đi ở các cạnh vận chuyển hàng theo chiều ngược của đường đi này, rồi chuyển sang bước lặp sau. Quá trình tiếp tục cho đến khi vận chuyển hết lượng hàng S từ nguồn đến điểm hút hoặc phát hiện mạng không đủ khả năng vận chuyển hết lượng hàng S từ nguồn đến điểm hút.

Chú ý: Ở mỗi bước lặp ta phải giải một bài toán phụ: tìm đường đi ngắn nhất từ nguồn đến điểm hút trên mạng với cước phí có thể là số âm.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Thí dụ: Cho đồ thị vô hướng như hình 4.9. Mỗi cạnh tương ứng với một cặp số thứ tự mà số thứ nhất là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng trên cạnh, số thứ hai là khả năng thông qua của cạnh này. Đỉnh nguồn là đỉnh 1, điểm hút là 6. Tổng khối lượng hàng cần vận chuyển từ đỉnh nguồn đến điểm hút là 5 đơn vị.



Hình 4.9

Giải: Ở bước lặp đầu tiên, phương án vận chuyển bằng 0 trên tất cả các cạnh. Tiếp đó, tìm đường đi có chi phí nhỏ nhất từ đỉnh nguồn đến điểm hút, đó là 1-2-3-6 với tổng chi phí vận chuyển bằng 3, khả năng thông qua của đường đi này bằng 2 bằng khả năng thông qua của cạnh (1,2) hoặc (3,6). Ta vận chuyển thêm hai đơn vị hàng từ đỉnh nguồn đến điểm hút theo đường đi vừa tìm được.

Ở bước lặp tiếp theo, đường đi có chi phí nhỏ nhất từ đỉnh nguồn đến điểm hút là 1 - 4 - 6, với chi phí vận chuyển bằng 7 và khả năng thông qua bằng 1 bằng khả năng của cạnh (4,6). Ta vận chuyển thêm được 1 đơn vị hàng từ đỉnh nguồn tới điểm hút.

Ở bước lặp thứ 3, đường đi có chi phí nhỏ nhất từ đỉnh nguồn tới điểm hút là 1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 6. Trên đường đi này có 3 cạnh chưa vận chuyển, đó là (3,4), (2,5), (5,6); cạnh có vận chuyển hàng theo chiều thuận là (1,4) và cạnh vận chuyển hàng theo chiều ngược là (2,3). Vì thế, chi phí vận chuyển trên đường đi này bằng: 3 + 2 - 1 + 5 + 6 = 15. Khả năng thông qua của đường đi này bằng:

$$\text{Min}(4-1, 4-0, 2, 2-0) = 2$$

Ta vận chuyển thêm 2 đơn vị hàng trên các cạnh (1,4), (4,3), (2,5), (5,6) và bớt 2 đơn vị hàng trên cạnh (2,3). Kết quả ta vận chuyển được 5 đơn vị hàng từ đỉnh nguồn tới điểm hút, với tổng chi phí bằng:

$$3.2 + 7.1 + 15.2 = 43$$

Luồng chi phí nhỏ nhất là:

$$x_{12} = 2, x_{14} = 3, x_{23} = 0, x_{25} = 2, x_{36} = 2, x_{43} = 2, x_{46} = 1, x_{56} = 2$$

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Phương pháp sơ đồ mạng lưới (Pert)

Một số khái niệm và quy tắc lập sơ đồ mạng lưới

a. Định nghĩa:

<u>Định nghĩa 1</u>: Một tập hợp các điểm (ta gọi là các đỉnh, ký hiệu là X) và tập hợp các cung (ký hiệu là A) được gọi là sơ đồ mạng lưới nếu đúng thỏa mãn các điều kiện sau:

- Giữa 2 đỉnh có không quá một cung nối liền và ngược lại mỗi cung phải liên kết 2 đỉnh nào đó với nhau.

Cung nối từ đỉnh i đến đỉnh j được ký hiệu là (i, j), trong đó i là điểm gốc của cung và j là điểm ngọn của cung.

- Điểm gốc và điểm ngọn của mỗi cung không trùng nhau.
- Trong một dãy các cung nối tiếp nhau (tức là điểm ngọn của mỗi cung là điểm gốc của cung tiếp theo) thì không bao giờ điểm ngọn của cung cuối cùng trùng với điểm gốc của cung đầu tiên. Một dãy như vậy được gọi là một đường đi trong sơ đồ mạng lưới.
- Giữa 2 đỉnh tùy ý bao giờ cũng có một dãy các cung nối liền.
- Có một đỉnh chỉ toàn cung đi ra gọi là đỉnh khởi công toàn bộ và có một đỉnh chỉ toàn cung đi tới gọi là đỉnh kết thúc toàn bộ. Các đỉnh còn lại có cả cung đi ra lẫn cung đi tới gọi là đỉnh trung gian.

<u>Định nghĩa 2</u>: Ứng với mỗi cung (i, j) có một số t_{ij} đặc trưng cho cung đó về mặt lượng được gọi là độ dài hay thời hạn của cung đó.

<u>Định nghĩa 3</u>: Độ dài đường đi μ trong sơ đồ mạng lưới là tổng độ dài của tất cả các cung thuộc đường đi đó, ký hiệu là l(μ). Theo định nghĩa thì:

$$l(\mu) = \sum_{\forall (i,j) \in \mu} t_{ij}$$

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

b. Công dụng của sơ đồ mạng lưới:

Nó được dùng để mô tả quá trình thi công một công trình nào đó hoặc bất cứ một quy trình nào đó mà trong đó bao gồm nhiều công việc thành phần với những trình tự tiến hành khác nhau. Hai yếu tố chính trong quá trình thi công là công việc và sự kiện. Các công việc được mô tả bởi các cung, các sự kiện được biểu thị bằng các đỉnh. Thời điểm khởi công toàn bộ công trình (sự kiện đầu tiên khởi công toàn bộ công trình) được biểu thị bằng đỉnh khởi công toàn bộ (thường ký hiệu là đỉnh 1). Thời điểm kết thúc toàn bộ công trình (sự kiện cuối cùng hoàn thành toàn bộ công trình) được biểu thị bởi đỉnh kết thúc toàn bộ (thường ký hiệu là đỉnh n). Các đỉnh còn lại biểu thị các sự kiện trung gian, đó là những mốc thời gian trong quy trình thi công, nó đánh dấu sự hoàn thành của một số công việc nào đó của công trình và sự bắt đầu của một số công việc tiếp theo.

Một cách chính xác, ta định nghĩa:

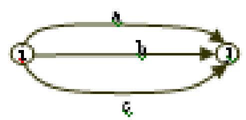
<u>Định nghĩa 4:</u> Một sự kiện được gọi là hoàn thành nếu mọi việc ứng với các cung đi đến nó đều đã hoàn thành.

Một sự kiện có hoàn thành thì các công việc ứng với các cung đi khỏi nó mới có thể bắt đầu.

c. Các quy tắc thiết lập sơ đồ mạng lưới.

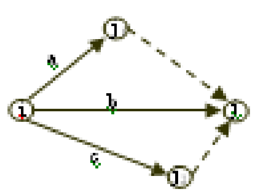
<u>Quy tắc 1</u>: Nếu một nhóm 2 hay nhiều công việc cùng chung sự kiện khởi công và cùng chung sự kiện kết thúc thì không được biểu diễn như hình 4.10a, tùy thuộc vào tính chất của các công việc mà ta có thể xử lý như sau:

- Nếu tính chất của các công việc như nhau hoặc trong thực tế không thể làm tách rời nhau được thì gộp chúng lại thành một cung duy nhất (hình 4.10b).
- Nếu tính chất các công việc khác nhau mà không thể gộp chúng lại được thì phải thêm đỉnh mới và cung giả (hình 4.10c). Các đỉnh mới là j_1 và j_2; các cung (j_1, j) và (j_2, j) gọi là các cung giả (biểu thị bằng nét đứt).



Hình 4.10a

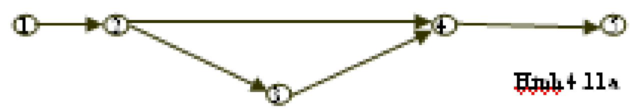
Hình 4.10b



Hình 4.10c

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

Quy tắc 2: Nếu một nhóm công việc lập thành một mạng con trong sơ đồ mạng lưới (các công việc và sự kiện của nhóm này không phụ thuộc gì vào và không ảnh hưởng đến các công việc khác của sơ đồ mạng lưới, trừ sự kiện đầu tiên và sự kiện cuối cùng của nhóm này) thì ta có thể gộp mạng con đó thành một cung duy nhất, nếu sự gộp đó không làm cho sơ đồ mạng lưới trở nên quá thô (hình 4.11a chuyển sang hình 4.11b), cung (2,4) trong hình 4.11b mô tả cả 3 công việc a, b, c trong sơ đồ mạng lưới hình 4.11a.



Hình 4.11a

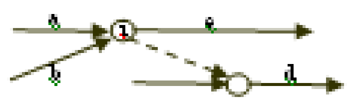
Hình 4.11b

Quy tắc 3: Nếu một nhóm các công việc liên hệ với nhau theo trật tự

Việc d sau việc a, b, c

Việc e sau việc a, b

thì ta phải biểu diễn như hình 4.12

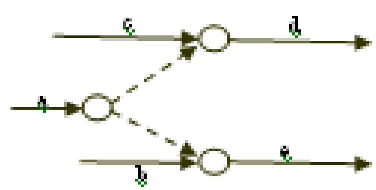


Hình 4.12

Việc d sau việc a, c

Việc e sau việc a, b

thì ta phải biểu diễn như hình 4.13.



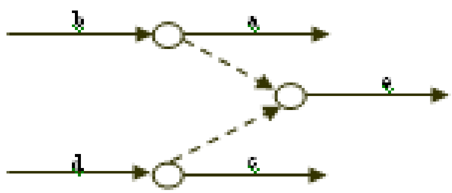
Hình 4.13

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

Quy tắc 4: Nếu một nhóm các công việc liên hệ với nhau theo trật tự:

Việc a sau việc b
Việc c sau việc d
Việc e sau việc b,d

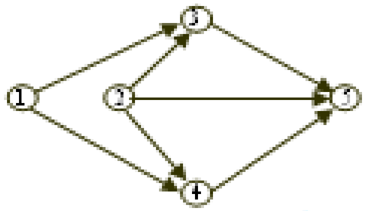
thì ta phải biểu diễn như hình 4.14:



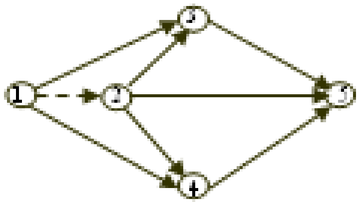
Hình 4.14

Quy tắc 5:

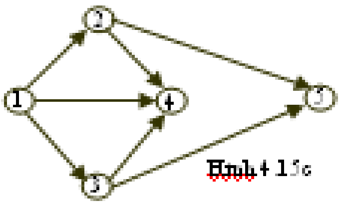
- Nếu một đỉnh không phải đỉnh khởi công toàn bộ mà chỉ toàn những cung đi ra thì ta phải thêm một cung giả nối từ đỉnh khởi công toàn bộ với đỉnh đó: Hình 4.14a chuyển sang hình 4.15b.
- Nếu một đỉnh không phải đỉnh kết thúc toàn bộ mà chỉ toàn những cung đi tới thì ta phải thêm một cung giả nối từ đỉnh đó đến đỉnh kết thúc toàn bộ: Hình 4.14c chuyển sang hình 4.15d



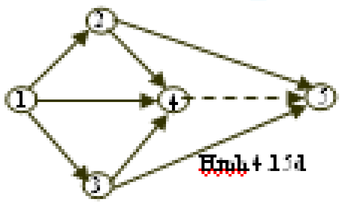
Hình 4.15a



Hình 4.15b



Hình 4.15c



Hình 4.15d

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

Các chỉ tiêu thời gian của sơ đồ mạng lưới

Cho sơ đồ mạng lưới G = {X,A} trong đó X là tập các sự kiện thể hiện bởi các đỉnh và A là tập các công việc thể hiện bởi các cung.

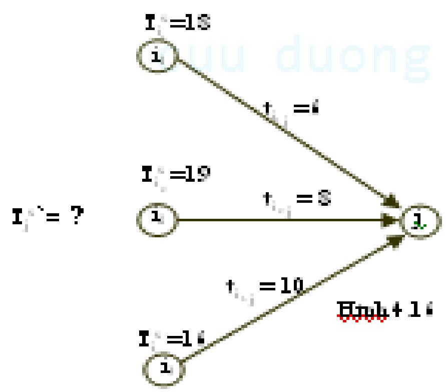
a. Thời điểm sớm nhất hoàn thành sự kiện:

Ký hiệu thời điểm sớm nhất hoàn thành sự kiện j là $I_j^s \ \forall j \in X$

Ta biết rằng sự kiện j là hoàn thành nếu mọi công việc ứng với các cung đi tới sự kiện j đều đã hoàn thành. Vì vậy đối với sự kiện 1 là sự kiện khởi công toàn bộ, trước đó chưa có công việc nào nên $I_1^s = 0$.

Đối với sự kiện j tùy ý, như trên hình 4.16 thì đến thời điểm 24 mới có việc (i_1, j) hoàn thành, nếu việc này thi công sớm nhất vào thời điểm 18, việc (i_2, j) và (i_3, j) chưa hoàn thành, dù cho 2 việc này thi công sớm nhất có thể được thứ tự là 19 và 16, cũng xét như vậy ta được:

$$I_j^s = 27 = \max\{I_i^s + t_{ij}; \forall (i,j) \in A_j\}$$



Hình 4.16

trong đó $A_j = \{(i_1 j), (i_2 j), (i_3 j)\}$ - tập hợp các công việc ứng với các cung đi tới sự kiện j.

Một cách tổng quát: $I_j^s = \max\{I_i^s + t_{ij} \ \forall (i,j) \in A_j\}$ (1), trong đó A_j là tập hợp các công việc ứng với các cung đi tới sự kiện j.

Từ định nghĩa về sự hoàn thành một sự kiện ta suy ra I_j^s là độ dài đường đi dài nhất từ sự kiện 1 đến sự kiện j.

$$I_j^s = l(\Delta_j) \ \forall j \in X \qquad (1')$$

Trong đó Δ_j là đường đi dài nhất từ sự kiện 1 đến sự kiện j.

Gọi n là sự kiện hoàn thành toàn bộ công trình thì $I_n^s = l(\Delta_n)$ - thời hạn hoàn thành toàn bộ công trình.

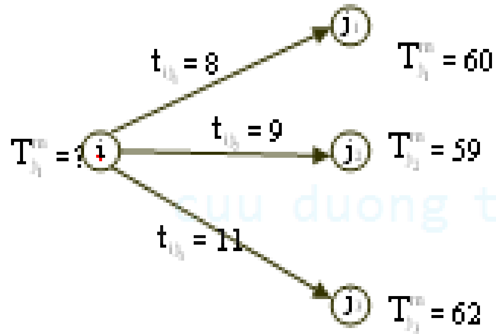
CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

b. Thời điểm muộn nhất hoàn thành sự kiện.

Ký hiệu T_i^m $\forall i \in X$. Nếu sự kiện i hoàn thành muộn hơn thời điểm T_i^m thì thời gian hoàn thành toàn bộ công trình bị kéo dài. Đối với sự kiện n thì:

$$T_n^m = T_n^s$$

Giả sử biết thời điểm muộn nhất hoàn thành các sự kiện kề sau sự kiện i. Ta biết rằng sự kiện i có hoàn thành thì các công việc ứng với các cung ra khỏi i mới bắt đầu được.



Hình 4.17

Trên hình 4.17, nếu sự kiện i hoàn thành vào thời điểm 51 và cả 3 việc đều thi công ngay khi sự kiện i hoàn thành thì đến thời điểm 62, việc (i, j_3) đã hoàn thành, việc (i, j_1) cũng đã hoàn thành trước thời điểm 60, chúng đều không làm ảnh hưởng đến $T_{j_1}^m$ và $T_{j_3}^m$, nhưng việc (i, j_2) đươn hoàn thành được ở thời điểm $T_{j_2}^m$ do đó làm ảnh hưởng đến thời gian hoàn thành toàn bộ công trình. Cũng xét như vậy, ta được ở thời điểm 50 sự kiện i phải hoàn thành thì mới không làm ảnh hưởng đến $T_{j_1}^m$, $T_{j_2}^m$, $T_{j_3}^m$ và do đó sẽ không làm ảnh hưởng đến thời gian hoàn thành toàn bộ công trình.

Một cách tổng quát: $T_i^m = \min\{ T_j^m - t_{ij} \, \forall (i,j) \in A_i^+ \}$ (2)

trong đó A_i^+ - tập hợp các công việc ứng với các cung ra khỏi sự kiện i.

Từ bản chất của thuật ngữ "muộn nhất hoàn thành" suy ra độ dài đường đi dài nhất từ sự kiện i đến sự kiện n là $T_n^m - T_i^m$. Nếu ký hiệu γ_i - đường đi dài nhất từ sự kiện i đến sự kiện n thì

$$l(\gamma_i) = T_n^m - T_i^m \text{ hoặc } T_i^m = T_n^m - l(\gamma_i) \, \forall i < n \quad (2')$$

với i = 1 thì $T_1^m = T_n^m - l(\gamma_1) = T_n^m - l(\Delta_n) = 0$.

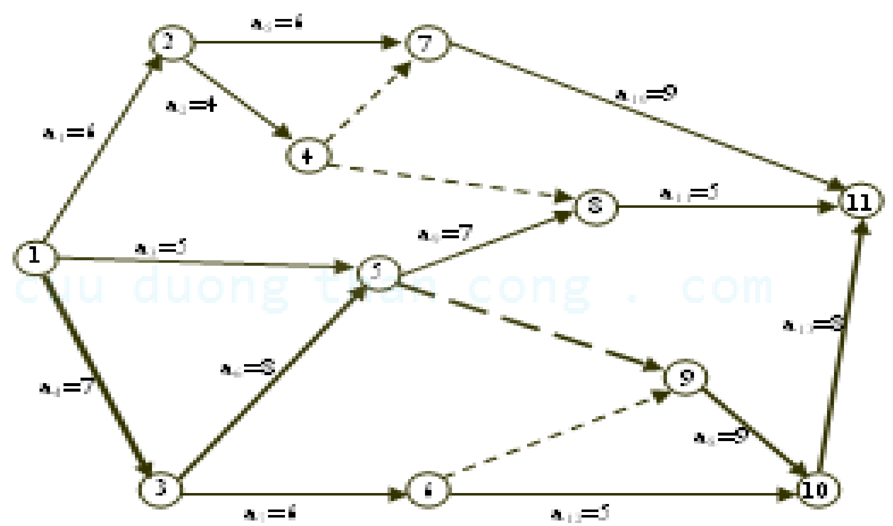
CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

Thí dụ 4.1: Một quy trình công nghệ gồm một số các công việc chính sau đây:

Công việc a_1 làm trong 6^h bắt đầu ngay.
Công việc a_2 làm trong 4^h sau a_1 hoàn thành.
Công việc a_3 làm trong 5^h bắt đầu ngay.
Công việc a_4 làm trong 7^h bắt đầu ngay.
Công việc a_5 làm trong 6^h sau a_1 hoàn thành.
Công việc a_6 làm trong 8^h sau a_4 hoàn thành.
Công việc a_7 làm trong 6^h sau a_4 hoàn thành.
Công việc a_8 làm trong 9^h sau a_3, a_6, a_7 hoàn thành.
Công việc a_9 làm trong 7^h sau a_3, a_6 hoàn thành.
Công việc a_{10} làm trong 9^h sau a_2, a_5 hoàn thành.
Công việc a_{11} làm trong 5^h sau a_2, a_9 hoàn thành.
Công việc a_{12} làm trong 5^h sau a_7 hoàn thành.
Công việc a_{13} làm trong 8^h sau a_8, a_{12} hoàn thành.

a) Lập sơ đồ mạng lưới mô tả quá trình thi công các công việc trên?
b) Tính thời điểm sớm nhất và muộn nhất hoàn thành các sự kiện?

Giải: - Vẽ sơ đồ mạng lưới



CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

- Tính thời điểm sớm nhất hoàn thành các sự kiện:

$T_1^s = 0$

$T_2^s = \max\{T_1^s + t_{1,2}\} = 0 + 6 = 6^h$

$T_3^s = \max\{T_1^s + t_{1,3}\} = 0 + 7 = 7^h$

$T_4^s = \max\{T_2^s + t_{2,4}\} = 6 + 4 = 10^h$

$T_5^s = \max\{T_1^s + t_{1,5}; T_3^s + t_{3,5}\} = \max\{0 + 5; 7 + 8\} = 15^h$

$T_6^s = \max\{T_3^s + t_{3,6}\} = 7 + 6 = 13^h$

$T_7^s = \max\{T_2^s + t_{2,7}; T_4^s + t_{4,7}\} = \max\{6 + 6; 10 + 0\} = 12^h$

$T_8^s = \max\{T_4^s + t_{4,8}, T_5^s + t_{5,8}\} = \max\{10 + 5; 15 + 7\} = 22^h$

$T_9^s = \max\{T_5^s + t_{5,9}; T_6^s + t_{6,9}\} = \max\{15 + 0; 13 + 0\} = 15^h$

$T_{10}^s = \max\{T_6^s + t_{6,10}; T_9^s + t_{9,10}\} = \max\{13 + 5; 15 + 9\} = 24^h$

$T_{11}^s = \max\{T_7^s + t_{7,11}; T_8^s + t_{8,11}; T_{10}^s + t_{10,11}\} = \max\{12 + 9; 22 + 5; 24 + 8\} = 32$

- Tính thời điểm muộn nhất hoàn thành các sự kiện:

$T_{11}^m = T_{11}^s = 32$

$T_{10}^m = \min\{T_{11}^m - t_{10,11}\} = 32 - 8 = 24^h$

$T_9^m = \min\{T_{10}^m - t_{9,10}\} = 24 - 9 = 15^h$

$T_8^m = \min\{T_{11}^m - t_{8,11}\} = 32 - 5 = 27^h$

$T_7^m = \min\{T_{11}^m - t_{7,11}\} = 32 - 9 = 23^h$

$T_6^m = \min\{T_{10}^m - t_{6,10}; T_9^m - t_{6,9}\} = \min\{24 - 5; 15 - 0\} = 15^h$

$T_5^m = \min\{T_9^m - t_{5,9}; T_8^m - t_{5,8}\} = \min\{15 - 0; 27 - 7\} = 15^h$

$T_4^m = \min\{T_8^m - t_{4,8}; T_7^m \_ t_{4,7}\} = \min\{27 - 5; 23 - 0\} = 22^h$

$T_3^m = \min\{T_6^m - t_{3,6}; T_5^m - t_{3,5}\} = \min\{15 - 6; 15 - 8\} = 7^h$

$T_2^m = \min\{T_7^m - t_{2,7}; T_4^m - t_{2,4}\} = \min\{23 - 6; 22 - 4\} = 17^h$

$T_1^m = \min\{T_3^m - t_{1,3}; T_2^m - t_{1,2}; T_5^m - t_{1,5}\} = \min\{7 - 7; 17 - 6; 15 - 5\} = 0$

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

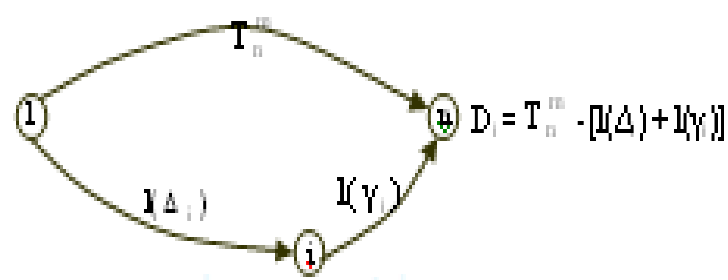
c. Thời gian dự trữ của sự kiện.

- **Định nghĩa 1**: Chênh lệch giữa thời điểm muộn nhất và thời điểm sớm nhất hoàn thành một sự kiện được gọi là thời gian dự trữ của sự kiện đó, ký hiệu thời gian dự trữ của sự kiện i là D_i:

$$D_i = T_i^m - T_i^s \; \forall i \in X \qquad (3)$$

Theo (1') và (2') ta có: $D_i = T_n^m - [l(\Delta_i) + l(\gamma_i)] \; \forall i \in X$ (3')

Nhận xét: Tổng $l(\Delta_i) + l(\gamma_i)$ là tổng độ dài đường đi dài nhất từ sự kiện 1 đến sự kiện i và từ sự kiện i đến sự kiện n nên tổng ấy chính là độ dài đường đi dài nhất từ sự kiện 1 qua sự kiện đến sự kiện n và gọi là đường đi dài có điều kiện i. T_n^m là độ dài của đường đi dài nhất từ sự kiện 1 đến sự kiện n, đó là đường đi dài nhất không điều kiện. Như vậy D_i là chênh lệch giữa 2 đường đi dài nhất: dài nhất không điều kiện và dài nhất có điều kiện.



- **Định nghĩa 2**: Sự kiện i được gọi là sự kiện găng nếu nó không có thời gian dự trữ, tức là $D_i = 0$ hay $T_i^m = T_i^s$.

Trong thí dụ 4.1 các sự kiện 1, 3, 5, 9, 10, 11 là các sự kiện găng. Đường đi qua các sự kiện đó gọi là đường găng.

Lưu ý. Trong một sơ đồ mạng lưới có thể có nhiều hơn một đường găng. Trong thí dụ 4.1 ngoài đường găng trên còn có đường găng thứ hai đi qua các sự kiện 1, 3, 6, 9, 10, 11.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

d. Thời điểm sớm nhất khởi công và hoàn thành công việc

- Thời điểm sớm nhất khởi công công việc.

Ký hiệu T_{ij}^{ks} là thời điểm sớm nhất hoàn thành công việc (i, j) $\forall (i, j) \in A$

Ta biết rằng, sự kiện i có hoàn thành thì công việc (i, j) mới bắt đầu được (i < n) nên:

$$T_{ij}^{ks} = T_i^s. \qquad (4)$$

- Thời điểm sớm nhất hoàn thành công việc.

Ký hiệu thời điểm sớm nhất hoàn thành công việc (i, j) là T_{ij}^{hs} $\forall (i, j) \in A$

Ta biết rằng, giữa thời điểm hoàn thành (sớm nhất) và thời điểm khởi công (sớm nhất) công việc (i, j) chênh nhau bởi thời gian thi công t_{ij} nên:

$$T_{ij}^{hs} = T_{ij}^{ks} + t_{ij} \ \forall (i, j) \in A \qquad (5)$$

từ (4) và (5) ta suy ra:

$$T_{ij}^{hs} = T_i^s + t_{ij} \ \forall (i, j) \in A \qquad (5')$$

e. Thời điểm muộn nhất hoàn thành và khởi công công việc.

- Thời điểm muộn nhất hoàn thành công việc:

Ký hiệu thời điểm muộn nhất hoàn thành công việc (i, j) là T_{ij}^{hm} $\forall (i, j) \in A$

Ta biết rằng sự kiện j được coi là hoàn thành nếu $\forall (i, j) \in A_j$ đều đã hoàn thành, như vậy công việc (i, j) không được phép hoàn thành muộn hơn T_j^m. Do đó:

$$T_{ij}^{hm} = T_j^m \text{ với } \forall (i, j) \in A \qquad (6)$$

- Thời điểm muộn nhất hoàn thành công việc:

Ký hiệu thời điểm muộn nhất khởi công công việc (i, j) là T_{ij}^{km} $\forall (i, j) \in A$. Cũng lập luận như công thức (5), ta được:

$$T_{ij}^{km} = T_{ij}^{hm} - t_{ij} \ \forall (i, j) \in A \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra: $T_{ij}^{km} = T_j^m - t_{ij} \ \forall (i, j) \in A$

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

f. Thời gian dự trữ chung của công việc.

- Định nghĩa 3: Thời gian dự trữ chung của công việc (i, j) được ký hiệu và xác định như sau:

$$r_{ij} = T_{ij}^{km} - T_{ij}^{ks} \quad \forall (i, j) \in A \qquad (8)$$

từ (4) và (7) ta có:

$$r_{ij} = T_j^{m} - t_{ij} - T_i^{s} \quad \forall (i, j) \in A \qquad (9)$$

theo (5) và (6) ta được:

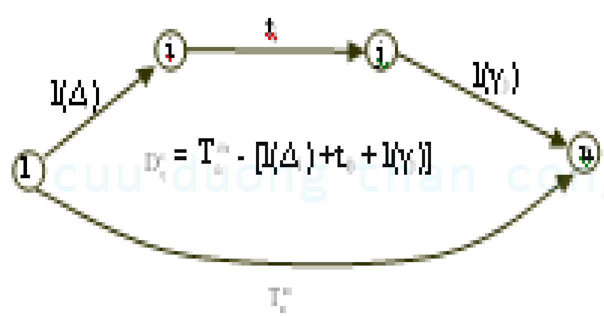
$$r_{ij} = T_{ij}^{hm} - T_{ij}^{hs} \quad \forall (i, j) \in A \qquad (10)$$

công thức (10) cũng được lấy làm định nghĩa cho r_{ij}.

Thay (1) và (2) vào (9) ta được:

$$r_{ij} = T_n^{m} - [l(\Delta) + t_{ij} + l(\gamma)] \quad \forall (i, j) \in A \qquad (11)$$

Nhận xét: Tổng $l(\Delta) + t_{ij} + l(\gamma)$ là độ dài đường đi dài nhất từ sự kiện 1 qua công việc (i, j) đến sự kiện n. Như vậy: r_{ij} là chênh lệch giữa 2 đường đi dài nhất: đường đi dài nhất không điều kiện và đường đi dài nhất có điều kiện (qua công việc (i, j)).



Hình 4.19

Định nghĩa 4: Công việc (i, j) được gọi là công việc găng nếu nó không có thời gian dự trữ chung, thức là $r_{ij} = 0$.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

g. Đường găng.

+ Định nghĩa: Đường đi có độ dài lớn nhất từ sự kiện 1 đến sự kiện n trong sơ đồ mạng lưới được gọi là đường găng.

Ký hiệu đường găng là g thì hiển nhiên l(g) = $T_n^m = T_n^s$

+ Tính chất: (*Định lý về điều kiện cần và đủ để một sự kiện, công việc là găng*)

- Sự kiện i là sự kiện găng khi và chỉ khi i nằm trên đường găng.
- Công việc (i, j) là công việc găng khi và chỉ khi (i, j) nằm trên đường găng.

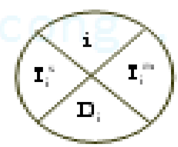
+ Cách xác định đường găng

Từ định lý trên, ta suy ra cách xác định đường găng như sau:

- Tính thời gian dự trữ chung cho tất cả các công việc.
- Tách ra các công việc không có thời gian dự trữ chung (những việc găng).
- Lập những dãy các việc găng nối tiếp nhau từ sự kiện 1 đến sự kiện n. Một dãy như vậy chính là một đường găng.

Chú ý: Để thuận tiện cho việc khảo sát sơ đồ mạng lưới ta biểu thị mỗi sự kiện bởi một vòng tròn, chia làm 4 phần (hình 4.20):

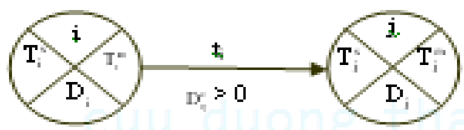
Phần phía trên ghi số thứ tự của sự kiện.
Phần bên trái ghi thời điểm sớm nhất hoàn thành sự kiện
Phần bên phải ghi thời điểm muộn nhất hoàn thành sự kiện
Phần phía dưới ghi thời gian dự trữ của sự kiện.
Để dễ dàng nhận ra đường găng, ta ký hiệu mỗi việc găng bởi một mũi tên đậm (hoặc mũi tên kép).



Hình 4.20

Để khảo sát sơ đồ mạng lưới được sâu hơn ta phân các việc không găng làm hai loại:

- Việc không găng độc lập là việc không găng mà sự kiện gốc và sự kiện ngọn của việc ấy đều là những sự kiện găng.



Hình 4.21

$T_i^m = T_i^s$ (sự kiện i - găng)

$T_j^m = T_j^s$ (sự kiện j - găng)

$t_{ij} < T_j^m - T_i^s \rightarrow D_{ij} > 0$ (việc (i, j) không găng).

Công việc không găng độc lập được sử dụng toàn bộ thời gian dự trữ chung của nó mà không làm ảnh hưởng đến các công việc khác.

- Việc không găng liên găng là việc không găng mà ít nhất một trong hai sự kiện gốc hoặc sự kiện ngọn của nó là sự kiện không găng.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

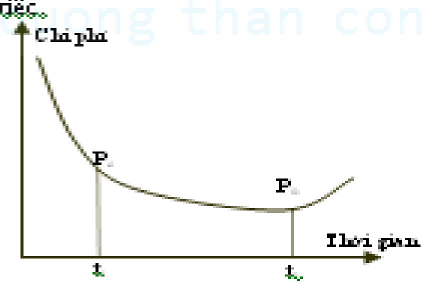
Tối ưu hóa quá trình rút ngắn đường găng

- Đảm bảo hoàn thành công trình không vượt quá thời hạn cho phép T_{cp}, nghĩa là:

T[illegible] < T_{cp}

- Đảm bảo hoàn thành công trình với chi phí dự kiện và thời hạn cho phép.
- Quá trình tối ưu hóa để rút ngắn đường găng thường được tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Lập biểu đồ tiến độ thi công công trình. Bao gồm
Liệt kê tất cả các công việc hiện có, đặt tên cho công việc theo ký hiệu.
Sắp xếp các công việc theo trình tự lo gíc và quy trình công nghệ.
Xác định thời hạn thực hiện các công việc.
Bước 2: Xây dựng sơ đồ mạng lưới từ biểu tiến độ thi công.
Bước 3: Xác định các yếu tố của sơ đồ mạng lưới.
Bước 4: Tìm đường găng g và chiều dài l(g) theo thuật toán đã biết.
Bước 5: Nếu l(g) > T_{cp} thì thực hiện việc rút ngắn đường găng theo nguyên tắc sau: Thời gian hoàn thành công việc càng ngắn thì chi phí càng phải cao (do phải đầu tư thêm máy móc thiết bị và nhân lực). Tuy nhiên thời gian không thể rút ngắn một cách tùy ý mà chỉ có thể rút ngắn trong giới hạn cho phép. Mặc khác ta cũng không thể kéo dài một công việc với thời gian tùy ý vì khi đó sẽ gây ra những tổn thất không thể chấp nhận được. Hình 4.22 biểu diễn sự phụ thuộc giữa nhu cầu chi phí và thời gian của một công việc.



Hình 4.22

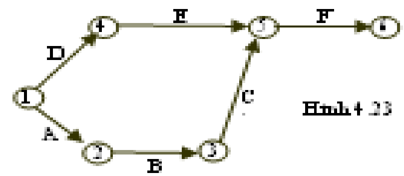
Trong thực tế thời gian dành cho việc hoàn thành một công việc của công trình chỉ có thể dao động trong khoảng t_c và t_n với chi phí tương ứng là P_c và P_n. Tỷ số $(P_c - P_n)/(t_n - t_c)$ được gọi là độ dốc, ký hiệu là S.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để rút ngắn thời gian hoàn thành công trình với chi phí nhỏ nhất. Giả sử những công việc của công trình được mô tả bằng sơ đồ mạng lưới thiết lập ứng với t_n có tổng thời gian trên đường găng là T. Chủ công trình yêu cầu rút ngắn thời gian hoàn thành công trình ΔT ngày. Làm thế nào thỏa mãn yêu cầu này với chi phí bổ sung nhỏ nhất. Vấn đề được giải quyết như sau:

- Dựa vào sơ đồ mạng lưới xác định đường găng.
- Rút ngắn tối đa thời gian của công việc có độ dốc nhỏ nhất.
- Kiểm tra xem đường găng có bị thay đổi không.
  Nếu đường găng không bị thay đổi thì quay lại bước 2.
- Tìm đường găng mới của sơ đồ mạng lưới theo kết quả rút ngắn ở bước 2.
- Nếu thời gian rút ngắn đã đáp ứng yêu cầu, kết thúc quá trình rút ngắn thời gian hoàn thành công trình. Nếu thời gian rút ngắn chưa thỏa mãn yêu cầu, quay lại bước 2.

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MANG

Thí dụ: Một công trình bao gồm các công việc A, B, C, D, E và F có sơ đồ mạng như hình 4.23 với các số liệu về thời gian và chi phí ghi trong bảng 4.4



Hình 4.23

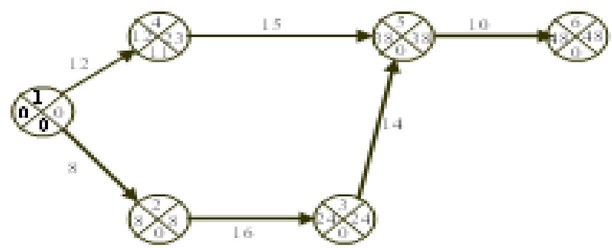
Bảng 4.4

Công việc	t_n	P_n	t_c	P_c	S
A	8	1800	7	2200	200
B	16	1500	11	2200	140
C	14	1800	9	2400	120
D	12	2400	9	3000	200
E	15	1200	14	2000	800
F	10	2000	8	4000	1000

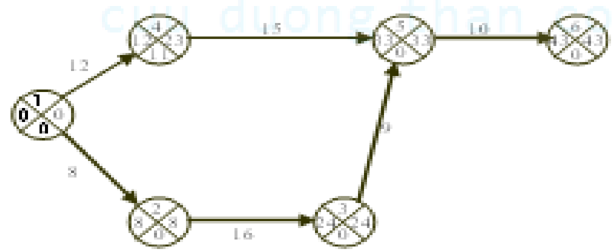
Yêu cầu: Tìm phương án thi công công trình với thời hạn cho phép là 36 ngày.

Giải:

B_1 - Dựa vào sơ đồ mạng xác định đường găng ứng với t_n (Hình 4.23a).

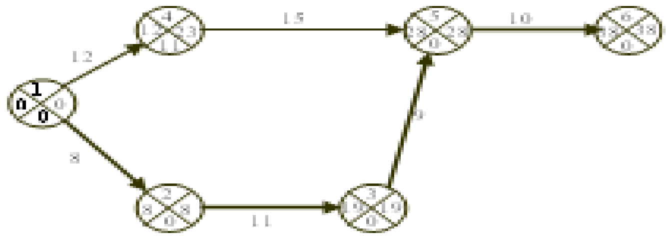


Hình 4.23a

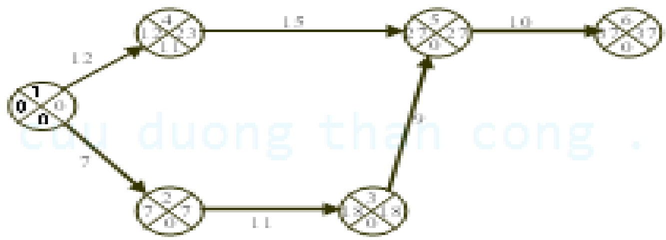


Hình 4.23b

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

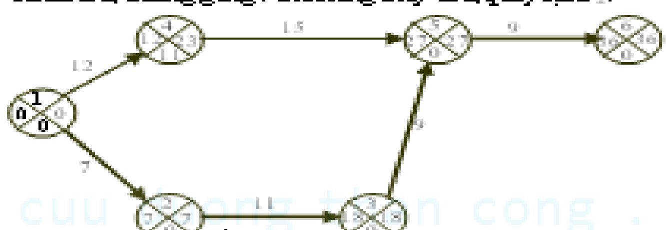


Hình 4.23c



Hình 4.23d

B_3- Kiểm tra, đường găng vẫn không thay đổi, quay lại B_2.



Hình 4.23d

Kết quả rút gọn được tóm tắt trong bảng 4.5

Bảng 4.5

Công việc	t_n	t_c	S	ΔT	ΔP
A	8	7	200	1	200
B	16	11	140	5	700
C	14	9	120	5	600
F	10	9	1000	1	1000
Tổng cộng				12	2500

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

***Đặt vấn đề*:**

Lớp mô hình bài toán hệ thống phục vụ công cộng hay còn gọi là mô hình hệ thống xếp hàng, phục vụ đám đông là một trong những lớp mô hình xuất phát từ các bài toán thực tế. Như bài toán tổ chức các hệ thống phục vụ như bản thân tên gọi của nó. Trong những hệ thống như vậy người ta thấy có rât nhiều yếu tố tác động, chi phối đến cách thức hoạt động cũng như hiệu quả hoạt động của hệ thống. Nếu xem xét một hệ thống phục vụ dưới giác độ mô hình hoá thì các mô hình tương ứng đôi khi không cho phép chung ta xác định các yếu tố ngoại sinh và nội sinh ngay từ đầu. Việc hình thành bài toán đối với lớp mô hình này cũng có những yếu tố đặc biệt. Thông thường với các mô hình của kinh tế vi mô hay vĩ mô đã biết, cùng với bài toán là hình ảnh một mô hình rất rõ nét. Với các mô hình thực tế nói chung và mô hình phục vụ công cộng nói riêng hệ thống chỉ tiêu đánh giá sẽ đóng vai trò là các biến nội sinh. Chúng là cơ sở để đánh giá hiệu quả và chất lượng phục vụ của hệ thống. Các yếu tố ngoại sinh trong những tình huống khác nhau có thể được lựa chọn từ các tham số.

Với mô hình hệ thống phục vụ công cộng, chúng ta sẽ thấy rõ hơn một trong các phương thức xây dựng, phân tích mô hình mà cơ sở toán học đã được thiết lập ở chương 1. Ngoài ra chúng ta tiếp cận với một lớp đơn giản các mô hình ngẫu nhiên, chúng đòi hỏi những thủ thuật riêng trong xây dựng và phân tích mô hình.

***5.1 Bài toán lý thuyết phục vụ công cộng*.**

Trong các hoạt động kinh tế xã hội, chúng ta thường gặp những quá trình phục vụ, trong đó người ta quan tâm đến hiệu quả hoạt động của cơ sở phục vụ về cả hai mặt: lợi ích của cơ sở phục vụ và lợi ích của đối tượng được phục vụ. Một trong những đặc điểm quan trọng của các quá trình này là đối tượng có tính chất đám đông và ngẫu nhiên, thời gian thoả mãn yêu cầu của đối tượng cũng có tính chất ngẫu nhiên. Điều đó không cho phép chúng ta tổ chức, quản lý hệ thống phục vụ như một quá trình thường xuyên, đều đặn. Bài toán lý thuyết phục vụ công cộng nghiên cứu các hệ thống phục vụ trong điều kiện tác động của các yếu tố ngẫu nhiên và đưa ra các phân tích, đánh giá hiệu quả phục vụ của chúng. Thông qua việc nghiên cứu các mô hình hệ thống phục vụ công cộng cũng cho chúng ta cách nhìn một hệ thống ngẫu nhiên trong trường hợp đơn giản, sự khác biệt của nó với các hệ thống trong đó mọi quá trình diễn ra đều đặn, đồng thời chúng ta cũng tiếp cận với một trong những cách mô hình hoá các hiện tượng kinh tế, xã hội đó là mô hình hoá bằng sơ đồ trạng thái. Chúng ta sẽ thấy sự không ăn khớp của các quá trình tưởng như đã được thiết kế đồng bộ. Chẳng hạn, nếu thời gian sản xuất một loại sản phẩm là ngẫu nhiên với cường độ trung bình là k sản phẩm/phút, bộ phận kiểm tra cũng có cường độ tương đương có cùng phân phối xác suất thì không phải vì thế mà mọi việc diễn ra một cách bình thường theo nghĩa mọi sản phẩm đều được kiểm tra tức thì sau khi ra khỏi dây chuyền sản xuất. Các mô hình này có nhiều ứng dụng trong thực tế, từ đơn giản đến phức tạp. Trong khuôn khổ cho phép, chúng ta chỉ nghiên cứu một vài dạng cơ bản, tuy nhiên phương pháp nghiên cứu có thể sử dụng cho các hệ thống phức tạp hơn nhiều. Sau đây là một số thí dụ dẫn đến các bài toán phục vụ công cộng đơn giản.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

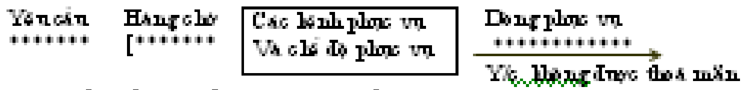
Thí dụ 5.1 Xét một siêu thị có 14 cửa thanh toán, ta gọi A là sự kiện có khách hàng có nhu cầu thanh toán sau khi chọn hàng. Trong đa số các trường hợp A là biến ngẫu nhiên, mỗi khách hàng vào siêu thị có lượng hàng mua khác nhau nên thời gian thanh toán (T) cũng khác nhau và đây cũng là một biến ngẫu nhiên. Như vậy không thể tính toán lưu lượng khách hàng vào siêu thị một cách thông thường, phù hợp theo một nghĩa nào đó. Chỉ có thể tính khả năng và các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của siêu thị và chỉ có thể tính một cách trung bình. Bài toán dẫn đến việc thiết kế bao nhiêu cửa thanh toán để đảm bảo khả năng thanh toán cho khách hàng nhanh nhất với những hạn chế về mặt hiệu quả sử dụng các cửa thanh toán cũng như các yêu cầu khác có liên quan.

Thí dụ 5.2 Trên một tuyến đường có một trạm thu phí giao thông, dòng xe chạy trên tuyến này có tính chất ngẫu nhiên, nói cách khác số xe qua trạm trong một đơn vị thời gian là một biến ngẫu nhiên và rõ ràng là thời gian trả tiền của mỗi xe khi qua trạm cũng là ngẫu nhiên. Hai vấn đề tối thiểu được đặt ra là: mức độ thông tuyến và tận dụng công suất của trạm. Bài toán đặt ra là xác định một cấu trúc của trạm hợp lý theo chỉ tiêu nào đó.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Mô hình hoá hệ thống phục vụ công cộng.

Hệ thống phục vụ công cộng và các yếu tố cấu thành.



a) *Dòng yêu cầu đến hệ thống (dòng yêu cầu)*

Dòng các đối tượng hướng đến hệ thống nhằm thoả mãn một loại nhu cầu mà hệ thống phục vụ có khả năng đáp ứng.

Đặc trưng quan trọng của dòng yêu cầu là quy luật về sự xuất hiện các yêu cầu theo thời gian. Một trong những dòng yêu cầu phổ biến là dòng tuân theo quy luật Poisson và đặc biệt là dòng tuân theo quy luật poisson dừng. Để có thể nhận biết dòng yêu cầu có phân phối Poisson, người ta có thể căn cứ vào các tính chất của nó, đó là:

- *Tính đơn nhất*: Một dòng yêu cầu có tính đơn nhất nếu trong một khoảng thời gian đủ nhỏ hầu như chắc chắn là không có quá một yêu cầu xuất hiện. Như vậy, nếu ta ký hiệu $P_k(t, \Delta t)$ là xác suất trong thời gian từ t đến $t + \Delta t$ có k yêu cầu xuất hiện thì:

$$P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) = 1 - o(\Delta t) \text{ với } o(\Delta t) \text{ là vô cùng bé của } \Delta t.$$

- *Tính không hậu quả*: một dòng yêu cầu có tính không hậu quả nếu xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến $t + \Delta t$ không phụ thuộc vào việc trước thời điểm t đã có bao nhiêu yêu cầu xuất hiện. Như vậy biến cố có x yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian t đến $t + \Delta t$ khi trước đó đã có k yêu cầu xuất hiện độc lập với nhau với mọi k, tức là:

$$P_x(t, \Delta t) = P_x(t, \Delta t / k \text{ yêu cầu đã xuất hiện}) \text{ với mọi } k.$$

Dòng yêu cầu như vậy có xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến $t + \Delta t$ được tính theo công thức Poisson như sau:

$$P_x(t\Delta t) = \frac{a(t\Delta t)^x e^{-a(t,\Delta t)}}{x!}, \; x \geq 0.$$

Trong đó $a(t, \Delta t)$ là số trung bình yêu cầu xuất hiện từ t đến $t + \Delta t$.

- *Tính dừng*: Dòng yêu cầu có tính dừng nếu như xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian Δt không phụ thuộc vào điểm đặt của khoảng thời gian đó. Tức là:

$$P_x(t, \Delta t) = P_x(\Delta t) \text{ với mọi } t.$$

Nói cách khác mật độ dòng yêu cầu không đổi : $a(\Delta t) = \lambda \Delta t$ và ta có :

$$P_x(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^x e^{-\lambda \Delta t}}{x!}$$

Trong đó: λ là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong một đơn vị thời gian.

Nếu chọn $\Delta t = 1$ thì có công thức của quy luật phân phối Poisson quen thuộc.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

- ***Hệ dừng và không dừng***
- ***Hệ chờ và không chờ (từ chối)***

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Trạng thái hệ thông, quá trình chuyên trạng thái.

a) Phương pháp phân tích:

Thu thập số liệu về các dòng biến cố liên quan đến hệ thống: dòng yêu cầu, dòng phục vụ hoặc thời gian phục vụ của các kênh.

Xác định quy luật dòng yêu cầu và dòng phục vụ, xác định chế độ phục vụ.

Xác định trạng thái hệ thống, sơ đồ trạng thái và lập hệ phương trình trạng thái.

Giải hệ phương trình trạng thái, tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

Cải tiến hệ thống theo một chỉ tiêu hiệu quả nào đó. Việc xác định quy luật các dòng yêu cầu và dòng phục vụ; lập sơ đồ trạng thái là hai nội dung quan trọng hơn cả. Sau đây ta sẽ đề cập kỹ hơn về hai nội dung đó.

b) Tiêu chuẩn χ^2 (khi bình phương) và việc kiểm tra giả thiết phân phối xác suất của dòng biến cố.

Kiểm định giả thiết về một dạng phân phối đã được trình bày trong các giáo trình xác suất thống kê. Người ta có thể sử dụng một số kiểm định khác nhau (kiểm định khi bình phương, kiểm định Kolmogorov – Smirnov,…). Kiểm định khi bình phương là một trong những kiểm định thong dụng nhất và dễ dàng nhất với bộ số liệu quan sát. Sau đây ta xét cụ thể kiểm định này đối với dòng biến cố của hệ thống phục vụ công cộng.

Để kiểm định giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poisson ta thực hiện như sau:

Chi thời gian thành các đơn vị nhỏ và tiến hành quan sát sự xuất hiện các yêu cầu trong khoảng thời gian đó. Ta nhận được bộ số liệu bao gồm số yêu cầu xuất hiện trong một đơn vị thời gian (lượng biến x_i); và số khoảng thời gian tương ứng (tần số n_i). Để đảm bảo tính đại diện của các giá trị quan sát không quá nhỏ đối với mỗi giá trị, thong thường nếu các khoảng thời gian có số yêu cầu tương ứng nhỏ hơn 5 thì ta ghép các khoảng đó để có $n_i \geq 5$, giá trị đại diện là giá trị trung bình.

Tính giá trị thống kê:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

với $n_i' = nP(x_i)$; $P(x_i) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. Trong đó n_i' là giá trị tần số lý thuyết nhận được từ phân phối Poisson với trung bình là $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{x_i n_i}{n_i}$, k là số nhóm giá trị x_i, n_i tần số quan sát tương ứng và n là tổng tần số.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Thí dụ 5.3 Khi quan sát số khách hàng đến giao dịch tại một bưu cục, người ta thu được số liệu sau :

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	21	23	10	4	1	0	0	1

Trong đó : x_i là thời gian giao dịch của khách hàng. n_i số khách hàng tương ứng. Để kiểm tra giả thiết : « Khách hàng đến bưu cục có phân phối Poisson », ta tiến hành như sau :

Tính giá trị quan sát $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i n_i}{n_i} = 1,1$; k là số nhóm giá trị x_i. $P(x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Dùng giá trị này ước lượng giá trị trung bình của phân phối, từ đó tra bảng Poisson P(λ) với các giá trị có tần số nhỏ hơn 5 đã được ghép lại, thoả mãn điều kiện $n_i \geq 5$.

Chọn một mức ý nghĩa α, nếu giá trị thống kê $\chi^2 < \chi^2(\alpha, m)$, trong đó m = k – 2 (bậc tự do) thì giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poisson không bị bác bỏ. Lập bảng tính toán như sau :

x_i	n_i	$P(x_i)$	n_i'	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
0	21	0,33287	6,79027	29,7357
1	23	0.36616	8,421680	25,2358
2	10	0,20139	2,0139	31,6687
3	4	0.07384	0,29549	9,83233
4	1	0,02031		
5	0	0,00447		
6	0	0,00082		
7	1	0,00013		
	n=60			96,09383

Với các quan sát trên ta có λ = 1,1, giá trị quan sát của thống kê khi bình phương là : 96,09383, giá trị lý thuyết (tra bảng) là: $\chi^2(0,05, 5) = 11,0705$.

Vậy giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poisson bị bác bỏ

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Trạng thái hệ thống và quá trình chuyển trạng thái.

Trạng thái hệ thống

Ta gọi tập hợp một hay một số đặc trưng mà trên cơ sở đó có thể phân biệt sự tồn tại của hệ thống trong những tình trạng khác nhau tại mỗi thời điểm là trạng thái của hệ thống.

Nếu ký hiệu A(t) là một trạng thái của hệ thống thì A(t) là một biến cố ngẫu nhiên. Để có thể phân tích hệ thống phục vụ công cộng, cần xác định tất cả các trạng thái có thể có của hệ thống, tập hợp các trạng thái tại một thời điểm t bất kỳ là một nhóm đầy đủ các biến cố.

Với những hệ thống phục vụ công cộng Poisson, từ đây về sau ta ký hiệu các trạng thái của chúng là $X_{k(t)}$, để chỉ hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t.

Xác suất trạng thái

Việc hệ thống tồn tại ở một trạng thái cụ thể là một biến cố ngẫu nhiên nên tương ứng với mỗi trạng thái có một giá trị xác suất gọi là xác suất trạng thái, để chỉ ra khả năng hệ thống ở trạng thái tương ứng. Ta ký hiệu xác suất hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t là $P_{k(t)}$.

Quá trình chuyển trạng thái.

Tại mỗi thời điểm t hệ thống tồn tại ở một trạng thái nhất định, chẳng hạn $X_{k(t)}$, sau một thời gian Δt hệ thống có thể chuyển đến một trạng thái khác $X_{j(t+\Delta t)}$ nhờ sự tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nào đó. Ta gọi xác suất hệ thống chuyển từ $X_{k(t)}$ đến $X_{j(t+\Delta t)}$ là xác suất chuyển trạng thái. Trong các mô hình sẽ đề cập sau này ta quan tâm đến sự tác động chuyển trạng thái, thay vì xác suất chuyển trạng thái. Ta ký hiệu cường độ của dòng biến cố làm cho hệ thống chuyển từ $X_{k(t)}$ đên $X_{j(t+\Delta t)}$ là $\lambda_{kj(t)}$.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Sơ đồ trạng thái và hệ phương trình trạng thái.

Sơ đồ trạng thái

Người ta dùng một sơ đồ mô tả các trạng thái và quá trình chuyển trạng thái của hệ thống. Trong đó mỗi trạng thái được thể hiện bởi một ô vuông với tên trạng thái, chẳng hạn: Xk(t). Để chỉ sự chuyển trạng thái người ta dung một mũi tên trên đó ghi cường độ của dòng biến cố làm hệ thống chuyển trạng thái theo chiều mũi tên,

Hệ phương trình trạng thái.

Để mô tả mối liên hệ về khả năng chuyển trạng thái như vậy, người ta sử dụng hệ phương trình trạng thái, trong đó các xác suất trạng thái và đạo hàm bậc nhất theo thời gian của nó là các biến còn các tác động làm chuyển trạng thái là các hệ số. Hệ phương trình này cho phép xác định các xác suất trạng thái, làm cơ sở phân tích hệ thống.

Quy tắc viết hệ phương trình trạng thái

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của xác suất trạng thái $P_{k(t)}$ bằng tổng của một số số hạng, số số hạng đó đúng bằng số mũi tên nối trạng thái đó với trạng thái khác. Mỗi số hạng là tích của xác suất trạng thái mà mũi tên xuất phát và cường độ dòng biến cố ghi theo chiều mũi tên đó.. dấu của số hạng là dấu "-" nếu mũi tên xuất phát từ $X_{k(t)}$; là dấu "+" nếu mũi tên hướng đến $X_{k(t)}$.

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_j \lambda_{jk}(t)P_j(t) - \sum_j \lambda_{kj}(t)P_k(t)$$

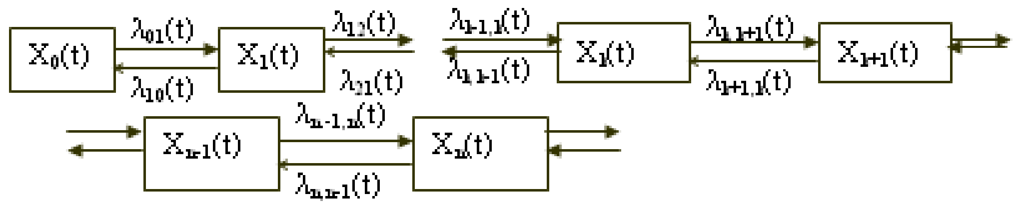
Với điều kiện chuẩn là:

$$\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Quá trình huỷ và sinh – Nghiệm hệ phương trình trạng thái.

+/ Sơ đồ trạng thái:



+/ Hệ phương trình trạng thái:

$P_0'(t) = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t)$

$P_1'(t) = -\lambda_{10}P_1(t) - \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{21}P_2(t)$

……………………………………………………………………………

$P_k'(t) = -\lambda_{k,k-1}P_k(t) - \lambda_{k,k+1}P_k(t) + \lambda_{k-1,k}P_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}(t)$

………………………………………………………………………………………………

Với điều kiện chuẩn là :

$$\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$$

Trong trường hệ dừng, các đạo hàm theo thời gian đều bằng 0, ta có hệ phương trình sau:

$0 = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t)$

$0 = -\lambda_{10}P_1(t) - \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{21}P_2(t)$

…………………………………………………………………………… (1)

$0 = -\lambda_{k,k-1}P_k(t) - \lambda_{k,k+1}P_k(t) + \lambda_{k-1,k}P_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}(t)$

……………………………………………………………………………………………….

Với điều kiện chuẩn là :

$$\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

+/ ***Lời giải của hệ***:

Hệ (1) có thể giải nhờ các thế dần các xác suất theo P_0. Tuy nhiên, đơn giản hơn nếu đặt $U_i = -\lambda_{i,i+1}P_i(t) + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}(t)$ thì hệ (1) trở thành:

$$U_0 = 0$$

$$U_i - U_{i-1} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots)$$

Nghiệm của hệ là $U_i \equiv 0$.

Từ đó ta có thể đưa ra công thức tính xác suất P_k theo P_0 như sau:

$$P_1 = (\lambda_{01}/\lambda_{10})P_0; \quad P_k = (\lambda_{k,k+1}/\lambda_{k+1,k})P_k$$

Hay: $$P_{i+1} = \prod_{i=0}^{i} \frac{\lambda_{i,i+1}}{\lambda_{i+1,i}} P_0$$

Trong đó: $\lambda_{k,k+1} = \lambda$ và $\lambda_{k+1,k} = (k+1)\mu$

Nếu đặt $\alpha = \lambda/\mu$ thì $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!}P_0$ (2)

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Hệ thống phục vụ công cộng từ chối cổ điển (Hệ thống Eclang)

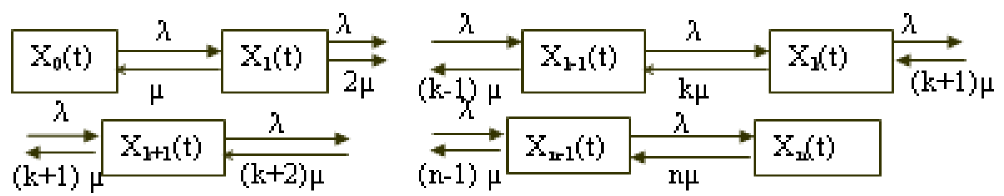
a) Mô tả hệ thống: Hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo quy luật chỉ số. một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại, nếu tất cả các kênh đều bận thì yêu cầu phải ra khỏi hệ thống. cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b) Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống:

+/ Trạng thái: Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k = 0, 1, 2,…, n). Chú ý rằng với chế độ phục vụ của hệ thống Eclang số kênh bận cũng chính là số yêu cầu đang được phục vụ tại thời điểm t.

+/ Sơ đồ chuyển trạng thái:



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poisson dừng như sau:

Nhờ tính đơn nhất của dòng yêu cầu mà khi hệ thống ở trạng thái $X_k(t)$ nó chỉ có thể chuyển đến trạng thái $X_{k+1}(t)$, không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k+i}(t)$ với i >1. cũng tương tự, do tính đơn nhất của dòng phục vụ của các kênh, hệ thống chỉ có thể chuyển đến $X_{k-1}(t)$ mà không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k-i}(t)$ với i > 1 .

Nhờ tính không hiệu quả của các dòng biến cố nêu trên mà cường độ các dòng biến cố không phụ thuộc vào trạng thái của hệ thống khi nó tác động đến.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái.

$$0= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$0= -\lambda P_1(t) - \mu P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$
$$0= -\lambda P_k(t) - k\mu P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\,\mu P_{k+1}(t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Với điều kiện chuẩn là :

$$\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$$

Đặt $\alpha = \lambda/\mu$, từ (2) ta có: $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$

Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

Bằng cách nhân cả tử và mẫu số của công thức trên với $e^{-\alpha}$ ta có:

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0 / 0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}}$$

Ký hiệu $P(\alpha, k) = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$ Là xác suất một biến ngẫu nhiên phân phối Poisson nhận giá trị k và

$R(\alpha, k) = \sum_{i=0}^{k} P(\alpha, i)$ là xác suất tích luỹ tương ứng, ta có:

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0/0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}} = \frac{P(\alpha,0)}{P(\alpha,n)}$$

Từ đó: $$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{P(\alpha, k)}{R(\alpha, n)} \qquad (4)$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

d) Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống:

Xác suất hệ thống có n kênh rỗi:

$$P_r = P_0 = \frac{\alpha^0}{0!}P_0 = \frac{P(\alpha, 0)}{R(\alpha, n)}$$

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ thời gian hệ thống rỗi hoàn toàn, thời gian rỗi hoàn toàn ở mọi hệ thống Poisson nói riêng và các hệ thống ngẫu nhiên nói chung, dù ta có giảm đến tối thiểu số kênh phục vụ hay tăng tối đa cường độ dòng yêu cầu.

2) Xác suất hệ thống có n kênh bận (hay xác suất một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối P_{tc}):

$$P_{tc} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!}P_0 = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n)}$$

Đây cũng là hiệu suất lý thuyết tối đa của hệ thống, như vậy trong trường hợp hệ ngẫu nhiên, không có khả năng thiết kế một hệ thống khai thác toàn bộ công suất kỹ thuật của các kênh.

3) Xác suất phục vụ (xác suất một yêu cầu đến hệ thống được nhận phục vụ ngay) là: $P_{pv} = 1 - P_{tc} = 1 - P_n$.

Đó cũng là tỷ lệ các đối tượng được hệ thống tiếp nhận và phục vụ, đối với hệ thống phục vụ công cộng, đây là một trong số ít các chỉ tiêu quan trọng nhất, với cùng một tiềm năng kỹ thuật như nhau có thể chọn chỉ tiêu này làm mục tiêu thiết kế hệ thống.

4) Số kênh bận trung bình (hay số yêu cầu trung bình có trong hệ thống):

$$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^n}{n!}P_0 = \alpha\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}P_0 = \alpha(1 - P_n)$$

$$= \alpha\left[1 - \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n)}\right] = \alpha.P_{pv}$$

5) Số kênh rỗi trung bình: $\overline{N}_r = 1 - \overline{N}_b$

6) Hệ số bận (rỗi):

$$H_b = \frac{\overline{N}_b}{n}\ ;\ H_r = 1 - H_b$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

e) Phân tích và cải tiến hệ thống

Trên cơ sở phân tích cụ thể các chỉ tiêu này người ta có thể cải tiến hệ thống theo một hay một số chỉ tiêu chủ yếu.

1) Trước hết ta xem xét vấn đề hiệu suất lý thuyết của một hệ thống phục vụ công cộng kiểu Erlang phụ thuộc vào n và α như thế nào. Hiệu suất lý thuyết được xem là công suất phục vụ tối đa của hệ thống, chỉ tiêu này được tính theo công thức:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!}P_0 = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n)}$$

Như vậy, hiệu suất lý thuyết là không đổi nếu số kênh và hệ số đảm nhận yêu cầu (hệ số α) của mỗi kênh không đổi. Tuy nhiên khi $\alpha/n < 1$ thì $P(\alpha, n)$ là hàm giảm theo n, khi n tăng P_n giảm, hay hiệu suất lý thuyết giảm.

Nếu lấy đạo hàm bậc nhất của P_n theo α ta thấy:

$$P'_n(\alpha) = \frac{\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}\right)} \ge 0$$

Vậy khi α, hiệu suất lý thuyết tăng.

Như vậy trong điều kiện nhu cầu không có cạnh tranh (tức λ không đổi) thì giảm số kênh hay giảm năng suất kênh sẽ tận dụng được công suất thiết bị.

Vấn đề thu hút nhu cầu và chất lượng phục vụ:

$$P_{pv} = 1 - P_n$$

Trên quan điểm thu hút yêu cầu, hành vi của hệ thống phục vụ rõ ràng là ngược chiều với việc tăng hiệu suất của hệ thống. Có thể kết hợp hai chỉ tiêu này bằng cách cho mỗi chỉ tiêu một trọng số (đánh giá lợi ích) hoặc đặt trước một chỉ tiêu và tìm cách hướng chỉ tiêu thứ hai có lợi nhất cho cơ sở phục vụ.

Hàm F nêu trên thực chất là một trong hai cách làm như vậy. Ta có thể biến đổi chút ít hàm F như sau:

$$\begin{aligned} F &= \lambda P_{pv}c_{pv} - \bar{n}c_{kr} - \lambda P_n c_{tc} \\ &= \lambda P_{pv}c_{pv} - (n - \alpha P_{pv})c_{kr} - \lambda(1 - P_{pv})c_{tc} \\ &= \lambda P_{pv}c_{pv} - nc_{kr} + \alpha P_{pv}c_{kr} - \lambda c_{tc} + P_{pv}c_{tc} \\ &= P_{pv}(\lambda c_{pv} + \lambda c_{tc} + \alpha c_{kr}) - nc_{kr} - \lambda c_{tc} \end{aligned}$$

Đối với mỗi hệ thống phục vụ có thể xem λ là cho trước (tham số), vấn đề còn lại là năng suất kênh và số kênh (biến ngoại sinh) hoặc ngược lại số kênh và năng suất kênh cho trước (tham số) và λ thay đổi (biến ngoại sinh) sẽ làm thay đổi chỉ tiêu hiệu quả F. Bằng các công cụ đạo hàm và vi phân đã trình bày trong chương 1, ta có thể khảo sát sự thay đổi của hiệu quả F khi có sự thay đổi của các biến ngoại sinh trong mỗi trường hợp.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Thí dụ 5.4. Bộ phận kiểm tra sản phẩm của một cơ sở sản xuất có 3 máy làm việc tự động, năng suất các máy đều là 6 sản phẩm một phút. Mỗi sản phẩm ra khỏi dây chuyền đến bộ phận kiểm tra nếu gặp lúc có máy rỗi sẽ được kiểm tra tại 1 trong các máy rỗi, ngược lại sản phẩm nhập kho không qua kiểm tra. Dòng sản phẩm ra khỏi đây chuyền là dòng Poisson dừng mật độ trung bình 12 sản phẩm một phút. Thời gian kiểm tra một sản phẩm phân phối chỉ số.

- Tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của bộ phận kiểm tra?

- Nếu muốn tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96% thì cần tối thiểu bao nhiêu máy như vậy?

- Nếu 3 máy đặt kế tiếp nhau như 3 hệ thống từ chối cổ điển nối tiếp thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ tăng hay giảm?(Dành cho sinh viên tự làm)

Giải: Đây là hệ thống phục vụ công cộng Eclang với các tham số:

Số kênh n = 3

Năng suất kênh: μ = 6

Dòng vào mật độ λ = 12; α = 2

- Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống:

$P_0 = 0,157895$; $P_{tc} = 0,210526$; $P_{pv} = 0,789474$; $N_b = 1,578947$; $H_b = 0,526316$

- Ta nhận thấy $P_{tc} > 0,04$ như vậy cần tăng số kênh sao cho $P_{tc} < 0,04$ thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ không nhỏ hơn 96%. Bảng sau là các giá trị Ptc tương ứng với số kênh n:

N	3	4	5
P_{tc}	0,210526	0,095238	0,036697

Vậy n = 5 tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96%.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và thời gian chờ không hạn chế.

a) Mô tả hệ thống.

Một hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo quy luật chỉ số. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kêng rỗi thì được nhận vào phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại, nếu tất cả các kênh đều bận thì xếp hàng chờ nếu số yêu cầu chờ chưa vượt quá m chỗ. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b) Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống.

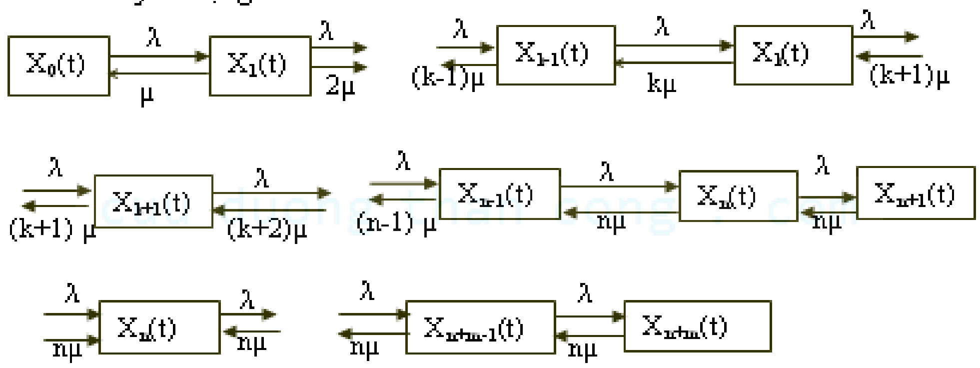
+/ Trạng thái.

Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k = 1, 2, …, n).

$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm t (s = 1, 2, …, m).

+/ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập dựa trên cơ sở phân tích tính chất các dòng Poisson như đã nói ở hệ Eclang.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

c) Phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái.

$$0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$0 = -\lambda P_1(t) - \mu P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t)$$
$$\ldots \qquad (1)$$
$$0 = -\lambda P_k(t) - k\mu P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t)$$
$$\ldots$$
$$0 = -n\mu P_n(t) - \lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + n\mu P_{n+1}(t)$$
$$\ldots$$
$$0 = -n\mu P_{n+s}(t) - \lambda P_{n+s}(t) + \lambda P_{n+s-1}(t) + n\mu P_{n+s+1}(t)$$
$$\ldots$$
$$0 = -n\mu P_{n+m}(t) + \lambda P_{n+s-1}(t)$$

Với điều kiện chuẩn là :

$$\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$$

Đặt $\alpha = \lambda/\mu$, từ (1) ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ và } P_{n+s} = \frac{\alpha^n \alpha^s}{n! n^s} P_0 \qquad (2)$$

Nếu $\alpha/n = 1$ thì $P_{n+s} = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0 = P_n$ (*)

Đặt $x = \alpha/n$. Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

- Khi $x \neq 1$:

$$P_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s \right) = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(1 - x^m)}{1 - x}}$$

Hay $\Rightarrow P_0 = \dfrac{P(\alpha, 0)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n) \dfrac{(1 - x^m)}{1 - x}}$

- Khi $x = 1$ thì $\Rightarrow P_0 = \dfrac{P(\alpha, 0)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n) m}$ (**)

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

- Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: $P_r = P_0$
- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ: P_c

Khi $x \neq 1$:

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{m-1} x^s P_0$$

$$= \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{(1 - x^m)}{1 - x}} \frac{(1 - x^m)}{1 - x}$$

Khi $x = 1$ thì $P_c = mP_n$

- Xác suất một yêu cầu bị từ chối: P_{tc}

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} x^m P_0$$

Khi $x \neq 1$: $$P_{tc} = \frac{P(\alpha, 0)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{(1 - x^m)}{1 - x}} x^m$$

Khi $x = 1$: $P_{tc} = P_{n+m} = P_n$

- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay:

$$P_{opv} = 1 - P_{tc} - P_c$$

- Số kênh bận trung bình:

Khi $x \neq 1$: $$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + nP(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}(1 - x^m)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}(1 - x^m)}$$

Khi $x = 1$: $$\overline{N}_b = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + nmP(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)m}$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

- Độ dài hàng chờ trung bình:

$$\text{Khi } x \neq 1: \ \overline{M}_c = \sum_{s=0}^{m} sP_{n+s} = \frac{P(\alpha,n)\sum_{s=0}^{m} sx^s}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{1-x^m}{1-x}}$$

$$\text{Trong đó: } \sum_{s=0}^{m} sx^s = x\sum_{s=1}^{m} sx^{s-1} = x\frac{\partial \sum_{s=0}^{m-1} x^s}{\partial x} = \frac{x}{(1-x)^2}\left[(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1\right]$$

$$\text{Khi } x = 1: \ \overline{M}_c = Pn\frac{m(m-1)}{2}$$

- Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ:

$$\overline{T}_r = \overline{T}_{pv}\frac{1-H_b}{H_b} = \frac{1-\frac{\overline{N}_b}{n}}{\mu\frac{\overline{N}_b}{n}}$$

- Thời gian trung bình của một yêu cầu ở trong hệ thống:

T_{is}

Thời gian một yêu cầu lưu lại trong hệ thống như sau:

Nếu hệ thống có k < n kênh bận thì một yêu cầu lưu lại trung bình là $1/\mu$.

Nếu hệ thống có n kênh bận thì một yêu cầu lưu lại trung bình là :

$$\frac{1}{\mu} + \frac{s}{n\mu}$$

$$\text{Vậy} \quad T_{is} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\mu}P_k + \sum_{s=0}^{m}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{s}{n\mu}\right)P_{n+s} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu}\sum_{s=0}^{m} sP_{n+1} = \frac{1}{\mu} + \frac{\overline{M}_c}{n\mu}$$

Và $\frac{\overline{M}_c}{n\mu}$ chính là thời gian chờ trung bình.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Thí dụ: Một trạm đăng kiểm xe ô tô có 2 tổ làm việc độc lập, năng suất mỗi tổ 6 xe/ ngày. Dòng xe đến trạm là dòng Poisson dừng trung bình 10 xe/ ngày. Thời gian đăng kiểm một xe tuân theo quy luật chỉ số. Một xe đến trạm gặp lúc có tổ rỗi thì được nhận ngay tại một tổ rỗi đó, ngược lại phải xếp hàng chờ nếu chỗ chờ chưa quá 9. Tính các chỉ tiêu phân tích hoạt động của trạm trên.

Giải:

Số kênh phục vụ:	$n = 2$
Năng suất kênh:	$\mu = 6$
Mật độ dòng vào:	$\lambda = 10$
Số chỗ chờ tối đa:	$m = 9$
Hệ số đảm nhận:	$\alpha = 10/6 = 1,666667$
	$\alpha/n = 0,83333$

Các chỉ tiêu đánh gía hoạt động của trạm;

- Xác suất trạm có hai kênh rỗi: $P_0 = 0,101231$
- Xác suất một yêu cầu đến trạm phải chờ: $P_c = 0,707344$
- Xác suất từ chối một yêu cầu: $P_{tc} = 0.022707$
- Xác suất một yêu cầu được phục vụ ngay: $P_{opv} = 0,269948$
- Số kênh bận trung bình: $\overline{N}_b = 1,628821$
- Độ dài hàng chờ trung bình: $\overline{M}_c = 2,401353$
- Thời gian chờ trung bình: $T_c = 0,2001$
- Thời gian rỗi trung bình giữa hai lần phục vụ của kênh: $T_r = 0,03789$.

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Hệ thống chờ thuần nhất

a) Mô tả hệ thống.

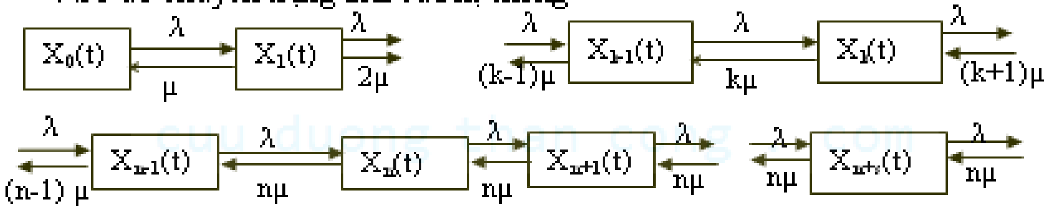
b) Quá trình thay đổi trạng thái – Sơ đồ trạng thái của hệ thống.

+/ Trạng thái:

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t ($k = 1, 2, \dots, n$)

$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm t ($s = 1, 2, \dots, m$)

+/ Sơ đồ chuyển trạng thái của hệ thống



c) Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái.

Áp dụng quy tắc viết hệ phương trình xác suất trạng thái, ta có thể viết hệ phương trình trạng thái của hệ này.

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)\\
0 &= -\lambda P_1(t) - \mu P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)\\
0 &= -\lambda P_k(t) - k\mu P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\,\mu P_{k+1}(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= -n\mu P_n(t) - \lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + n\mu P_{n+1}(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= -n\mu P_{n+s}(t) - \lambda P_{n+s}(t) + \lambda P_{n+s-1}(t) + n\mu P_{n+s+1}(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Với điều kiện chuẩn là : $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$. Đặt $\alpha = \lambda/\mu$, từ (1) ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!}P_0 \text{ và } P_{n+s} = \frac{\alpha^n \alpha^s}{n!\,n^s}P_0 \qquad (2)$$

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

d) Tính các chỉ tiêu

để tính các xác suất trạng thái và các chỉ tiêu ta chỉ cần lấy giới hạn các công thức đã có ở hệ thống chờ hạn chế với m dần tới vô hạn và $\alpha/n < 1$.

1. Xác suất hệ thống có n kênh rỗi : $P_r = P_0$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\pi^s} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{\pi}{1-\pi}}$$

2. Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ P_c.

$$P_c = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = P_0\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\pi^s = \frac{\alpha^n}{n!}P_0\frac{1}{1-\pi} = \frac{P(\alpha,n)\frac{1}{1-\pi}}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{\pi}{1-\pi}}$$

3. Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay :

$$P_{ngay} = 1 - P_c$$

4. Số kênh bận trung bình :

$$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s} = P_0\sum_{k=0}^{n} k\frac{\alpha^k}{k!} + nP_0\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\pi^s$$

$$= P_0\left(\alpha\sum_{k=0}^{n-1} k\frac{\alpha^k}{k!} + n\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \frac{\alpha R(\alpha,n-1) + nP(\alpha,n)\frac{\pi}{1-\pi}}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{\pi}{1-\pi}}$$

5. Độ dài hàng chờ trung bình:

$$\overline{M}_c = \sum_{s=0}^{\infty} sP_{n+s} = P_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty} s\pi^s = \frac{\pi P(\alpha,n)}{(1-\pi)^2\left[R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{\pi}{1-\pi}\right]}$$

6. Thời gian trung bình yêu cầu ở trong hệ thống:

$$T_{ht} = \frac{1}{\mu} + \frac{\overline{M}_c}{n\mu}$$

7. Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ:

$$\overline{T}_r = \overline{T}_{ph}\frac{1 - H_b}{H_b} = \frac{1 - \frac{\overline{N}_b}{n}}{\mu\frac{\overline{N}_b}{n}}$$

Khi m đủ lớn sử dụng các công thức của hệ chờ thuần nhất cho hệ chờ hạn chế

CHƯƠNG 5
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Thí dụ:

Một trung tâm khai thác bưu kiện có 6 tổ làm việc độc lập, mỗi giờ một tổ khai thác được trung bình 4 tấn. Trung bình mỗi giờ có 18 tấn bưu kiện về trung tâm để khai thác. Nếu bưu kiện về gặp lúc có tổ rỗi thì được khai thác ngay tại tổ đó, ngược lại phải tạm xếp vào kho chờ khai thác. Dung tích kho đủ lớn và giả sử dòng bưu kiện về trung tâm là dòng Poisson dừng, thời gian khai thác một tấn bưu kiện tuân theo quy luật chỉ số. Hãy xác định các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trung tâm.

Giải:

Ta xem trung tâm khai thác bưu kiện là một thống chờ thuần nhất với:

Số kênh phục vụ:	**n =6**
Năng suất kênh:	**μ = 4**
Mật độ dòng vào:	**λ = 18**
Hệ số đảm nhận:	**α = 18/6 = 4,5**
	α/n = 0,75

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trung tâm:

Xác suât trung tâm có 6 tổ rỗi: P0 = 0,00914

Xác suất một tấn bưu kiện phải chờ để khai thác: Pc = 0,42165

Xác suất một tấn bưu kiện được khai thác ngay: Popv = 0,57835

Số tổ bận trung bình: Nb = 4,5

Số tấn bưu kiện trung bình trong kho chờ khai thác: Mc = 0,126

Thời gian trung bình từ khi bưu kiện về đến khi được khai thác: Tc`

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN DỰ TRỮ VÀ CÁC KHÁI NIỆM.

Bài toán dự trữ thực chất là bài toán lựa chọn phương án dự trữ các nguồn lực sao cho chi phí tốn kém ít nhất.

Sau đây ta cần thống nhất một vài khái niệm cơ bản cần thiết để có thể mô hình hoá bài toán thực tế dưới dạng bài toán dự trữ.

Hàng hoá: là đối tượng cần dự trữ cho hoạt động kinh tế xã hội nào đó.

Nhu cầu: là khối lượng hàng cần thiết và sẽ được tiêu thụ trong một khoảng thời gian T (giả thiết rằng T = 1). Nhu cầu là một biến ngẫu nhiên.

Cung cấp: là khả năng cung cấp hàng cho quá trình dự trữ và tiêu thụ.

Thời gian đặt hàng: là khoảng thời gian từ khi bắt đầu đặt hàng đến khi hàng bắt đầu được dự trữ và tiêu thụ tại doanh nghiệp. Khoảng thời gian này cũng là một biến ngẫu nhiên.

Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ: là phần thời gian dự trữ và tiêu thụ khối lượng hàng của một lần đặt mua.

Điểm đặt hàng: là mức hàng còn dự trữ trong kho khi cần bắt đầu đặt hàng cho chu kỳ tiếp theo.

Các loại chi phí:

- Chi phí mua hàng hay giá hàng
- Chi phí đặt hàng là chi phí cố định cho một lần đặt hàng
- Chi phí dự trữ hay chi phí kho: Chi phí dự trữ có thể cấu thành bởi các loại chi phí sau:

Chi phí bảo quản tính trên mỗi đơn vị hàng dự trữ trong một đơn vị thời gian.

Chi phí kho tính cho mỗi đơn vị hàng.

Chi phí tồn đọng vốn tính trên giá trị hàng hoá dự trữ.

Trong các bài toán cổ điển thông thường chi phí dự trữ được tính tỷ lệ với giá hàng qua hệ số gọi là hệ số chi phí dự trữ (hay hệ số bảo quản). Cách tính như vậy có thể chỉ bao gồm bộ phận thứ hai của chi phí thực tế.

Chi phí do không đảm bảo nhu cầu: là thiệt hại khi thiếu một đơn vị hàng trong một đơn vị thời gian.

Chi phí do dư thừa hàng (so với nhu cầu thực tế): Khoản chi phí phát sinh khi chúng ta dự trữ quá mức cần thiết. Thí dụ, tổn thất do vốn bị ứ đọng, do hàng bị hư hỏng,...

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

PHÂN LOẠI MÔ HÌNH DỰ TRỮ

Theo tínhchất dự trữ và tiêu thụ

-Mô hình với các yếu tố tất định hay còn gọi là mô hình tất định.

-Mô hình với ít nhất một trong các yếu tố ngẫu nhiên gọi là mô hình ngẫu nhiên.

Theo tính chất thường xuyên

-Mô hình dự trữ thường xuyên

- Mô hình dự trữ theo giai đoạn.

Theo điều kiện nguồn kinh phí và khả năng dự trữ

- Mô hình dự trữ có ràng buộc

- Mô hình dự trữ không ràng buộc

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

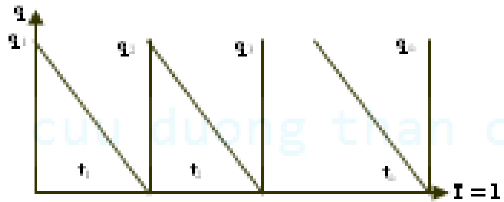
Mô hình dự trữ với việc tiêu thụ đều, bổ sung tức thời (mô hình Wilson).

a) Mô tả bài toán.

Giả sử nhu cầu về một loại hàng trong thời kỳ T (T = 1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng là đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho không đáng kể (tức thời). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất?

b) Thiết lập và phân tích mô hình

Giả sử ta chia T thành n chu kỳ dự trữ và tiêu thụ ($i = \overline{1,n}$), trong mỗi kỳ i đặt mua lượng hàng là q_i. Ta có sơ đồ biểu thị số lượng hàng trong kho như sau:



Trong mỗi chu kỳ t_i lượng hàng dự trữ trung bình là $q_i/2$, phát sinh chi phí dự trữ tương ứng $q_i t_i IC/2$; chi phí đặt hàng lần A, tổng số tiền mua hàng là CQ.

Vậy hàm tổng chi phí là:

$$F(t_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{ICt_i q_i}{2} + CQ \qquad (6.1)$$

Vì quy luật tiêu thụ đều nên dễ dàng suy ra: $t_i = q_i/Q$ với $\forall i$. Như vậy ta có:

$$F(q_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{IC q_i^2}{2Q} + CQ \qquad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$$

Với n xác định, ta có thể thấy F(q) nhỏ nhất khi $q_i = q = Q/n$ với $\forall i$, tức là lượng hàng đặt mua mỗi lần đều bằng q^*.

Thật vậy, lập hàm $f(q_i) = F(q_i) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q)$ điểm dừng của $f(q_i)$ là $q_i = Q/n$

Dễ dàng nhận thấy đây là điểm cực tiểu toàn bộ của $f(q_i)$.

Tóm lại, việc tìm cực tiểu $F(t_i, n)$ quy về tìm cực tiểu hàm:

$$F(q) = AQ/q + Icq/2 + CQ$$

Vì CQ không đổi, nên ta chỉ cần tìm q làm cực tiểu hàm:

$$D(q) = AQ/q + Icq/2 \qquad (6.3)$$

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

c) Lời giải

Vì D(q) là tổng của hai số hạng dương có tích không đổi (AQIC/2), theo hệ quả của bất đẳng thức Côsi, D(q) nhỏ nhất khi $AQ/q = ICq/2$. Giải phương trình này đối với q, ta có:

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần: $q^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}}$ (6.4)

và $D(q^*) = \sqrt{2AQIC} = \dfrac{2AQ}{q^*} = ICq^*$ (6.5)

$\Rightarrow F(q^*) = \sqrt{2AQIC} + CQ$ (6.6)

hay có thể tính: $F(q^*) = CQ + \dfrac{2AQ}{q^*} = ICq^* + CQ$ (6.7)

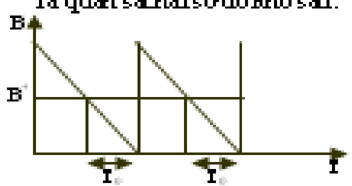
Số lần đặt hàng tối ưu: $n^* = \dfrac{Q}{q^*}$

Chu kỳ dự trữ tiêu thụ: $t^* = \dfrac{1}{n^*}$

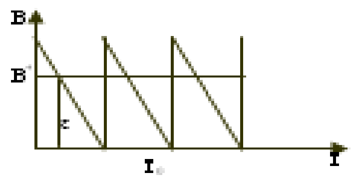
Điểm đặt hàng: việc xác định điểm đặt hàng sẽ đơn giản nếu như thời gian đặt hàng $T_0 < t^*$, nhưng trong thực tế có thể $T_0 > t^*$, như vậy cần đặt hàng trước một hay một số chu kỳ. Lượng hàng trong kho lúc cần đặt hàng (điểm đặt hàng) chính là lượng hàng tiêu thụ trong khoảng thời gian được xác định theo công thức sau:

$$[T_0 - t^* \operatorname{int}(T_0/t^*)]$$

Ta quan sát hai sơ đồ kho sau:

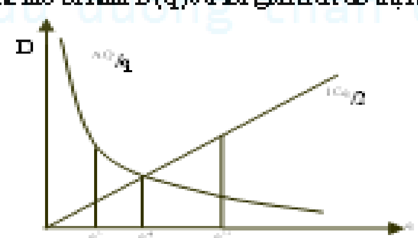


Sơ đồ 1: $B^* = T_0 Q$



Sơ đồ 2: $B^* = (T_0 - 2t^*)Q$

Ta có thể mô tả hàm D(q) và lời giải trên đồ thị như sau:



Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DƯ TRỮ

***d) Phân tích kết quả*:**

+/ Điểm q^* trên đồ thị cho thấy rằng nếu ta đang thực hiện một chiến lược dự trữ nào đó mà chi phí đặt hàng (hay chi phí cố định) quá cao so với chi phí dự trữ ($q^`$) thì cần tăng khối lượng đặt hàng mỗi lần, ngược lại nếu ở tình trạng $q^{``}$ thì cần giảm khối lượng hàng đặt mỗi lần.

+/ Thức tính q^* giúp ta xác định quy mô kho cần thiết tại điểm dự trữ tối ưu.

c) Công thức tính $F(q^*)$ cho phép xác định lượng vốn cần thiết cho chu kỳ dự trữ và tiêu thụ:

$$K^* = \frac{F(q^*)}{n^*} = \frac{\sqrt{2AQIC} + CQ}{Q}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}} = 2A + C\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

+/ Sự thay đổi một vài yếu tố (phân tích tĩnh)

- Trước tiên ta xét sự thay đổi tổng nhu cầu Q tác động đến quy mô kho và vốn.

Nếu $Q^` = \alpha Q$ ($\alpha > 0$) thì:

$$q^{`*} = \sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = q^*\sqrt{\alpha}$$

như vậy quy mô kho cần thiết không tỷ lệ với Q, mà thay đổi với hệ số căn bậc hai.

Tổng quát, từ công thức (6.4) ta thấy tại điểm tối ưu $q^* = q(A, Q, I, C)$ và dễ dàng thấy hàm q khả vi theo tất cả các biến (với các biến nhận giá trị dương).

Vậy: $$dq = \frac{1}{\sqrt{2AQIC}}\left(QdA - \frac{AQ}{C}dC - \frac{AQ}{I}dI + AdQ\right) \quad (6.8)$$

Công thức này cho phép xác định biến động của q^* (có thể xem là quy mô kho) theo các yếu tố trong mô hình.

Tương tự trong trường hợp đơn giản khi nhu cầu tăng ta có:

$$\text{Vốn } K^{`*} = 2A + C\sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = 2A + C\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

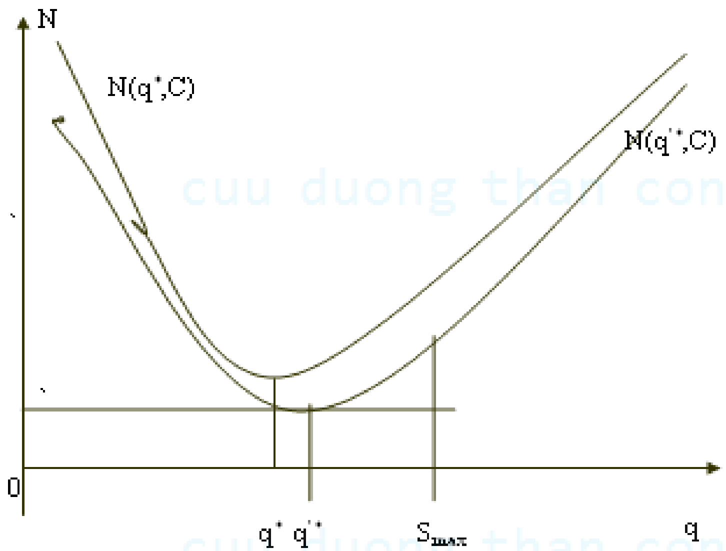
Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

- Sự thay đổi của giá hàng:

Giả sử có mốc q_0 với $q \geq q_0$ thì giá hàng giảm ε, $(0 < \varepsilon < 1)$; tức là: $c^{'} = c(1 - \varepsilon)$. Ta có đồ thị sau:

+/ Khi $q_0 > q^*$

Nếu $q_0\sqrt{1 - \varepsilon} < q^*$ thì đặt hàng với khối lượng : $q^{'*} = \dfrac{q^*}{\sqrt{1 - \varepsilon}}$ (*)



Trong trường hợp ngược lại cần so sánh $F(q^*)$ và $F(q_0)$ để xác định lượng hàng đặt mua tối ưu.

+/ Khi $q_0 \leq q^*$ cần thay đổi chiến lược đặt hàng để nhận được ưu đãi khuyến mãi, điểm tối ưu có thể tính theo công thức (*).

Tổng quát, ta có thể mô tả sự biến đổi của $K^* = K(A, Q, I, C)$ nhờ biểu thức sau :

$$dK = \left(2 + \frac{QC}{\sqrt{2AQIC}}\right)dA + \frac{AC}{\sqrt{2AQIC}}dQ + \frac{AQ}{\sqrt{2AQIC}}dC - \frac{\sqrt{2AQIC}}{I^2}dI$$

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

Thí dụ 1: Một công ty kinh doanh máy điện thoại di động tại một khu vực có tổng nhu cầu 200000chiếc/năm, việc tiêu thụ là đều đặn trong năm, thời gian nhập hàng không đáng kể. Công ty nhập máy điện thoại từ một nguồn không hạn chế về số lượng. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 400$, giá bình quân một máy là 240$, hệ số chi phí bảo quản là 0,05. Thời gian từ lúc đặt hàng đến khi có máy về kho là 2 tháng. Xác định các chỉ tiêu cơ bản trong dự trữ và tiêu thụ của công ty?

Giải: Thời gian đặt hàng T_0 = 0,164384 (năm) (tính theo ngày là 60).

Sử dụng các công thức trên ta có kết quả:

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần là: $q^* = 3651,483$

Tổng chi phí nhỏ nhất là: $F(q^*) = 48043817,8$

Thời gian một chu kỳ là: $t^* = 0,0182$

Số chu kỳ trong 1 năm : $n^* = 54,772$

Điểm đặt hàng : $B^* = 13,359$

Thí dụ 2: (Mô hình Baumol – Tobin và công thức căn bậc hai).

Giả sử một người có khoản tiền mặt V = 50000$ để chi tiêu trong một năm. Người đó có thể giữ một lượng tiền mặt nhất định, phần còn lại đem mua trái khoán, tiền mặt có lợi tức bằng không, còn trái khoán có lợi tức I = 0,01. Mỗi lần mua, bán trái khoán cần bỏ ra một khoản chi phí A = 20$. Hãy xác định lượng tiền mặt người đó giữ mỗi kỳ sao cho có lợi nhất, nếu việc chi tiêu là đều đặn.

Giải :

Giả sử người đó chia một năm thành n kỳ giữ tiền mặt, mỗi kỳ lượng tiền mặt nhận từ bán trái khoán là C. Như vậy chi phí cơ hội là IC/2, còn chi phí chi n lần giao dịch mua bán trái khoán là nA hay AV/C. Bài toán trên dẫn đến bài toán dự trữ với hàm tổng chi phí là:

$$N(C) = AV/C + IC/2$$

Dễ dạng nhận được lời giải theo công thức của mô hình Wilson :

Ta có : $\sqrt{\dfrac{2AV}{I}} = 14142\,\$$

Với bài toán này người ta có thể tính toán lượng tiền phát hành cần thiết để đảm bảo cho quá trình lưu thông tiền tệ với tổng lưu lượng của một của một quốc gia đã được dự báo.

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

Một số mô hình mở rộng từ mô hình Wilson

a) Bài toán chọn nguồn

Giả sử nhu cầu thường xuyên một loại hàng là Q đơn vị/năm. Có thể thoả mãn nhu cầu này từ hai nguồn, nguồn I với chi phí đặt hàng A_1, giá hàng về đến kho là C_1; nguồn II với chi phí đặt hàng A_2 và giá hàng về đến kho C_2. Chi phí dự trữ tính theo hiện vật là C_0 cho mỗi đơn vị dự trữ/năm. Xác định chiến lược dự trữ, tiêu thụ tối ưu trong điều kiện:

Nguồn I là sản phẩm của chính cơ sở dự trữ, tiêu thụ với khả năng cung cấp S đơn vị/năm ($S < Q$), nguồn II là nguồn mua ngoài. Nếu ngừng sản xuất thì toàn bộ thiệt hại phải chịu mỗi năm là F_0. Ngược lại nếu chỉ thoả mãn nhu cầu ở mức S thì thiệt hại ước tính là $\alpha(Q - S)$. Biết giá hàng bán ra lập.

Thiết lập mô hình và lời giải

Trường hợp 1 : Giả sử chúng ta đưa ra chiến lược trên cơ sở phân chia nguồn thành hai phần S và (Q - S) tương ứng với các nguồn I và II. Ta sẽ chứng tỏ rằng chiến lược tối ưu chỉ có thể là một trong hai cách chọn S = Q hoặc S = 0, tức là mua hàng ở và chỉ ở một nguồn.

Thật vậy. Tổng chi phí nguồn I khi đảm bảo S đơn vị hàng là:

$$F_1(q_1, S) = \frac{SA_1}{q_1} + C_0\frac{q_1}{2}\frac{S}{Q} + C_1 S$$

Giá trị cực tiểu hàm chi phí là:

$$F_1(q_1^*) = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1 S$$

Tương tự, tổng chi phí từ nguồn II cực tiểu là:

$$F_2(q_2^*) = \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)$$

trong đó $C_{01} = C_1 I$ và $C_{02} = C_2 I$.

Tổng chi phí nhỏ nhất:

$$F = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1 S + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}\left[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}\right] + (C_1 - C_2)$$

Hàm tổng chi phí là một hàm đơn điệu theo S vì dấu của $\frac{\partial F}{\partial S}$ không phụ thuộc vào S.

Như vậy tổng chi phí sẽ cực tiểu tại một trong 2 điểm hoặc S = 0 nếu $F'(S) > 0$ hoặc S = Q nếu $F'(S) < 0$.

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DƯ TRỮ

Thí dụ 3: Một cơ sở kinh doanh một loại hàng với nhu cầu 4500 đơn vị/năm. Việc tiêu thụ đều đặn, hai nguồn hàng có thể là:

Nguồn I: Chi phí đặt hàng A_1 = 2,5 triệu/lần, giá hàng C_1 = 0,12 triệu/đơn vị.

Nguồn II: Chi phí đặt hàng A_2 = 3 triệu/lần và giá hàng C_2 = 0,11 triệu/đơn vị.

Chi phí dự trữ tính theo giá hàng với hệ số I = 0,05.

Để xác định nguồn mua và số lượng mua, trước tiên ta so sánh hai trị số:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q \text{ và } F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$$

trong đó $C_{01} = C_1I$ và $C_{02} = C_2I$.

Ta có:

$$F_1(Q) = 551,619; F_2(Q) = 507,168$$

Vậy chọn nguồn II với lượng hàng đặt mỗi lần là $q^* = 2215,65$ đơn vị.

Trường hợp 2: Với những kết quả phân tích ở trên chúng ta có thể thấy việc lựa chọn chiến lược sản xuất, tiêu thụ dựa trên hàm tổng lợi nhuận (thô). Có thể xác định giá trị lớn nhất của tổng lợi nhuận qua việc so sánh các giá trị sau:

- Lợi nhuận tối đa trong trường hợp mua ngoài:

$$\pi_2(Q) = PQ - (F_0 + \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q) \qquad (6.10)$$

- Lợi nhuận tối đa khi tự cung cấp S và mua ngoài (Q - S):

$$\pi_{12}(Q) = PQ - \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + \left[C_1S + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}}\right] + C_2(Q-S) \qquad (6.11)$$

- Lợi nhuận tối đa khi chỉ thoả mãn nhu cầu bằng nguồn tự sản xuất:

$$\pi_1(Q) = PS - \left(\frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \alpha(Q-S)\right) \qquad (6.12)$$

Việc thoả mãn nhu cầu là bắt buộc thì việc tìm lời giải của bài toán không xét đến (6.12) và giá bán không có ý nghĩa trong quá trình giải bài toán.

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

b) Bài toán giá vốn

Chi phí dự trữ trong các công thức (6.10) – (6.12) có thể thay đổi theo từng tình huống cụ thể. Hàm chi phí cũng thay đổi đặc biệt là khi chúng ta quan tâm đáên vấn đề ứ đọng vốn hay giá vốn. Giá vốn thường được xác định bằng lãi suất ngân hàng (lãi suất tiền gửi hoặc tiền vay).

Trước hết ta xét bài toán cổ điển Wilson. Trong khi thiết lập mô hình chúng ta đã bỏ qua giá vốn, một yếu tố thường trực trong mọi bài toán kinh doanh. Giả sử giá vốn đo bằng lãi suất danh nghĩa hang nẳm là r không đổi. Hàm chi phí có xét đến giá vốn r có thể mô tả nhưsau:

$$F(q) = Ar + A\frac{Q}{q} + C_0\frac{q}{2} + r\frac{Cq}{2} + CQ \qquad (6.13)$$

Với C_0 là chi phí dự trữ tính cho một đơn vị hang trong thời gian T = (nẳm). Hàm chi phí trên giả thiết rằng mọi chi phí được hoàn trả sau mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ vì vậy giá vốn r chỉ liên quan đến tiền đặt hàng mỗi kỳ và lượng hàng dự trữ trung bình trong kho tại một kỳ. Cực tiểu hàm (6.13) quy về tìm cực tiểu của hàm:

$$D(q) = A\frac{Q}{q} + \frac{q}{2}(C_0 + rC)$$

Lời giải là: $$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0 + rC}} \qquad (6.14)$$

$$D(q^*) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)}$$

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ \qquad (6.15)$$

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

Thí dụ 4: Một nhà máy sản xuất ống nhựa cách điện có tổng nhu cầu về hạt nhựa PE mỗi năm là 40000 tấn. Nhà máy có thể nhập hạt nhựa theo từng hợp đồng với giá 500 nghìn đồng/tấn, với chi phí hoàn tất hợp đồng mỗi lần là 2 triệu đồng, chi phí bảo quản là 20 nghìn đồng cho mỗi tấn/năm. Hãy lựa chọn phương án cung cấp hạt nhựa cho nhà máy nếu lãi suất vay ngân hàng là 3% năm

Giải:

Ta có $A = 2000; Q = 40000; C_0 = 20; r = 0,03; C = 500$

Theo (6.14) ta có: $q^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{C_0 + rC}} = 2138,09$ (tấn)

Tổng chi phí nhỏ nhất là:

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ =$$

$$= [2x2000x40000x(20+0,03x500)]^{1/2} + 2000x0,03 + 500x40000 = 20074893 \text{(nghìn đồng)}$$

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

c) Bài toán thuê kho:

Giả sử một hệ thống dự trữ (của một cơ sở) có dung lượng kho cố định q^0. Mỗi đơn vị hàng ở đầu chu kỳ dự trữ vượt quá q^0 phát sinh một chi phí thuê kho với tỷ lệ k (k > 0). Với tất cả các dữ kiện của mô hình Wilson ta có thể thiết lập hàm chi phí theo lượng hàng đặt mỗi lần như sau:

$$F(q) = \begin{cases} F_1 = \dfrac{AQ}{q} + \dfrac{ICq}{2} + CQ & \text{Khi } q \le q^0 \\ F_2 = \dfrac{AQ}{q} + \dfrac{ICq^0}{2} + (I+k)C\dfrac{q-q^0}{2} + CQ & \text{Khi } q > q^0 \end{cases}$$

Giải bài toán này, cùng với lời giải thông thường ta cần trả lời hai vấn đề:

Có cần thuê kho hay không?

Nếu có thuê kho thì thuê như thế nào

Các bước giải:

Bước 1: Giải bài toán với hàm chi phí F_1 trên miền q > 0. Nghiệm của bài toán là $q_1^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}}$.

Nếu miền giá trị này không vượt quá q^0 ta có lời giải của bài toán $q^* = q_1^*$ và không cần thuê kho.

Bước 2: Nếu lời giải của bước 1 là $q_1^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}} > q^0$, ta tìm cực trị của F_2 trên miền q > 0

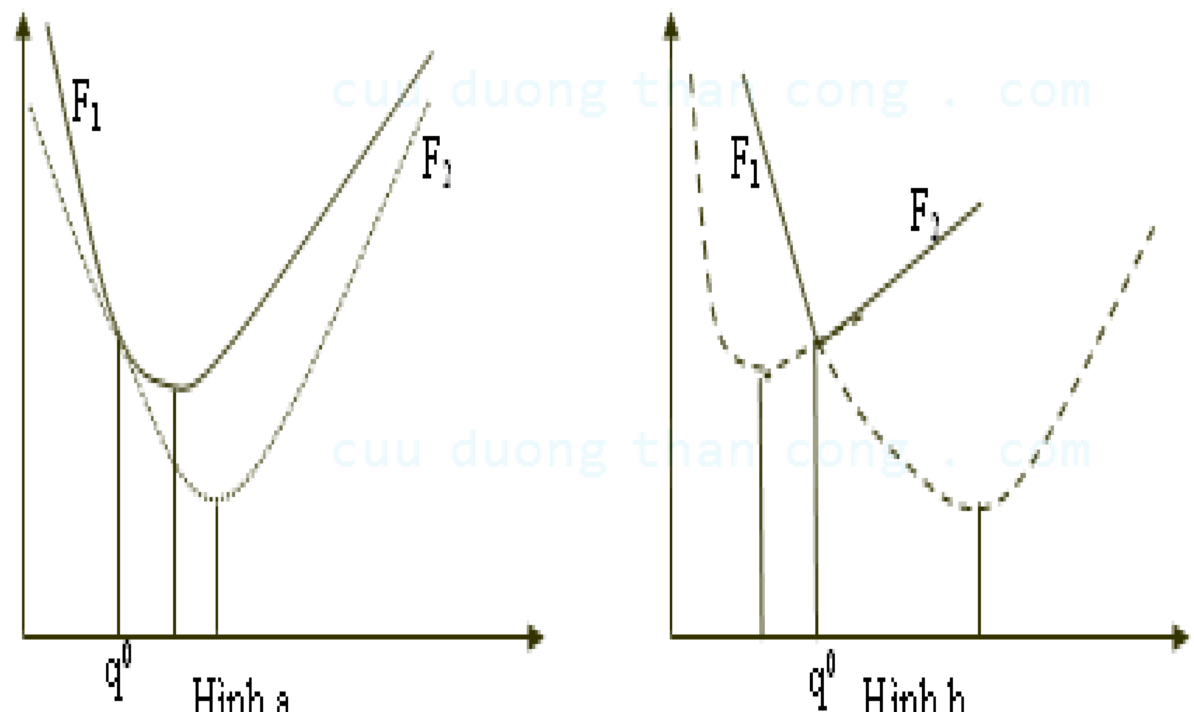
Điểm cực trị là: $q_2^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{(I+k)C}}$.

Chú ý là $q_1^* > q_2^*$ vì vậy ta cần xem xét quan hệ của điểm cực trị này so với q^0.

Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

Hình a) mô tả trường hợp $q_2^* > q^0$, lời giải của bài toán là $q^* = q_2^*$, câu trả lời kèm theo là thuê kho có dung tích $v = q_2^* - q^0$.

Hình b) mô tả trường hợp $q_2^* < q^0$ lời giải của bài toán là $q^* = q^0$, không cần thuê kho.



Chương 6.
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ